

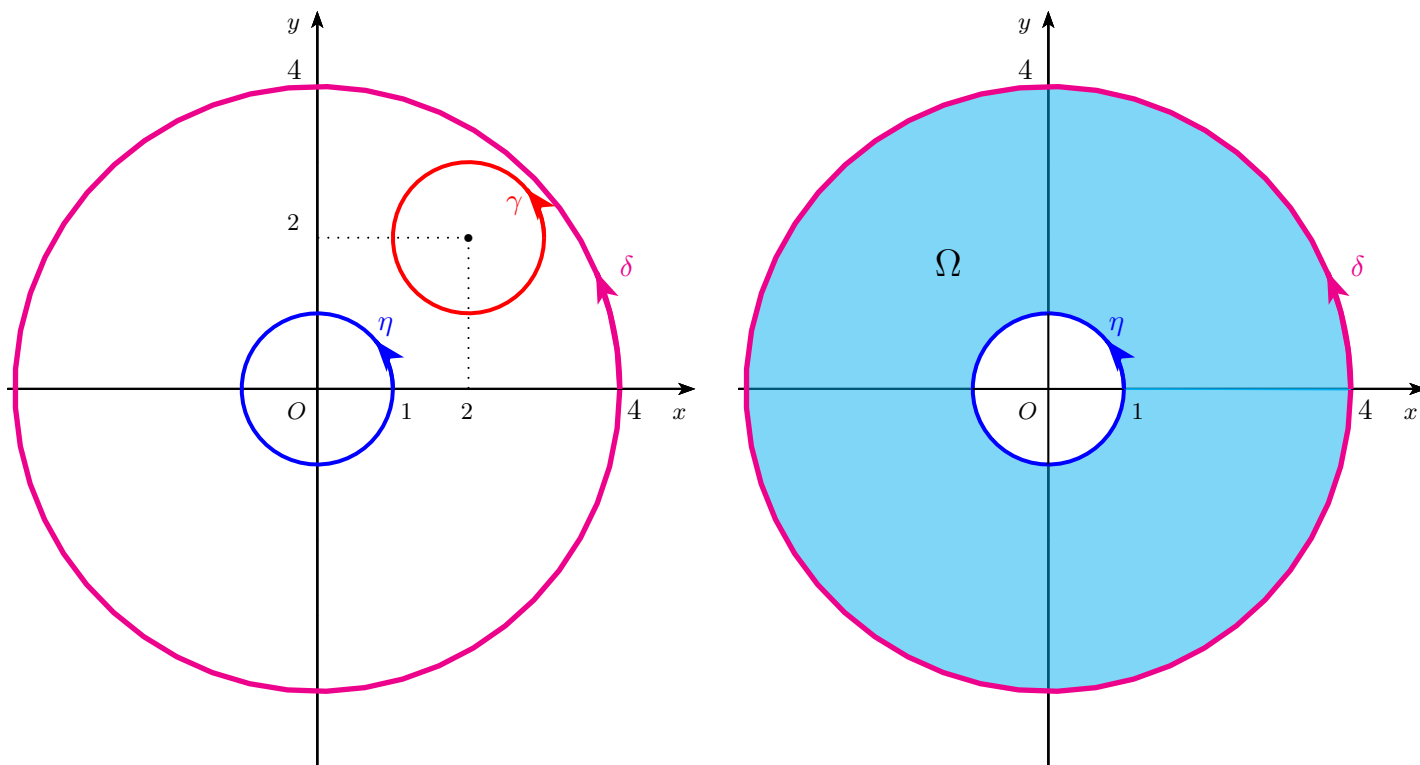
Versione: V1

Quiz 1. Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1 , $F = (f_1, f_2)$ tale che $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e siano γ una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(2, 2)$ e raggio 1, η una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(0,0)$ e raggio 1, e δ una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(0,0)$ e raggio 4.

Posto $I_\gamma = \int_\gamma F \cdot dP$, $I_\eta = \int_\eta F \cdot dP$ e $I_\delta = \int_\delta F \cdot dP$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A $I_\gamma = 0$ e $I_\eta = I_\delta$.
 B $I_\gamma = 0$ e $I_\eta \neq I_\delta$.
 C $I_\eta = 0$ e $I_\gamma = I_\delta$.
 D $I_\gamma \neq I_\eta$, $I_\gamma \neq I_\delta$ e $I_\eta \neq I_\delta$.
 E $I_\eta = 0$ e $I_\gamma \neq I_\delta$.

SVOLGIMENTO



Il campo vettoriale F verifica la condizione necessaria per essere conservativo ma il suo dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso. Quindi non si può concludere che F sia conservativo.

Osserviamo che il sostegno di γ è tutto contenuto nel I quadrante esclusi gli assi, che è un sottoinsieme di $\text{dom}(F)$ ed è semplicemente connesso. Quindi F ristretto a questo sottoinsieme verifica la condizione sufficiente per essere conservativo e quindi risulta essere conservativo. Per le proprietà dei campi conservativi, l'integrale di F lungo una curva parametrica chiusa e regolare è zero. Quindi $I_\gamma = 0$.

Osserviamo che l'unione dei sostegni di η e δ costituisce il bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$. Poiché $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$, se $\partial\Omega$ è orientato positivamente, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = 0$$

perché per ipotesi $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \text{dom}(F)$.

Inoltre il bordo di Ω orientato positivamente è l'unione del sostegno di δ percorso in verso antiorario e di quello di η percorso in verso orario, e quindi, tenuto conto del verso indotto da δ e η , per le proprietà degli integrali di linea si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = I_\delta - I_\eta.$$

Ne segue che $I_\delta = I_\eta$. La risposta corretta è **A**.

Quiz 2. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(6x + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, 4y + \frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^7 - 4t^6 + t + (4-t)(e^t - 1), (4-t)\cos(\pi t) + \sin(\pi t))$ vale

A 8. **B** 40. **C** 16. **D** 80. **E** 0.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{5xy}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su \mathbb{R}^2 . Denotato con f un potenziale di F su \mathbb{R}^2 , si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 6x + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 4y + \frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \left(6x + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right) dx = 3x^2 + 5\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} + c'(y) = 4y + \frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \implies c'(y) = 4y \implies c(y) = 2y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su \mathbb{R}^2 è

$$f(x, y) = 3x^2 + 5\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 2y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(4)) - f(\gamma(0)) = f(4, 0) - f(0, 4) = 16.$$

La risposta corretta è **C**.

Quiz 3. Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 + y^3 + 4, x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0\}$.

