Versione: V1

Quiz 1. Il volume di $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x^2 + y^2 + y^4 \le z \le x^2 + y^4 + 16, \ x^2 + y^2 \ge 4, \ x \ge 0\}$ vale

$\boxed{A}$ 18π. $\boxed{B}$ 72π. $\boxed{C}$ 36π. $\boxed{D}$ 3π. $\boxed{E}$ 9π.

SVOLGIMENTO

Il volume di Ω è

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx\, dy\, dz =$$

integrando per fili parallelli all'asse z si ottiene

$$= \int_D \left(\int_{2x^2+y^2+y^4}^{x^2+y^4+16} 1\, dz \right) dx\, dy = \int_D \left(16 - x^2 - y^2\right) dx\, dy,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x^2 + y^2 + y^4 \le x^2 + y^4 + 16, \ x^2 + y^2 \ge 4, \ x \ge 0\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4 \le x^2 + y^2 \le 16, \ x \ge 0\}.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$m(\Omega) = \int_D \left(16 - x^2 - y^2\right) dx\, dy = \int_{D'} \rho\left(16 - \rho^2\right) d\rho\, d\vartheta =$$

con $D' = [2,4] \times [-\pi/2, \pi/2]$, da cui segue

$$= \pi \int_2^4 \rho\left(16 - \rho^2\right) d\rho = \pi \left[-\frac{1}{4}\left(16 - \rho^2\right)^2 \right]_2^4 = 36\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{C}$.

Quiz 2. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 2 + 3\log\left(1 + x^2 + y^2\right), \ x^2 + y^2 \le 9\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(y\left[3\log\left(1 + x^2 + y^2\right) - z\right], \ x\left[z - 3\log\left(1 + x^2 + y^2\right)\right], \ 4\sqrt{x^2 + y^2} \right)$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z vale

$\boxed{A}$ 9π.

$\boxed{B}$ 36π.

$\boxed{C}$ 72π.

$\boxed{D}$ 0.

$\boxed{E}$ 18π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 2 + 3\log\left(1 + x^2 + y^2\right)$, dove

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 9\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, 2 + 3\log\left(1 + x^2 + y^2\right)\right).$$

Per definizione

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-\frac{6x}{1+x^2+y^2},\ -\frac{6y}{1+x^2+y^2},\ 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi consideriamo

$$N(x,y) = N_\sigma(x,y) = \left(-\frac{6x}{1+x^2+y^2},\ -\frac{6y}{1+x^2+y^2},\ 1\right).$$

Ne segue che

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = F\left(x, y, 2+3\log\left(1+x^2+y^2\right)\right) \cdot \left(-\frac{6x}{1+x^2+y^2},\ -\frac{6x}{1+x^2+y^2},\ 1\right) =$$

$$= \left(-2y,\ 2x,\ 4\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \left(-\frac{6x}{1+x^2+y^2},\ -\frac{6y}{1+x^2+y^2},\ 1\right) = 4\sqrt{x^2+y^2}$$

Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy = \int_K 4\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 4 \int_{K'} \rho^2 \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [0,3] \times [0, 2\pi]$, e quindi si ottiene

$$= 8\pi \int_0^3 \rho^2 \, d\rho = 8\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^3 = 72\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 3. Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $|a| < \frac{1}{4}$. La serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-4)^n \, a^n$

$\boxed{\text{A}}$ converge al numero $\frac{16a^2}{1-4a}$.

$\boxed{\text{B}}$ diverge positivamente.

$\boxed{\text{C}}$ converge al numero $\frac{1}{1-4a}$.

$\boxed{\text{D}}$ converge al numero $\frac{16a^2}{1+4a}$.

$\boxed{\text{E}}$ converge al numero $\frac{1}{1+4a}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-4)^n \, a^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-4a)^n.$$

Si tratta quindi di una serie geometrica di ragione $b = -4a$. Poiché la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge al numero $\frac{1}{1-b}$ se e solo se $|b| < 1$, ed essendo $|a| < \frac{1}{4}$ si ha che $|-4a| = 4|a| < 1$, ne segue che la serie data converge e la sua somma è

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-4a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-4a)^n - (1-4a) = \frac{1}{1+4a} - (1-4a) = \frac{16a^2}{1+4a}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 4. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Se non esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^1 tale che $\mathrm{rot}G = F$ in Ω, allora F non è indivergente.

