

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V1	A	C	D	C	D	A	11	36π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}(x-1)^2 + \log(1+y^2+z^2), \frac{8}{3}y(x-1) + e^{xz}, \frac{8}{3}z(x-1) + \sin(xy) \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 + \sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div}F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div}F(x, y, z) = 8(x-1)$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 8(x-1) \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} y = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \sin \vartheta \\ x = x \end{cases} \quad \rho \geq 0, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, x \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, x)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 8 \int_{\Omega} (x-1) \, dx \, dy \, dz = 8 \int_{\Omega'} \rho(x-1) \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq x \leq 1 + \rho\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 8 \int_{\Omega'} \rho(x-1) \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 16\pi \int_0^1 \rho \left(\int_0^{1+\rho} (x-1) \, dx \right) \, d\rho = \\ &= 16\pi \int_0^1 \rho \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 \right]_0^{1+\rho} \, d\rho = 8\pi \int_0^1 \rho(\rho^2 - 1) \, d\rho = \\ &= 8\pi \left[\frac{1}{4}(\rho^2 - 1)^2 \right]_0^1 = -2\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V2	E	E	E	C	A	C	26	48π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{3}{4}x(y-2) + e^{yz}, \frac{3}{4}(y-2)^2 + \sin(xz), \frac{3}{4}z(y-2) + \log(1+x^2+y^2) \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 2 + \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 \leq 4 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div}F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div}F(x, y, z) = 3(y-2)$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 3(y-2) \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \sin \vartheta \\ y = y \end{cases} \quad \rho \geq 0, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, y \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, y)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 3 \int_{\Omega} (y-2) \, dx \, dy \, dz = 3 \int_{\Omega'} \rho (y-2) \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2 + \rho\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 3 \int_{\Omega'} \rho (y-2) \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 6\pi \int_0^2 \rho \left(\int_0^{2+\rho} (y-2) \, dy \right) \, d\rho = \\ &= 6\pi \int_0^2 \rho \left[\frac{1}{2}(y-2)^2 \right]_0^{2+\rho} \, d\rho = 3\pi \int_0^2 \rho (\rho^2 - 4) \, d\rho = \\ &= 3\pi \left[\frac{1}{4}(\rho^2 - 4)^2 \right]_0^2 = -12\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V3	B	D	E	E	E	A	22	54 π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\log(1 + y^2 + z^2) - \frac{8}{3}(x-1)^2, e^{xz} - \frac{16}{3}y(x-1), \sin(xy) - \frac{16}{3}z(x-1) \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 + \sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div}F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div}F(x, y, z) = -16(x-1)$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = -16 \int_{\Omega} (x-1) \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} y = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \sin \vartheta \\ x = x \end{cases} \quad \rho \geq 0, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, x \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, x)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = -16 \int_{\Omega} (x-1) \, dx \, dy \, dz = -16 \int_{\Omega'} \rho (x-1) \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq x \leq 1 + \rho\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= -16 \int_{\Omega'} \rho (x-1) \, d\rho \, d\vartheta \, dx = -32\pi \int_0^1 \rho \left(\int_0^{1+\rho} (x-1) \, dx \right) \, d\rho = \\ &= -32\pi \int_0^1 \rho \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 \right]_0^{1+\rho} \, d\rho = -16\pi \int_0^1 \rho (\rho^2 - 1) \, d\rho = \\ &= -16\pi \left[\frac{1}{4}(\rho^2 - 1)^2 \right]_0^1 = 4\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V4	D	D	C	B	E	A	52	24 π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(e^{yz} - \frac{5}{4}x(y-2), \sin(xz) - \frac{5}{4}(y-2)^2, \log(1+x^2+y^2) - \frac{5}{4}z(y-2) \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 2 + \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 \leq 4 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div}F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div}F(x, y, z) = -5(y-2)$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = -5 \int_{\Omega} (y-2) \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \sin \vartheta \\ y = y \end{cases} \quad \rho \geq 0, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, y \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, y)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = -5 \int_{\Omega} (y-2) \, dx \, dy \, dz = -5 \int_{\Omega'} \rho (y-2) \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2 + \rho\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= -5 \int_{\Omega'} \rho (y-2) \, d\rho \, d\vartheta \, dy = -10\pi \int_0^2 \rho \left(\int_0^{2+\rho} (y-2) \, dy \right) d\rho = \\ &= -10\pi \int_0^2 \rho \left[\frac{1}{2}(y-2)^2 \right]_0^{2+\rho} d\rho = -5\pi \int_0^2 \rho (\rho^2 - 4) \, d\rho = \\ &= -5\pi \left[\frac{1}{4}(\rho^2 - 4)^2 \right]_0^2 = 20\pi. \end{aligned}$$