L'integrale di superficie $\int_\Sigma \frac{z + 2y^2 - y^3 - 4}{\sqrt{16x^2 + 9y^4 + 1}} d\sigma$ vale

A $\frac{32}{3}\pi$. **B** 16π . **C** 4π . **D** 8π . **E** $\frac{16}{3}\pi$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 2x^2 + y^3 + 4$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 2x^2 + y^3 + 4)$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z + 2y^2 - y^3 - 4}{\sqrt{16x^2 + 9y^4 + 1}}$, per definizione

$$\int_{\Sigma} \frac{z + 2y^2 - y^3 - 4}{\sqrt{16x^2 + 9y^4 + 1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-4x \quad -3y^2, 1).$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{16x^2 + 9y^4 + 1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f(x, y, 2x^2 + y^3 + 4) = \frac{2x^2 + 2y^2}{\sqrt{16x^2 + 9y^4 + 1}},$$

si ha che

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K \frac{2x^2 + 2y^2}{\sqrt{16x^2 + 9y^4 + 1}} \cdot \sqrt{16x^2 + 9y^4 + 1} dx dy = 2 \int_K (x^2 + y^2) dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 2 \int_{K'} \rho^3 d\rho d\vartheta =$$

dove $K' = [0, 2] \times [\pi, 2\pi]$, e quindi si ottiene

$$= 2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 = 8\pi.$$

La risposta corretta è D .

Quiz 4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7 (e^{1/n} - 1)}{n^8 + 2}$

- A converge a zero.
- B diverge positivamente.
- C converge ad un numero $S > 0$.
- D converge ad un numero $S < 0$.
- E diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Poiché $e^x \geq 1$ per ogni $x \geq 0$ la serie è a termini positivi, quindi converge ad un numero reale $S \geq 0$ oppure diverge positivamente.

Essendo $e^x \sim 1 + x$ per $x \rightarrow 0$, si ha che

$$\frac{n^7 (e^{1/n} - 1)}{n^8 + 2} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7 (e^{1/n} - 1)}{n^8 + 2}$ converge, e poiché il termine generale della serie è maggiore di zero, la serie converge ad un numero $S > 0$.

La risposta corretta è **C**.

Quiz 5. Sia $f(x, y) = (x^3 - 3x)(y^2 - 4) + 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A** La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha punti di minimo locale.
- B** La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha punti di massimo locale.
- C** La funzione f non ha punti di sella.
- D** La funzione f ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale.
- E** La funzione f non ha né punti di massimo locale né punti di minimo locale.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3(x^2 - 1)(y^2 - 4), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y(x^3 - 3x).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} (x^2 - 1)(y^2 - 4) = 0 \\ y(x^3 - 3x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1, y = \pm 2 \\ y = 0, x = 0, x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (\pm 1, 0), (0, \pm 2), (\pm\sqrt{3}, \pm 2). \end{aligned}$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 8 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x(y^2 - 4), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2(x^3 - 3x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6y(x^2 - 1).$$

Quindi

$$\begin{aligned} H_f(1, 0) &= \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, & H_f(-1, 0) &= \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, & H_f(0, 2) &= \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_f(0, -2) &= \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}, & H_f(\pm\sqrt{3}, 2) &= \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix} & H_f(\pm\sqrt{3}, -2) &= \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ne segue che $(1, 0)$ è un punto di massimo locale per f , $(-1, 0)$ è un punto di minimo locale per f , mentre i punti $(0, \pm 2)$ e $(\pm\sqrt{3}, \pm 2)$ sono di sella per f . La risposta corretta è **D**.

Quiz 6. Sia (a_n) una successione reale e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A** Se $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
- B** Nessuna delle altre è corretta.
- C** Se $\lim_n a_n = 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
- D** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a $S \in \mathbb{R}$, allora $\lim_n a_n = S$.
- E** Se $\lim_n a_n = S \in \mathbb{R}$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a S .

SVOLGIMENTO

Per definizione la serie di (a_n) converge se la successione delle somme parziali (S_n) ammette un limite in \mathbb{R} . La risposta corretta è **A**.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y) = (\log(1 + x^2) - 6xy^2, 6x^2y + \sqrt{1 + y^2})$ e l'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2 - x^2, x \geq 0\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2$ e che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 .

Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

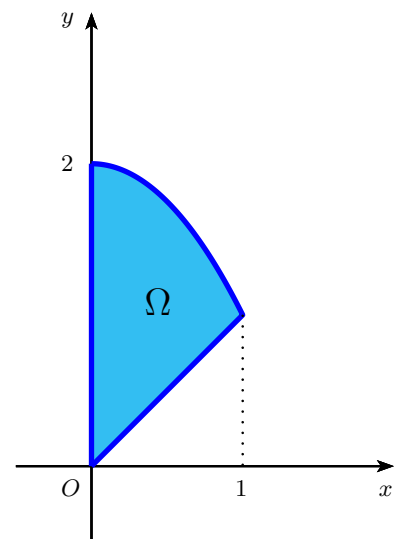
$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \int_{\Omega} 24xy dx dy.$$

Osserviamo che Ω è un insieme y -semplice. Infatti,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x^2\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} 24xy dx dy = 24 \int_0^1 x \left(\int_x^{2-x^2} y dy \right) dx = \\ &= 24 \int_0^1 x \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_x^{2-x^2} dx = 12 \int_0^1 x [(2-x^2)^2 - x^2] dx = \\ &= 12 \int_0^1 [x(2-x^2)^2 - x^3] dx = 12 \left[-\frac{1}{6}(2-x^2)^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = 11. \end{aligned}$$



La risposta corretta è 11.

Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{2yz^3}{3(x^2 + y^2)} + \cos x, \sin y - \frac{2xz^3}{3(x^2 + y^2)}, z^4 - 2z \right)$ e la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 12, 0 \leq z \leq 3\}$.

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{rot}F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{2yz^3}{3(x^2 + y^2)} + \cos x & \sin y - \frac{2xz^3}{3(x^2 + y^2)} & z^4 - 2z \end{vmatrix} = \left(\frac{2xz^2}{x^2 + y^2}, \frac{2yz^2}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{12 - x^2 - y^2} \\ 3 \leq x^2 + y^2 \leq 12. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = \sqrt{12 - x^2 - y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x^2 + y^2 \leq 12\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{12 - x^2 - y^2})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot}F(x, y, \sqrt{12 - x^2 - y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \left(\frac{2x(12 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \frac{2y(12 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, 0 \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= 2\sqrt{12 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_K \operatorname{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K 2\sqrt{12 - x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_K 2\sqrt{12 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = 2 \int_{K'} \rho \sqrt{12 - \rho^2} \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [\sqrt{3}, \sqrt{12}] \times [0, 2\pi]$ e quindi si ottiene

$$= 4\pi \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}} \rho \sqrt{12 - \rho^2} \, d\rho = 4\pi \left[-\frac{1}{3} (12 - \rho^2)^{3/2} \right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}} = 36\pi.$$

La risposta corretta è 36π .