$\boxed{\text{B}}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{\text{C}}$ Se Ω è connesso per archi e F è indivergente, allora esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^1 tale che $\mathrm{rot}G = F$ in Ω.

$\boxed{\text{D}}$ Se Ω è stellato e F è irrotazionale, allora esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^1 tale che $\mathrm{rot}G = F$ in Ω.

$\boxed{\text{E}}$ Se Ω è stellato e F è indivergente, allora esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^1 tale che $\mathrm{rot}G = F$ in Ω.

SVOLGIMENTO

Per la Condizione sufficiente affinché un campo vettoriale ammetta potenziale vettore, se Ω è stellato e F è indivergente, allora F ammette un potenziale vettore di classe C^1, e quindi esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^1 tale che $\mathrm{rot}G = F$ in Ω. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 5. Siano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che il suo sviluppo di Taylor centrato in (x_0, y_0) arrestato al secondo ordine è

$$f(x, y) = 1 + a(x - x_0) - b(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 + o\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right), \text{ per } (x, y) \to (x_0, y_0), \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$, se $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

$\boxed{\text{B}}$ Se $a = 0$, $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{\text{C}}$ Se $a = 0$, $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{\text{D}}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$, se $bc > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{\text{E}}$ Se $a = 0$, $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

SVOLGIMENTO

Dallo sviluppo di Taylor segue che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = -2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 2c, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Ne segue che se $a \neq 0$ il punto (x_0, y_0) non è stazionario e quindi non è né di estremo né di sella per f. Quindi le risposte $\boxed{\text{A}}$ e $\boxed{\text{D}}$ sono errate.

Se $a = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto stazionario per f e in tal caso la matrice Hessiana di f in (x_0, y_0) è

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -2b & 0 \\ 0 & 2c \end{pmatrix}.$$

Ne segue che:

- se $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f;
- se $b > 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f;
- se $b < 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f;
- se $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 6. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \Big(6(x-y),\ 3(x+y)\Big)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^2 - t,\ t^2 + t\right)$ vale

$\boxed{\text{A}}$ 0.

$\boxed{\text{B}}$ 6.

$\boxed{\text{C}}$ 12.

$\boxed{\text{D}}$ 3.

$\boxed{\text{E}}$ 9.

SVOLGIMENTO

Per definizione l'integrale di linea di F lungo γ è dato da

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\left(t^2 - t,\ t^2 + t\right) \cdot (2t-1,\ 2t+1) = \left(-12t, 6t^2\right) \cdot (2t-1,\ 2t+1) = 12t^3 - 18t^2 + 12t,$$

si ottiene

$$= \int_0^1 \left(12t^3 - 18t^2 + 12t\right)\, dt = \left[3t^4 - 6t^3 + 6t^2\right]_0^1 = 3.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Domanda 7. Si considerino l'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ \ x,y,z \ge 0\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(3x^2yz + e^y - \sin z,\ e^x + \cos z - 3xy^2z,\ e^{xy} + \frac{4}{3}\log\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, F è di classe C^1 su $\mathrm{dom}\,(f)$ e $\Omega \subseteq \mathrm{dom}\,(f)$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\mathrm{div}F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$.

Quindi $\mathrm{div}F(x,y,z) = \dfrac{8z}{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_\Omega \frac{8z}{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}\, dx\, dy\, dz.$$

Passiamo in coordinate sferiche con la colatitudine misurata dall'asse z. Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = \rho\cos\vartheta \end{cases} \qquad \rho \ge 0,\ 0 \le \vartheta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad |\mathrm{det}J_\Phi(\rho,\vartheta,\varphi)| = \rho^2 \sin\vartheta.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{8}{3}\int_\Omega \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{8}{3}\int_{\Omega'} \rho\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi,$$

dove $\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 :\ 2 \le \rho \le 4,\ \ 0 \le \vartheta \le \pi/2,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/2\right\}$.