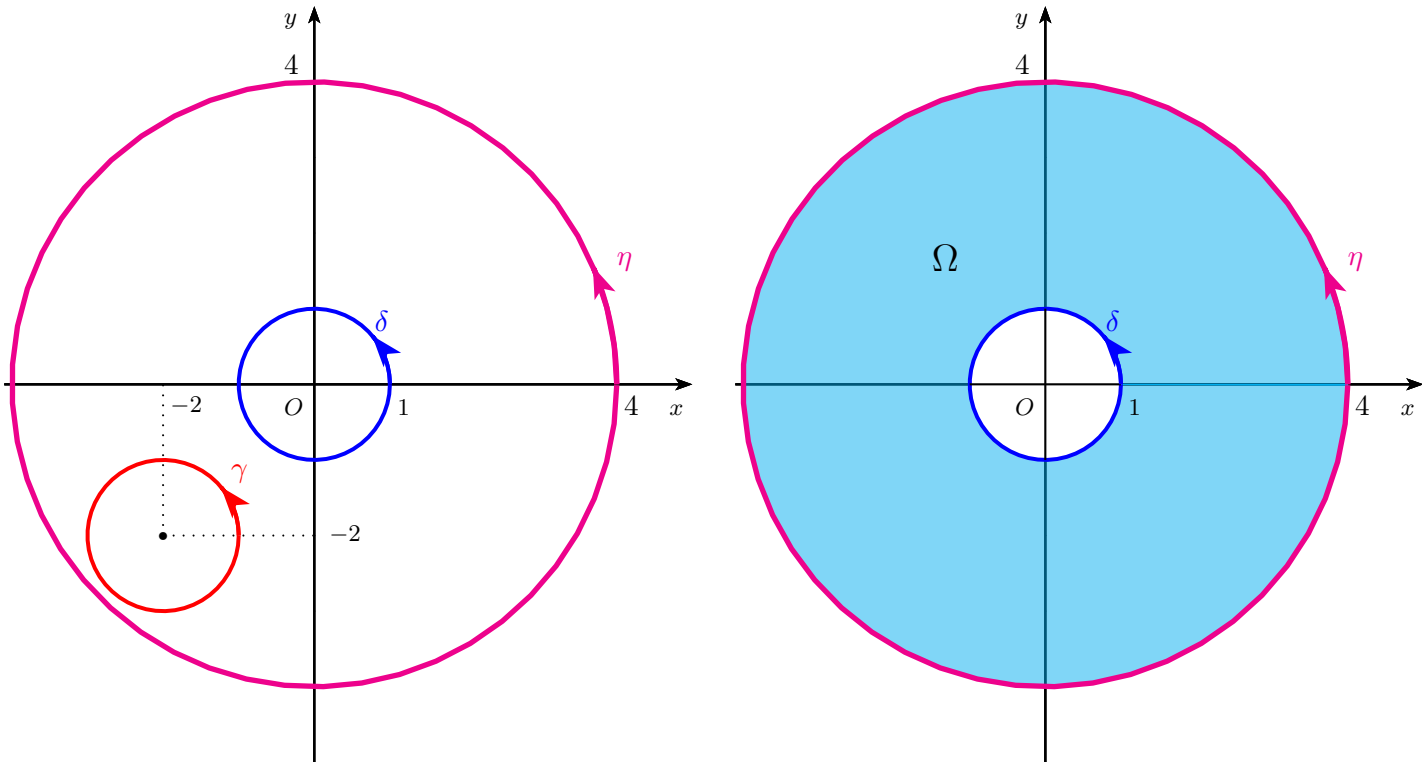
Versione V2

Quiz 1. Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1 , $F = (f_1, f_2)$ tale che $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, e siano γ una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(-2, -2)$ e raggio 1, η una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(0, 0)$ e raggio 4, e δ una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(0, 0)$ e raggio 1.

Posto $I_\gamma = \int_\gamma F \cdot dP$, $I_\eta = \int_\eta F \cdot dP$ e $I_\delta = \int_\delta F \cdot dP$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A $I_\eta = 0$ e $I_\gamma \neq I_\delta$.
- B $I_\gamma = 0$ e $I_\eta \neq I_\delta$.
- C $I_\eta = 0$ e $I_\gamma = I_\delta$.
- D $I_\gamma \neq I_\eta$, $I_\gamma \neq I_\delta$ e $I_\eta \neq I_\delta$.
- E $I_\gamma = 0$ e $I_\eta = I_\delta$.

SVOLGIMENTO



Il campo vettoriale F verifica la condizione necessaria per essere conservativo ma il suo dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non è semplicemente connesso. Quindi non si può concludere che F sia conservativo.

Osserviamo che il sostegno di γ è tutto contenuto nel III quadrante esclusi gli assi, che è un sottoinsieme di $\text{dom}(F)$ ed è semplicemente connesso. Quindi F ristretto a questo sottoinsieme verifica la condizione sufficiente per essere conservativo e quindi risulta essere conservativo. Per le proprietà dei campi conservativi, l'integrale di F lungo una curva parametrica chiusa e regolare è zero. Quindi $I_\gamma = 0$.

Osserviamo che l'unione dei sostegni di η e δ costituisce il bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$. Poiché $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$, se $\partial\Omega$ è orientato positivamente, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = 0$$

perché per ipotesi $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \text{dom}(F)$.

Inoltre il bordo di Ω orientato positivamente è l'unione del sostegno di η percorso in verso antiorario e di quello di δ percorso in verso orario, e quindi, tenuto conto del verso indotto da δ e η , per le proprietà degli integrali di

linea si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = I_\eta - I_\delta.$$

Ne segue che $I_\eta = I_\delta$. La risposta corretta è **E**.

Quiz 2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6 + 4}{n^9 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)}$

A converge ad un numero $S > 0$.

B diverge negativamente.

C converge a zero.

D converge ad un numero $S < 0$.

E diverge positivamente.

SVOLGIMENTO

Sia $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G(x, y) = g(\|(x, y)\|)(x, y)$. Evidentemente G è radiale. Poiché $\cos x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie è a termini positivi, quindi converge ad un numero reale $S \geq 0$ oppure diverge positivamente.

Essendo $\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$, si ha che

$$\frac{n^6 + 4}{n^9 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)} \sim \frac{2}{n}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6 + 4}{n^9 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)}$ diverge.

La risposta corretta è **E**.

Quiz 3. Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4y^2 - 2x^3 + 5, x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0\}$.

L'integrale di superficie $\int_{\Sigma} \frac{z + 4x^2 + 2x^3 - 5}{\sqrt{36x^4 + 64y^2 + 1}} d\sigma$ vale

A 72π . **B** 162π . **C** 36π . **D** 27π . **E** 81π .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 4y^2 - 2x^3 + 5$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 4y^2 - 2x^3 + 5)$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z + 4x^2 + 2x^3 - 5}{\sqrt{36x^4 + 64y^2 + 1}}$, per definizione

$$\int_{\Sigma} \frac{z + 4x^2 + 2x^3 - 5}{\sqrt{36x^4 + 64y^2 + 1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (6x^2, -8y, 1).$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{36x^4 + 64y^2 + 1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f(x, y, 4y^2 - 2x^3 + 5) = \frac{4x^2 + 4y^2}{\sqrt{36x^4 + 64y^2 + 1}},$$

si ha che

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K \frac{4x^2 + 4y^2}{\sqrt{36x^4 + 64y^2 + 1}} \cdot \sqrt{36x^4 + 64y^2 + 1} dx dy = 4 \int_K (x^2 + y^2) dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 4 \int_{K'} \rho^3 d\rho d\vartheta =$$

dove $K' = [0, 3] \times [-\pi/2, \pi/2]$, e quindi si ottiene

$$= 4\pi \int_0^3 \rho^3 d\rho = 4\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^3 = 81\pi.$$

La risposta corretta è E.