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \frac{8}{3}\int_{\Omega'} \rho\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi\left(\int_2^4 \rho\, d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_2^4 \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = 4\pi.$$

La risposta corretta è 4π.

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; z = 1 - x^2 - y^2, \;\; y \le 0, \;\; z \ge 0\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(5x^2\left(x^2+y^2\right) + xz, \; yz - 5y^2\left(x^2+y^2\right), \; xy\left(x^2+y^2\right) + z - 1\right)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

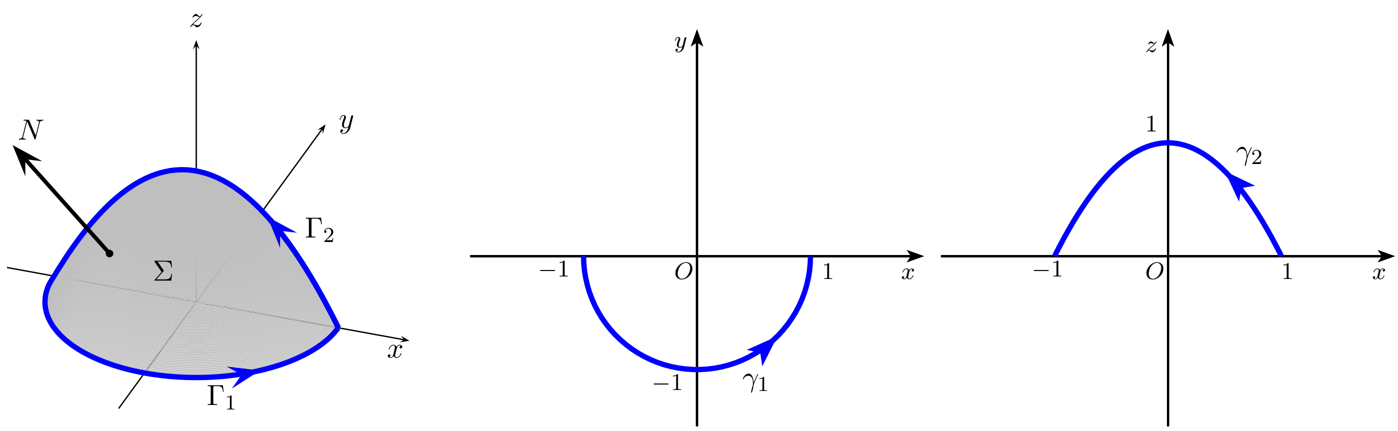
SVOLGIMENTO

Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP.$$

Osserviamo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + y^2 = 1, \;\; z = 0, \;\; y \le 0\right\}, \qquad \Gamma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; z = 1 - x^2, \;\; y = 0, \;\; -1 \le x \le 1\right\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve parametriche che parametrizzano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 in modo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sia percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ che deve formare un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Si ha che $\gamma_1 : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_\pi^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt,$$

dove

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = \left(5\cos^2 t, -5\sin^2 t, \cos t \sin t - 1\right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) =$$

$$= -5\left(\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t\right).$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP == \int_\pi^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt = -5\int_\pi^{2\pi} \left(\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t\right)\, dt = -5\left[-\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_\pi^{2\pi} = \frac{10}{3}.$$

Inoltre si ha che $\gamma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ è $\gamma_2(t) = (-t, 0, 1 - t^2)$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-1}^1 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt,$$

dove

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F(-t, 0, 1-t^2) \cdot (-1, 0, -2t) = \left(5t^4 - t + t^3, 0, -t^2\right) \cdot (-1, 0, -2t) = -5t^4 + t + t^3.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-1}^{1} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \left(-5t^4 + t + t^3\right)\, dt = \left[-t^5 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4\right]_{-1}^{1} = -2.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}.$$

La risposta corretta è $\frac{4}{3}$.

Versione V2

Quiz 1. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 7 + 2\log\left(1+x^2+y^2\right), \ x^2+y^2 \le 4\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(y\left[z - 2\log\left(1+x^2+y^2\right)\right], \ x\left[2\log\left(1+x^2+y^2\right) - z\right], \ 9\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z vale

A 0.

B 48π.

C 12π.

D 96π.

E 24π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 7 + 2\log\left(1+x^2+y^2\right)$, dove

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 4\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, 7 + 2\log\left(1+x^2+y^2\right)\right).$$

Per definizione

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-\frac{4x}{1+x^2+y^2}, \ -\frac{4y}{1+x^2+y^2}, \ 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi consideriamo

$$N(x,y) = N_\sigma(x,y) = \left(-\frac{4x}{1+x^2+y^2}, \ -\frac{4y}{1+x^2+y^2}, \ 1\right).$$

Ne segue che

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = F\left(x, y, 7 + 2\log\left(1+x^2+y^2\right)\right) \cdot \left(-\frac{4x}{1+x^2+y^2}, \ -\frac{4x}{1+x^2+y^2}, \ 1\right) =$$

$$= \left(7y, \ -7x, \ 9\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \left(-\frac{4x}{1+x^2+y^2}, \ -\frac{4y}{1+x^2+y^2}, \ 1\right) = 9\sqrt{x^2+y^2}$$

Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy = \int_K 9\sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 9 \int_{K'} \rho^2 \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [0,2] \times [0, 2\pi]$, e quindi si ottiene

$$= 18\pi \int_0^2 \rho^2 \, d\rho = 18\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^2 = 48\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 2. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Se F è indivergente, allora esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^2 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω.

$\boxed{\text{B}}$ Se esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^2 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω, allora F è irrotazionale.

$\boxed{\text{C}}$ Se esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^2 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω, allora F è indivergente.

$\boxed{\text{D}}$ Se non esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^2 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω, allora F non è indivergente.

$\boxed{\text{E}}$ Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per la Condizione necessaria affinché un campo vettoriale ammetta potenziale vettore, se F ammette un potenziale vettore di classe C^2, e quindi esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^2 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω, allora F è indivergente. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \Big(4(x + y),\ 8(y - x)\Big)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^2 + t,\ t^2 - t\right)$ vale

$\boxed{\text{A}}$ 0.

$\boxed{\text{B}}$ 16.

$\boxed{\text{C}}$ 2.

$\boxed{\text{D}}$ 4.

$\boxed{\text{E}}$ 8.

SVOLGIMENTO

Per definizione l'integrale di linea di F lungo γ è dato da

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\left(t^2 + t,\ t^2 - t\right) \cdot (2t + 1,\ 2t - 1) = \left(8t^2, -16t\right) \cdot (2t + 1,\ 2t - 1) = 16t^3 - 24t^2 + 16t,$$

si ottiene

$$= \int_0^1 \left(16t^3 - 24t^2 + 16t\right)\, dt = \left[4t^4 - 8t^3 + 8t^2\right]_0^1 = 4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 4. Il volume di $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ x^4 + x^2 + 2y^2 \le z \le x^4 + y^2 + 9,\ \ x^2 + y^2 \ge 1,\ \ y \ge 0\right\}$ vale

$\boxed{\text{A}}$ 8π.

$\boxed{\text{B}}$ 2π.

$\boxed{\text{C}}$ 4π.

$\boxed{\text{D}}$ 32π.

$\boxed{\text{E}}$ 16π.

SVOLGIMENTO

Il volume di Ω è

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx\, dy\, dz =$$

integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$= \int_D \left(\int_{x^4+x^2+2y^2}^{x^4+y^2+9} 1\, dz \right) dx\, dy = \int_D \left(9 - x^2 - y^2\right) dx\, dy,$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^4 + x^2 + 2y^2 \le x^4 + y^2 + 9, \; x^2 + y^2 \ge 1, \; y \ge 0\right\} =$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \le x^2 + y^2 \le 9, \; y \ge 0\right\}.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$m(\Omega) = \int_D \left(9 - x^2 - y^2\right) dx\, dy = \int_{D'} \rho\left(9 - \rho^2\right) d\rho\, d\vartheta =$$

con $D' = [1,3] \times [0,\pi]$, da cui segue

$$= \pi \int_1^3 \rho\left(9 - \rho^2\right) d\rho = \pi \left[-\frac{1}{4}\left(9 - \rho^2\right)^2 \right]_1^3 = 16\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 5. Siano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che il suo sviluppo di Taylor centrato in (x_0, y_0) arrestato al secondo ordine è

$$f(x,y) = 1 + a(y - y_0) + b(x - x_0)^2 - c(y - y_0)^2 + o\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right), \text{ per } (x,y) \to (x_0,y_0), \text{ con } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$, se $bc > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{\text{B}}$ Se $a = 0$, $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{\text{C}}$ Se $a = 0$, $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{\text{D}}$ Se $a = 0$, $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