Quiz 4. Sia (a_n) una successione reale e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge positivamente, allora $\lim_n a_n = +\infty$.

B Nessuna delle altre è corretta.

C Se $\lim_n S_n = +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge positivamente.

D Se $\lim_n a_n = 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

E Se $\lim_n a_n$ non esiste, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è indeterminata.

SVOLGIMENTO

Per definizione la serie di (a_n) diverge positivamente se la successione delle somme parziali (S_n) ha limite $+\infty$.
La risposta corretta è C.

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(6x + \frac{7x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, 8y + \frac{7y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = ((t-5) \cos(\pi t) - \sin(\pi t), t^8 - 5t^7 + t + (5-t)(1-e^t))$ vale

A 25. B 350. C 50. D 175. E 0.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{7xy}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su \mathbb{R}^2 . Denotato con f un potenziale di F su \mathbb{R}^2 , si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 6x + \frac{7x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 8y + \frac{7y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \left(6x + \frac{7x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right) dx = 3x^2 + 7\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{7y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} + c'(y) = 8y + \frac{7y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \implies c'(y) = 8y \implies c(y) = 4y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su \mathbb{R}^2 è

$$f(x, y) = 3x^2 + 7\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 4y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(5)) - f(\gamma(0)) = f(0, 5) - f(-5, 0) = 25.$$

La risposta corretta è A .

Quiz 6. Sia $f(x, y) = (x^2 - 16)(y^3 - 3y) + 3$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha punti di minimo locale.
 B La funzione f non ha né punti di massimo locale né punti di minimo locale.
 C La funzione f ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale.
 D La funzione f non ha punti di sella.
 E La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha punti di massimo locale.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(y^3 - 3y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3(x^2 - 16)(y^2 - 1).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} x(y^3 - 3y) = 0 \\ (x^2 - 16)(y^2 - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, y = 0, y = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm 4, y = \pm 1 \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (0, \pm 1), (\pm 4, 0), (\pm 4, \pm\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 8 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2(y^3 - 3y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y(x^2 - 16), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6x(y^2 - 1).$$

Quindi

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -96 \end{pmatrix}, \quad H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 96 \end{pmatrix}, \quad H_f(4,0) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(-4,0) = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_f(4,\pm\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 48 \\ 48 & 0 \end{pmatrix} \quad H_f(-4,\pm\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & -48 \\ -48 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0,1)$ è un punto di massimo locale per f , $(0,-1)$ è un punto di minimo locale per f , mentre i punti $(\pm 4,0)$ e $(\pm 4,\pm\sqrt{3})$ sono di sella per f . La risposta corretta è **C**.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y) = (\sqrt{1+x^2} - 6xy^2, 6x^2y + \log(1+y^2))$ e l'insieme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \leq y \leq 3-x^2, x \geq 0\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2$ e che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 .

Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right] dx dy =$$

$$= \int_{\Omega} 24xy dx dy.$$

Osserviamo che Ω è un insieme y -semplice. Infatti,

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 3-x^2\}.$$

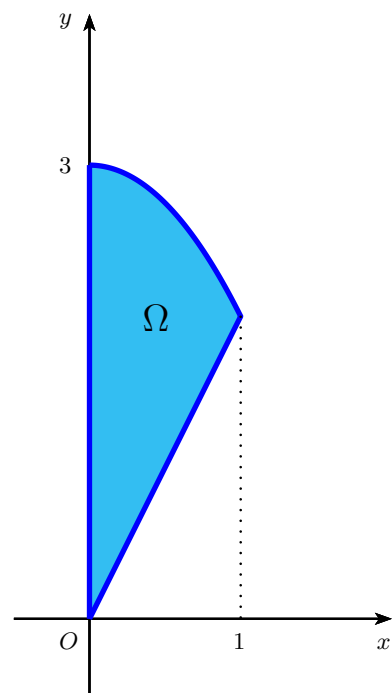
Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} 24xy dx dy = 24 \int_0^1 x \left(\int_{2x}^{3-x^2} y dy \right) dx =$$

$$= 24 \int_0^1 x \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_{2x}^{3-x^2} dx = 12 \int_0^1 x [(3-x^2)^2 - 4x^2] dx =$$

$$= 12 \int_0^1 [x(3-x^2)^2 - 4x^3] dx = 12 \left[-\frac{1}{6}(3-x^2)^3 - x^4 \right]_0^1 = 26.$$

La risposta corretta è 26.



Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\frac{yz^3}{9(x^2+y^2)} + e^x, \cos y - \frac{xz^3}{9(x^2+y^2)}, z^6 - 4z \right)$ e la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 48, 0 \leq z \leq 6\}$.

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n d\sigma,$$

dove per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{yz^3}{9(x^2+y^2)} + e^x & \cos y - \frac{xz^3}{9(x^2+y^2)} & z^6 - 4z \end{vmatrix} = \left(\frac{xz^2}{3(x^2+y^2)}, \frac{yz^2}{3(x^2+y^2)}, 0 \right).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 48 \\ 0 \leq z \leq 6 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{48 - x^2 - y^2} \\ 12 \leq x^2 + y^2 \leq 48. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = \sqrt{48 - x^2 - y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 12 \leq x^2 + y^2 \leq 48\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{48 - x^2 - y^2})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F(x, y, \sqrt{48 - x^2 - y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \left(\frac{x(48 - x^2 - y^2)}{3(x^2 + y^2)}, \frac{y(48 - x^2 - y^2)}{3(x^2 + y^2)}, 0 \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{48 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K \frac{1}{3} \sqrt{48 - x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \frac{1}{3} \int_K \sqrt{48 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = \frac{1}{3} \int_{K'} \rho \sqrt{48 - \rho^2} \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [\sqrt{12}, \sqrt{48}] \times [0, 2\pi]$ e quindi si ottiene

$$= \frac{2}{3} \pi \int_{\sqrt{12}}^{\sqrt{48}} \rho \sqrt{48 - \rho^2} \, d\rho = \frac{2}{3} \pi \left[-\frac{1}{3} (48 - \rho^2)^{3/2} \right]_{\sqrt{12}}^{\sqrt{48}} = 48\pi.$$

La risposta corretta è 48π .