$\boxed{\text{E}}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$, se $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

SVOLGIMENTO

Dallo sviluppo di Taylor segue che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = 2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = -2c, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Ne segue che se $a \ne 0$ il punto (x_0, y_0) non è stazionario e quindi non è né di estremo né di sella per f. Quindi le risposte $\boxed{\text{A}}$ ed $\boxed{\text{E}}$ sono errate.

Se $a = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto stazionario per f e in tal caso la matrice Hessiana di f in (x_0, y_0) è

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix}.$$

Ne segue che:

- se $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f;
- se $b > 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f;
- se $b < 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f;
- se $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 6. Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $|a| < \dfrac{1}{5}$. La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-5)^n\, a^n$

$\boxed{\text{A}}$ converge al numero $\dfrac{25a^2}{1-5a}$.

$\boxed{\text{B}}$ converge al numero $\dfrac{1}{1-5a}$.

$\boxed{\text{C}}$ diverge positivamente.

$\boxed{\text{D}}$ converge al numero $\dfrac{25a^2}{1+5a}$.

$\boxed{\text{E}}$ converge al numero $\dfrac{1}{1+5a}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-5)^n\, a^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-5a)^n.$$

Si tratta quindi di una serie geometrica di ragione $b = -5a$. Poiché la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge al numero $\dfrac{1}{1-b}$ se e solo se $|b| < 1$, ed essendo $|a| < \dfrac{1}{5}$ si ha che $|-5a| = 5|a| < 1$, ne segue che la serie data converge e la sua somma è

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-5a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-5a)^n - (1-5a) = \frac{1}{1+5a} - (1-5a) = \frac{25a^2}{1+5a}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Domanda 7. Si considerino l'insieme $\Omega = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 9 \le x^2+y^2+z^2 \le 36,\ \ x,y,z \ge 0\big\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(e^z + \sin y - 4x^2yz,\ 4xy^2z + e^z - \cos x,\ e^{xy} + \dfrac{4}{9}\log\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, F è di classe C^1 su $\mathrm{dom}\,(f)$ e $\Omega \subseteq \mathrm{dom}\,(f)$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\mathrm{div}F(x,y,z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$.

Quindi $\mathrm{div}F(x,y,z) = \dfrac{8z}{9\,(x^2+y^2+z^2)}$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega} \frac{8z}{9\,(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz.$$

Passiamo in coordinate sferiche con la colatitudine misurata dall'asse z. Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = \rho\cos\vartheta \end{cases} \qquad \rho \ge 0,\ 0 \le \vartheta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad |\mathrm{det} J_\Phi(\rho,\vartheta,\varphi)| = \rho^2 \sin\vartheta.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{8}{9}\int_{\Omega} \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{8}{9}\int_{\Omega'} \rho\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi,$$

dove $\Omega' = \{(\rho,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : \ 3 \le \rho \le 6, \ 0 \le \vartheta \le \pi/2, \ 0 \le \varphi \le \pi/2\}$.

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \frac{8}{9} \int_{\Omega'} \rho \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{4}{9}\pi \left(\int_3^6 \rho \, d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \right) =$$

$$= \frac{4}{9}\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2 \right]_3^6 \left[\frac{1}{2} \sin^2\vartheta \right]_0^{\pi/2} = 3\pi.$$

La risposta corretta è 3π.

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 - x^2 - y^2, \ x \ge 0, \ z \ge 0\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(xz + 3x^2\left(x^2+y^2\right), \ yz + 3y^2\left(x^2+y^2\right), \ xy\left(x^2+y^2\right) + z - 1\right)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

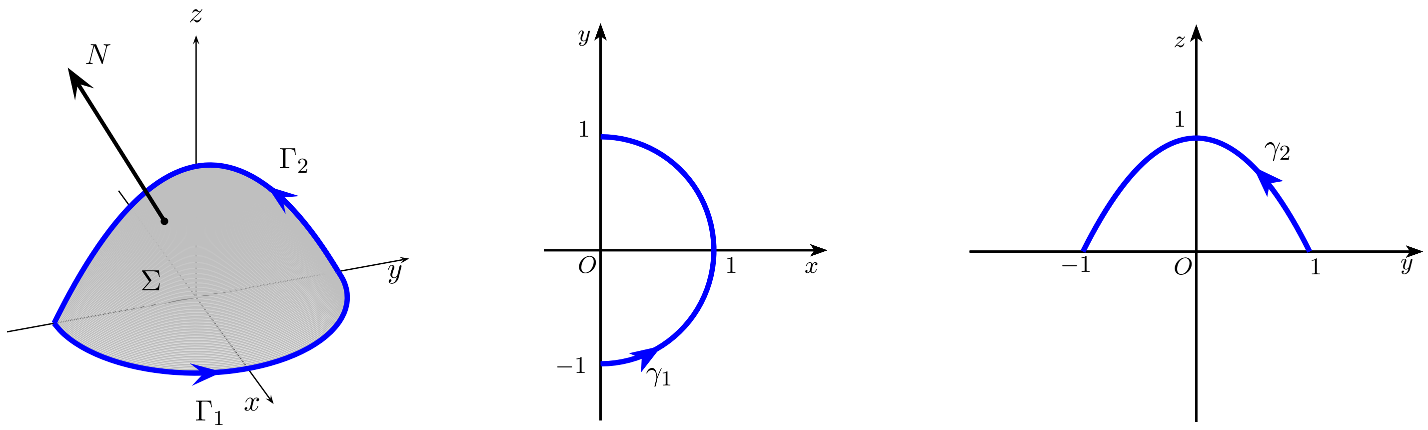
SVOLGIMENTO

Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP.$$

Osserviamo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = 1, \ z = 0, \ x \ge 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 - y^2, \ x = 0, \ -1 \le y \le 1\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve parametriche che parametrizzano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 in modo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sia percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ che deve formare un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Si ha che $\gamma_1 : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ è $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt,$$

dove

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = \left(3\cos^2 t, 3\sin^2 t, \cos t \sin t - 1\right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) =$$

$$= 3\cos^2 t \sin t + 3\sin^2 t \cos t.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_1} F\cdot dP == \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(3\cos^2 t\sin t + 3\sin^2 t\cos t\right)\,dt = \left[-\cos^3 t+\sin^3 t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2.$$

Inoltre si ha che $\gamma_2 : [-1,1]\to\mathbb{R}^3$ è $\gamma_2(t) = (0,-t,1-t^2)$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} F\cdot dP = \int_{-1}^{1} F(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt,$$

dove

$$F(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t) = F(0,-t,1-t^2)\cdot(0,-1,-2t) = \left(0,3t^4-t+t^3,-t^2\right)\cdot(0,-1,-2t) = -3t^4+t+t^3.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_2} F\cdot dP = \int_{-1}^{1} F(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt = \int_{-1}^{1}\left(-3t^4+t+t^3\right)\,dt = \left[-\frac{3}{5}t^5+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t^4\right]_{-1}^{1} = -\frac{6}{5}.$$

In conclusione si ha che

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F\cdot n\,d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F\cdot dP = \int_{\gamma_1} F\cdot dP + \int_{\gamma_2} F\cdot dP = 2-\frac{6}{5} = \frac{4}{5}.$$

La risposta corretta è $\frac{4}{5}$.

Versione V3

Quiz 1. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \Big(3(x-y),\ 6(x+y)\Big)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \big(t^2 - t,\ t^2 + t\big)$ vale

$\boxed{A}$ 0. $\boxed{B}$ 27. $\boxed{C}$ 36. $\boxed{D}$ 9. $\boxed{E}$ 18.