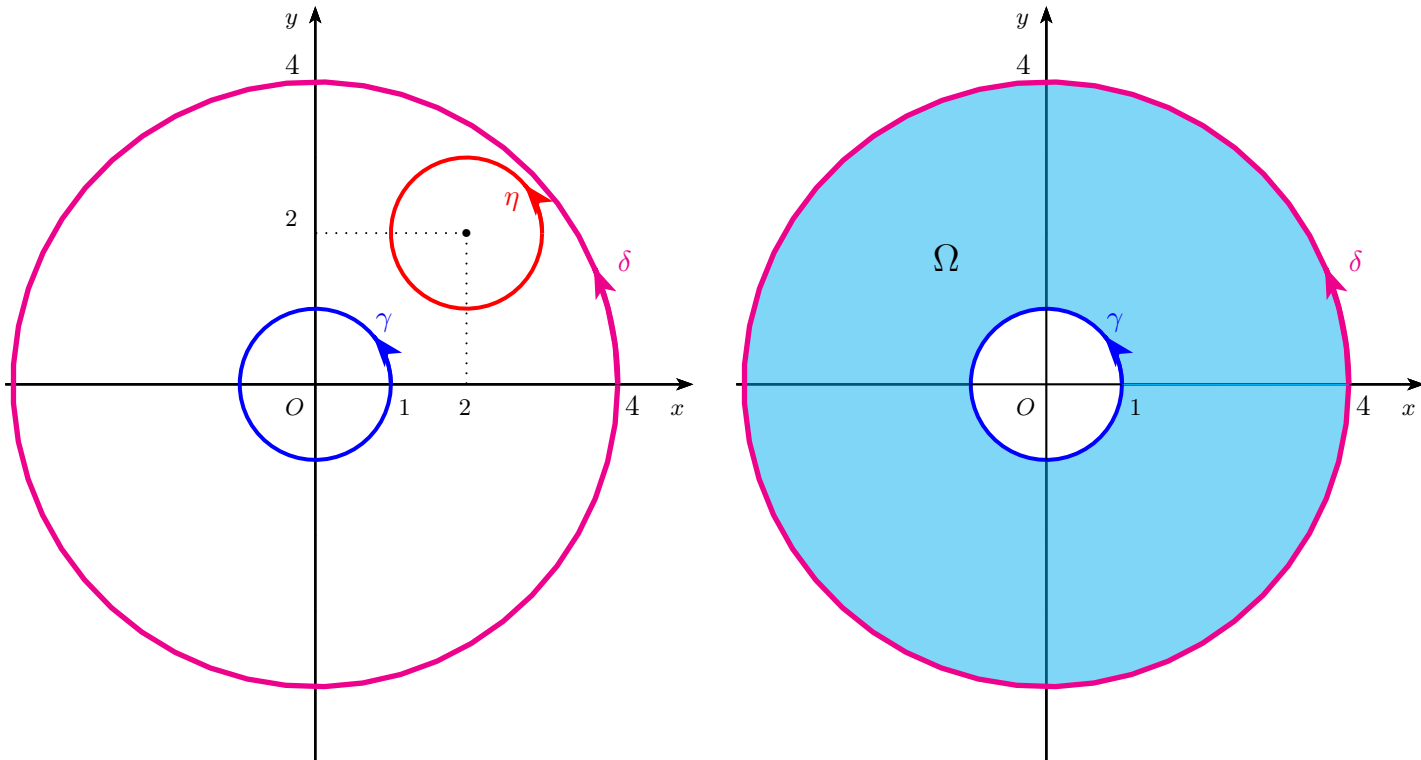
Versione V3

Quiz 1. Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1 , $F = (f_1, f_2)$ tale che $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e siano γ una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(0,0)$ e raggio 1, η una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(2,2)$ e raggio 1, e δ una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(0,0)$ e raggio 4.

Posto $I_\gamma = \int_\gamma F \cdot dP$, $I_\eta = \int_\eta F \cdot dP$ e $I_\delta = \int_\delta F \cdot dP$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A $I_\gamma = 0$ e $I_\eta \neq I_\delta$.
- B $I_\eta = 0$ e $I_\gamma = I_\delta$.
- C $I_\gamma = 0$ e $I_\eta = I_\delta$.
- D $I_\gamma \neq I_\eta$, $I_\gamma \neq I_\delta$ e $I_\eta \neq I_\delta$.
- E $I_\eta = 0$ e $I_\gamma \neq I_\delta$.

SVOLGIMENTO



Il campo vettoriale F verifica la condizione necessaria per essere conservativo ma il suo dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso. Quindi non si può concludere che F sia conservativo.

Osserviamo che il sostegno di η è tutto contenuto nel I quadrante esclusi gli assi, che è un sottoinsieme di $\text{dom}(F)$ ed è semplicemente connesso. Quindi F ristretto a questo sottoinsieme verifica la condizione sufficiente per essere conservativo e quindi risulta essere conservativo. Per le proprietà dei campi conservativi, l'integrale di F lungo una curva parametrica chiusa e regolare è zero. Quindi $I_\eta = 0$.

Osserviamo che l'unione dei sostegni di γ e δ costituisce il bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$. Poiché $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$, se $\partial\Omega$ è orientato positivamente, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = 0$$

perché per ipotesi $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \text{dom}(F)$.

Inoltre il bordo di Ω orientato positivamente è l'unione del sostegno di δ percorso in verso antiorario e di quello di γ percorso in verso orario, e quindi, tenuto conto del verso indotto da δ e γ , per le proprietà degli integrali di

linea si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = I_\delta - I_\gamma.$$

Ne segue che $I_\delta = I_\gamma$. La risposta corretta è **B**.

Quiz 2. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(4x + \frac{6x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, 6y + \frac{6y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^7 - 4t^6 + t + (t - 4)(e^t - 1), (t - 4) \cos(\pi t) + \sin(\pi t))$ vale

A -80. **B** 0. **C** -40. **D** -16. **E** -8.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{6xy}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su \mathbb{R}^2 . Denotato con f un potenziale di F su \mathbb{R}^2 , si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 4x + \frac{6x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 6y + \frac{6y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \left(4x + \frac{6x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\right) dx = 2x^2 + 6\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{6y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} + c'(y) = 6y + \frac{6y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \implies c'(y) = 6y \implies c(y) = 3y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su \mathbb{R}^2 è

$$f(x, y) = 2x^2 + 6\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 3y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(4)) - f(\gamma(0)) = f(4, 0) - f(0, -4) = -16.$$

La risposta corretta è **D**.