SVOLGIMENTO

Per definizione l'integrale di linea di F lungo γ è dato da

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\left(t^2 - t,\ t^2 + t\right) \cdot (2t-1,\ 2t+1) = \left(-6t, 12t^2\right) \cdot (2t-1,\ 2t+1) = 24t^3 + 6t,$$

si ottiene

$$= \int_0^1 \left(24t^3 + 6t\right)\, dt = \left[6t^4 + 3t^2\right]_0^1 = 9.$$

La risposta corretta è $\boxed{D}$.

Quiz 2. Siano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che il suo sviluppo di Taylor centrato in (x_0, y_0) arrestato al secondo ordine è

$$f(x,y) = 1 + a(x - x_0) - b(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 + o\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right), \text{ per } (x,y) \to (x_0, y_0), \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $a = 0$, $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{B}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$, se $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

$\boxed{C}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$, se $bc > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{D}$ Se $a = 0$, $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{E}$ Se $a = 0$, $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

SVOLGIMENTO

Dallo sviluppo di Taylor segue che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = -2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 2c, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Ne segue che se $a \neq 0$ il punto (x_0, y_0) non è stazionario e quindi non è né di estremo né di sella per f. Quindi le risposte $\boxed{B}$ e $\boxed{C}$ sono errate.

Se $a = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto stazionario per f e in tal caso la matrice Hessiana di f in (x_0, y_0) è

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -2b & 0 \\ 0 & 2c \end{pmatrix}.$$

Ne segue che:

- se $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f;
- se $b > 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f;
- se $b < 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f;
- se $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Se non esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^1 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω, allora F non è indivergente.

$\boxed{\text{B}}$ Se Ω è connesso per archi e F è indivergente, allora esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^1 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω.

$\boxed{\text{C}}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{\text{D}}$ Se Ω è stellato e F è irrotazionale, allora esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^1 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω.

$\boxed{\text{E}}$ Se Ω è stellato e F è indivergente, allora esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^1 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω.

SVOLGIMENTO

Per la Condizione sufficiente affinché un campo vettoriale ammetta potenziale vettore, se Ω è stellato e F è indivergente, allora F ammette un potenziale vettore di classe C^1, e quindi esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^1 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 4. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 3 + 5\log\left(1 + x^2 + y^2\right),\ x^2 + y^2 \le 9\right\}$ e il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(y\left[5\log\left(1 + x^2 + y^2\right) - z\right],\ x\left[z - 5\log\left(1 + x^2 + y^2\right)\right],\ 5\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z vale

$\boxed{\text{A}}$ 180π.

$\boxed{\text{B}}$ 90π.

$\boxed{\text{C}}$ 9π.

$\boxed{\text{D}}$ 3π.

$\boxed{\text{E}}$ 45π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 3 + 5\log\left(1 + x^2 + y^2\right)$, dove

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 9\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = \left(x, y, 3 + 5\log\left(1 + x^2 + y^2\right)\right).$$

Per definizione

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y)\, dx\, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x, y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) = \left(-\frac{10x}{1 + x^2 + y^2},\ -\frac{10y}{1 + x^2 + y^2},\ 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi consideriamo

$$N(x, y) = N_\sigma(x, y) = \left(-\frac{10x}{1 + x^2 + y^2},\ -\frac{10y}{1 + x^2 + y^2},\ 1\right).$$

Ne segue che

$$F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) = F\left(x, y, 3 + 5\log\left(1 + x^2 + y^2\right)\right) \cdot \left(-\frac{10x}{1 + x^2 + y^2},\ -\frac{10x}{1 + x^2 + y^2},\ 1\right) =$$

$$= \left(-3y,\ 3x,\ 5\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \left(-\frac{10x}{1+x^2+y^2},\ -\frac{10y}{1+x^2+y^2},\ 1\right) = 5\sqrt{x^2+y^2}$$

Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy = \int_K 5\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 5 \int_{K'} \rho^2 \, d\rho\, d\vartheta =$$

dove $K' = [0,3] \times [0, 2\pi]$, e quindi si ottiene

$$= 10\pi \int_0^3 \rho^2 \, d\rho = 10\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^3 = 90\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 5. Il volume di $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ 3x^2 + y^2 + y^4 \le z \le 2x^2 + y^4 + 16,\ \ x^2+y^2 \ge 4,\ \ x \le 0\right\}$ vale

$\boxed{\text{A}}$ 72π.