Quiz 3. Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4x^2 + 2y^3 + 3, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

L'integrale di superficie $\int_{\Sigma} \frac{2(z + 4y^2 - 2y^3 - 3)}{\sqrt{64x^2 + 36y^4 + 1}} d\sigma$ vale

A 8π . **B** $\frac{64}{3}\pi$. **C** $\frac{32}{3}\pi$. **D** 16π . **E** 32π .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 4x^2 + 2y^3 + 3$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 4x^2 + 2y^3 + 3)$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{2(z + 4y^2 - 2y^3 - 3)}{\sqrt{64x^2 + 36y^4 + 1}}$, per definizione

$$\int_{\Sigma} \frac{2(z + 4y^2 - 2y^3 - 3)}{\sqrt{64x^2 + 36y^4 + 1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-8x, -6y^2, 1).$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{64x^2 + 36y^4 + 1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f(x, y, 4x^2 + 2y^3 + 3) = \frac{2(4x^2 + 4y^2)}{\sqrt{64x^2 + 36y^4 + 1}},$$

si ha che

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K 2 \frac{4x^2 + 4y^2}{\sqrt{64x^2 + 36y^4 + 1}} \cdot \sqrt{64x^2 + 36y^4 + 1} dx dy = 8 \int_K (x^2 + y^2) dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 8 \int_{K'} \rho^3 d\rho d\vartheta =$$

dove $K' = [0, 2] \times [0, \pi]$, e quindi si ottiene

$$= 8\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 8\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 = 32\pi.$$

La risposta corretta è E .

Quiz 4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8 (e^{1/n} - 1)}{n^9 + 3}$

- A) diverge positivamente.
- B) converge ad un numero $S < 0$.
- C) converge a zero.
- D) diverge negativamente.
- E) converge ad un numero $S > 0$.

SVOLGIMENTO

Poiché $e^x \geq 1$ per ogni $x \geq 0$ la serie è a termini positivi, quindi converge ad un numero reale $S \geq 0$ oppure diverge positivamente.

Essendo $e^x \sim 1 + x$ per $x \rightarrow 0$, si ha che

$$\frac{n^8 (e^{1/n} - 1)}{n^9 + 3} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8 (e^{1/n} - 1)}{n^9 + 3}$ converge, e poiché il termine generale della serie è maggiore di zero, la serie converge ad un numero $S > 0$.

La risposta corretta è E .

Quiz 5. Sia $f(x, y) = (x^3 - 3x)(y^2 - 9) + 2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A La funzione f non ha né punti di massimo locale né punti di minimo locale.
- B La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha punti di massimo locale.
- C La funzione f non ha punti di sella.
- D La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha punti di minimo locale.
- E La funzione f ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3(x^2 - 1)(y^2 - 9), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y(x^3 - 3x).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} (x^2 - 1)(y^2 - 9) = 0 \\ y(x^3 - 3x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1, y = \pm 3 \\ y = 0, x = 0, x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (\pm 1, 0), (0, \pm 3), (\pm\sqrt{3}, \pm 3). \end{aligned}$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 8 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x(y^2 - 9), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2(x^3 - 3x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6y(x^2 - 1).$$

Quindi

$$\begin{aligned} H_f(1, 0) &= \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, & H_f(-1, 0) &= \begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, & H_f(0, 3) &= \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ -18 & 0 \end{pmatrix}, & H_f(0, -3) &= \begin{pmatrix} 0 & 18 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_f(\pm\sqrt{3}, 3) &= \begin{pmatrix} 0 & 36 \\ 36 & 0 \end{pmatrix} & H_f(\pm\sqrt{3}, -3) &= \begin{pmatrix} 0 & -36 \\ -36 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ne segue che $(1, 0)$ è un punto di massimo locale per f , $(-1, 0)$ è un punto di minimo locale per f , mentre i punti $(0, \pm 3)$ e $(\pm\sqrt{3}, \pm 3)$ sono di sella per f . La risposta corretta è E.

Quiz 6. Sia (a_n) una successione reale e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A Se $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
- B Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a $S \in \mathbb{R}$, allora $\lim_n a_n = S$.
- C Nessuna delle altre è corretta.
- D Se $\lim_n a_n = 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
- E Se $\lim_n a_n = S \in \mathbb{R}$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a S .

SVOLGIMENTO

Per definizione la serie di (a_n) converge se la successione delle somme parziali (S_n) ammette un limite in \mathbb{R} . La risposta corretta è **A**.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y) = (\log(1+x^2) - 12xy^2, 12x^2y + \sqrt{1+y^2})$ e l'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq 2 - y^2, y \geq 0\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2$ e che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 .

Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \\ &= \int_{\Omega} 48xy dx dy. \end{aligned}$$

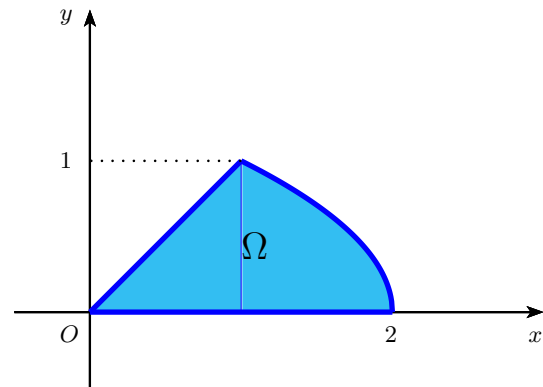
Osserviamo che Ω è un insieme x -semplice. Infatti,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2 - y^2\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} 48xy dx dy = 48 \int_0^1 y \left(\int_y^{2-y^2} x dx \right) dy = \\ &= 48 \int_0^1 y \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_y^{2-y^2} dy = 24 \int_0^1 y \left[(2-y^2)^2 - y^2 \right] dy = \\ &= 24 \int_0^1 \left[y(2-y^2)^2 - y^3 \right] dy = 24 \left[-\frac{1}{6}(2-y^2)^3 - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^1 = 22. \end{aligned}$$

La risposta corretta è 22.



Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{yz^3}{x^2 + y^2} - \cos x, \sin y - \frac{xz^3}{x^2 + y^2}, z^4 + 2z \right)$ e la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 12, 0 \leq z \leq 3\}$.

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{rot}F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{yz^3}{x^2 + y^2} - \cos x & \sin y - \frac{xz^3}{x^2 + y^2} & z^4 + 2z \end{vmatrix} = \left(\frac{3xz^2}{x^2 + y^2}, \frac{3yz^2}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{12 - x^2 - y^2} \\ 3 \leq x^2 + y^2 \leq 12. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = \sqrt{12 - x^2 - y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x^2 + y^2 \leq 12\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{12 - x^2 - y^2})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot}F(x, y, \sqrt{12 - x^2 - y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \left(\frac{3x(12 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \frac{3y(12 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, 0 \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{12 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= 3\sqrt{12 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_K \operatorname{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K 3\sqrt{12 - x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_K 3\sqrt{12 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = 3 \int_{K'} \rho \sqrt{12 - \rho^2} \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [\sqrt{3}, \sqrt{12}] \times [0, 2\pi]$ e quindi si ottiene

$$= 6\pi \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}} \rho \sqrt{12 - \rho^2} \, d\rho = 6\pi \left[-\frac{1}{3} (12 - \rho^2)^{3/2} \right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}} = 54\pi.$$

La risposta corretta è 54π .

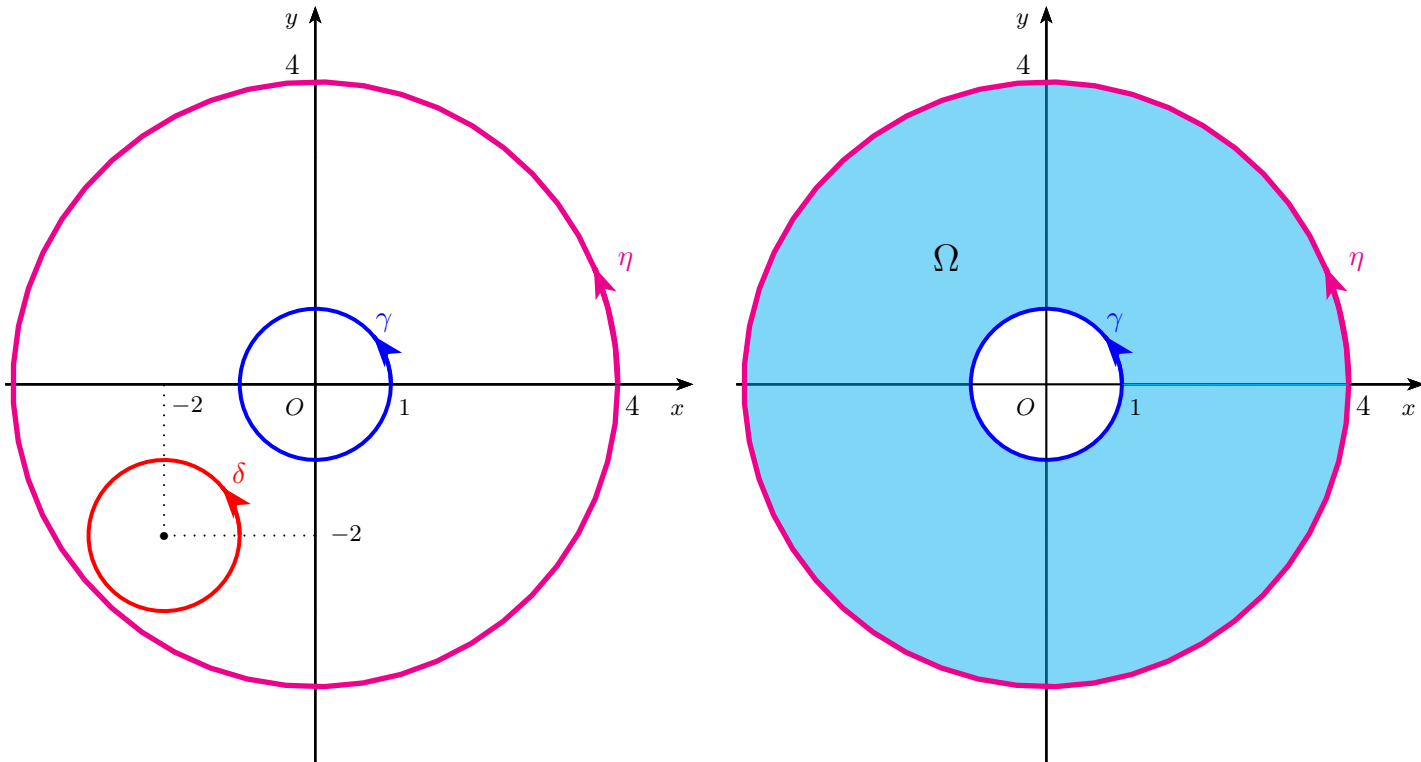
Versione V4

Quiz 1. Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1 , $F = (f_1, f_2)$ tale che $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e siano γ una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(0,0)$ e raggio 1, η una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(0,0)$ e raggio 4, e δ una parametrizzazione semplice e regolare in verso antiorario della circonferenza di centro il punto $(-2, -2)$ e raggio 1.

Posto $I_\gamma = \int_\gamma F \cdot dP$, $I_\eta = \int_\eta F \cdot dP$ e $I_\delta = \int_\delta F \cdot dP$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A $I_\gamma = 0$ e $I_\eta = I_\delta$.
- B $I_\gamma = 0$ e $I_\eta \neq I_\delta$.
- C $I_\gamma \neq I_\eta$, $I_\gamma \neq I_\delta$ e $I_\eta \neq I_\delta$.
- D $I_\delta = 0$ e $I_\gamma = I_\eta$.
- E $I_\delta = 0$ e $I_\gamma \neq I_\eta$.

SVOLGIMENTO



Il campo vettoriale F verifica la condizione necessaria per essere conservativo ma il suo dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso. Quindi non si può concludere che F sia conservativo.

Osserviamo che il sostegno di δ è tutto contenuto nel *III* quadrante esclusi gli assi, che è un sottoinsieme di $\text{dom}(F)$ ed è semplicemente connesso. Quindi F ristretto a questo sottoinsieme verifica la condizione sufficiente per essere conservativo e quindi risulta essere conservativo. Per le proprietà dei campi conservativi, l'integrale di F lungo una curva parametrica chiusa e regolare è zero. Quindi $I_\delta = 0$.

Osserviamo che l'unione dei sostegni di η e δ costituisce il bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$. Poiché $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$, se $\partial\Omega$ è orientato positivamente, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = 0$$

perché per ipotesi $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \text{dom}(F)$.

Inoltre il bordo di Ω orientato positivamente è l'unione del sostegno di η percorso in verso antiorario e di quello di γ percorso in verso orario, e quindi, tenuto conto del verso indotto da γ e η , per le proprietà degli integrali di

linea si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = I_\eta - I_\gamma.$$

Ne segue che $I_\eta = I_\gamma$. La risposta corretta è **D**.

Quiz 2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 6}{n^7 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)}$

- A** converge a zero.
- B** diverge negativamente.
- C** converge ad un numero $S > 0$.
- D** diverge positivamente.
- E** converge ad un numero $S < 0$.

SVOLGIMENTO

Poiché $\cos x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie è a termini positivi, quindi converge ad un numero reale $S \geq 0$ oppure diverge positivamente.

Essendo $\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$, si ha che

$$\frac{n^4 + 6}{n^7 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)} \sim \frac{2}{n}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 6}{n^7 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)}$ diverge.

La risposta corretta è **D**.

Quiz 3. Sia (a_n) una successione reale e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A** Nessuna delle altre è corretta.
- B** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge positivamente, allora $\lim_n a_n = +\infty$.
- C** Se $\lim_n S_n = +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge positivamente.
- D** Se $\lim_n a_n = 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
- E** Se $\lim_n a_n$ non esiste, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è indeterminata.

SVOLGIMENTO

Per definizione la serie di (a_n) diverge positivamente se la successione delle somme parziali (S_n) ha limite $+\infty$. La risposta corretta è **C**.

Quiz 4. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(8x + \frac{8x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, 6y + \frac{8y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = ((5 - t) \cos(\pi t) - \sin(\pi t), t^8 - 5t^7 + t + (t - 5)(1 - e^t))$ vale

- A -50. B -25. C -175. D -350. E 0.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{8xy}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su \mathbb{R}^2 . Denotato con f un potenziale di F su \mathbb{R}^2 , si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 8x + \frac{8x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 6y + \frac{8y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \left(8x + \frac{8x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right) dx = 4x^2 + 8\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{8y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} + c'(y) = 6y + \frac{8y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \implies c'(y) = 6y \implies c(y) = 3y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su \mathbb{R}^2 è

$$f(x, y) = 4x^2 + 8\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 3y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(5)) - f(\gamma(0)) = f(0, 5) - f(5, 0) = -25.$$

La risposta corretta è B.

Quiz 5. Sia $f(x, y) = (x^2 - 25)(y^3 - 3y) + 4$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A La funzione f non ha né punti di massimo locale né punti di minimo locale.
 B La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha punti di massimo locale.
 C La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha punti di minimo locale.
 D La funzione f non ha punti di sella.
 E La funzione f ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(y^3 - 3y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3(x^2 - 25)(y^2 - 1).$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x(y^3 - 3y) = 0 \\ (x^2 - 25)(y^2 - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, y = 0, y = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm 5, y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\iff (x, y) = (0, \pm 1), (\pm 5, 0), (\pm 5, \pm\sqrt{3}).$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 8 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2(y^3 - 3y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y(x^2 - 25), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6x(y^2 - 1).$$

Quindi

$$H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -150 \end{pmatrix}, \quad H_f(0, -1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 150 \end{pmatrix}, \quad H_f(5, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -30 \\ -30 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(-5, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 30 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_f(5, \pm\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 60 \\ 60 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(-5, \pm\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & -60 \\ -60 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 1)$ è un punto di massimo locale per f , $(0, -1)$ è un punto di minimo locale per f , mentre i punti $(\pm 5, 0)$ e $(\pm 5, \pm\sqrt{3})$ sono di sella per f . La risposta corretta è **E**.

Quiz 6. Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2y^2 - x^3 + 6, x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0\}$.

L'integrale di superficie $\int_{\Sigma} \frac{z + 2x^2 + x^3 - 6}{\sqrt{9x^4 + 16y^2 + 1}} d\sigma$ vale

A $\frac{81}{2}\pi$. **B** $\frac{27}{2}\pi$. **C** 36π . **D** 18π . **E** 81π .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 2y^2 - x^3 + 6$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 2y^2 - x^3 + 6)$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z + 2x^2 + x^3 - 6}{\sqrt{9x^4 + 16y^2 + 1}}$, per definizione

$$\int_{\Sigma} \frac{z + 2x^2 + x^3 - 6}{\sqrt{9x^4 + 16y^2 + 1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (3x^2, -4y, 1).$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{9x^4 + 16y^2 + 1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f(x, y, 2y^2 - x^3 + 6) = \frac{2x^2 + 2y^2}{\sqrt{9x^4 + 16y^2 + 1}},$$

si ha che

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K \frac{2x^2 + 2y^2}{\sqrt{9x^4 + 16y^2 + 1}} \cdot \sqrt{9x^4 + 16y^2 + 1} dx dy = 2 \int_K (x^2 + y^2) dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 2 \int_{K'} \rho^3 d\rho d\vartheta =$$

dove $K' = [0, 3] \times [\pi/2, 3\pi/2]$, e quindi si ottiene

$$= 2\pi \int_0^3 \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^3 = \frac{81}{2} \pi.$$

La risposta corretta è A.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y) = (\sqrt{1+x^2} - 12xy^2, 12x^2y + \log(1+y^2))$ e l'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y \leq x \leq 3 - y^2, y \geq 0\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2$ e che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 .

Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \\ &= \int_{\Omega} 48xy dx dy. \end{aligned}$$

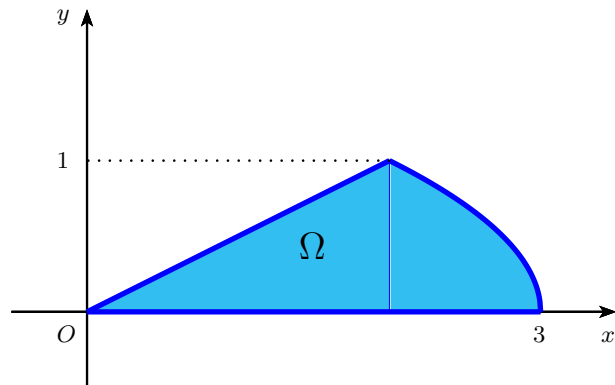
Osserviamo che Ω è un insieme y -semplice. Infatti,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 3 - x^2\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} 48xy dx dy = 48 \int_0^1 x \left(\int_{2x}^{3-x^2} y dy \right) dx = \\ &= 48 \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{2x}^{3-x^2} dx = 24 \int_0^1 x \left[(3-x^2)^2 - 4x^2 \right] dx = \\ &= 24 \int_0^1 \left[x(3-x^2)^2 - 4x^3 \right] dx = 24 \left[-\frac{1}{6} (3-x^2)^3 - x^4 \right]_0^1 = 52. \end{aligned}$$

La risposta corretta è 52.



Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{yz^3}{18(x^2+y^2)} + e^x, \cos y - \frac{xz^3}{18(x^2+y^2)}, z^6 - 4z \right)$ e la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 48, 0 \leq z \leq 6\}$.

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{rot}F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{yz^3}{18(x^2+y^2)} + e^x & \cos y - \frac{xz^3}{18(x^2+y^2)} & z^6 - 4z \end{vmatrix} = \left(\frac{xz^2}{6(x^2+y^2)}, \frac{yz^2}{6(x^2+y^2)}, 0 \right).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 48 \\ 0 \leq z \leq 6 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{48 - x^2 - y^2} \\ 12 \leq x^2 + y^2 \leq 48. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = \sqrt{48 - x^2 - y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 12 \leq x^2 + y^2 \leq 48\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{48 - x^2 - y^2})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F(x, y, \sqrt{48 - x^2 - y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \left(\frac{x(48 - x^2 - y^2)}{6(x^2 + y^2)}, \frac{y(48 - x^2 - y^2)}{6(x^2 + y^2)}, 0 \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{48 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{48 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K \frac{1}{6} \sqrt{48 - x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \frac{1}{6} \int_K \sqrt{48 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = \frac{1}{6} \int_{K'} \rho \sqrt{48 - \rho^2} \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [\sqrt{12}, \sqrt{48}] \times [0, 2\pi]$ e quindi si ottiene

$$= \frac{1}{3} \pi \int_{\sqrt{12}}^{\sqrt{48}} \rho \sqrt{48 - \rho^2} \, d\rho = \frac{1}{3} \pi \left[-\frac{1}{3} (48 - \rho^2)^{3/2} \right]_{\sqrt{12}}^{\sqrt{48}} = 24\pi.$$

La risposta corretta è 24π .