$\boxed{\text{B}}$ 18π.

$\boxed{\text{C}}$ 0.

$\boxed{\text{D}}$ 9π.

$\boxed{\text{E}}$ 36π.

SVOLGIMENTO

Il volume di Ω è

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dx\, dy\, dz =$$

integrando per fili parallelli all'asse z si ottiene

$$= \int_D \left(\int_{3x^2+y^2+y^4}^{2x^2+y^4+16} 1\, dz\right) dx\, dy = \int_D \left(16 - x^2 - y^2\right) dx\, dy,$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 3x^2 + y^2 + y^4 \le 2x^2 + y^4 + 16,\ \ x^2+y^2 \ge 4,\ \ x \le 0\right\} =$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ \ x \le 0\right\}.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$m(\Omega) = \int_D \left(16 - x^2 - y^2\right) dx\, dy = \int_{D'} \rho\left(16 - \rho^2\right) d\rho\, d\vartheta =$$

con $D' = [2,4] \times [\pi/2, 3/2\pi]$, da cui segue

$$= \pi \int_2^4 \rho\left(16-\rho^2\right) d\rho = \pi \left[-\frac{1}{4}\left(16-\rho^2\right)^2\right]_2^4 = 36\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 6. Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $|a| < \frac{1}{2}$. La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-2)^n\, a^n$

$\boxed{\text{A}}$ diverge positivamente.

$\boxed{\text{B}}$ converge al numero $\dfrac{4a^2}{1-2a}$.

$\boxed{\text{C}}$ converge al numero $\dfrac{1}{1+2a}$.

$\boxed{\text{D}}$ converge al numero $\dfrac{1}{1-2a}$.

$\boxed{\text{E}}$ converge al numero $\dfrac{4a^2}{1+2a}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-2)^n\, a^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-2a)^n.$$

Si tratta quindi di una serie geometrica di ragione $b = -2a$. Poiché la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge al numero $\dfrac{1}{1-b}$ se e solo se $|b| < 1$, ed essendo $|a| < \dfrac{1}{2}$ si ha che $|-2a| = 2|a| < 1$, ne segue che la serie data converge e la sua somma è

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-2a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2a)^n - (1-2a) = \frac{1}{1+2a} - (1-2a) = \frac{4a^2}{1+2a}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Domanda 7. Si considerino l'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16,\ \ x,y,z \ge 0\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(6x^2yz + e^y - \cos z,\ e^x + \sin z - 6xy^2z,\ -e^{xy} + \dfrac{8}{3}\log\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\operatorname{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, F è di classe C^1 su $\operatorname{dom}(f)$ e $\Omega \subseteq \operatorname{dom}(f)$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\operatorname{div}F(x,y,z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$.

Quindi $\operatorname{div}F(x,y,z) = \dfrac{16z}{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega} \frac{16z}{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}\, dx\, dy\, dz.$$

Passiamo in coordinate sferiche con la colatitudine misurata dall'asse z. Si ha che

$$\Phi :\quad \begin{cases} x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\vartheta \end{cases} \qquad \rho \ge 0,\ 0 \le \vartheta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta,\varphi)| = \rho^2\sin\vartheta.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{16}{3}\int_{\Omega} \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{16}{3}\int_{\Omega'} \rho\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi,$$

dove $\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 :\ 2 \le \rho \le 4,\ \ 0 \le \vartheta \le \pi/2,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/2\right\}$.

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\, d\sigma = \frac{16}{3}\int_{\Omega'} \rho\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{8}{3}\pi\left(\int_2^4 \rho\, d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta\right) =$$

$$= \frac{8}{3}\pi\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_2^4 \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = 8\pi.$$

La risposta corretta è 8π.

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; z = 1 - x^2 - y^2, \;\; y \le 0, \;\; z \ge 0\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(10x^2\left(x^2+y^2\right) + xz,\; yz - 10y^2\left(x^2+y^2\right),\; xy\left(x^2+y^2\right) + z - 1\right)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

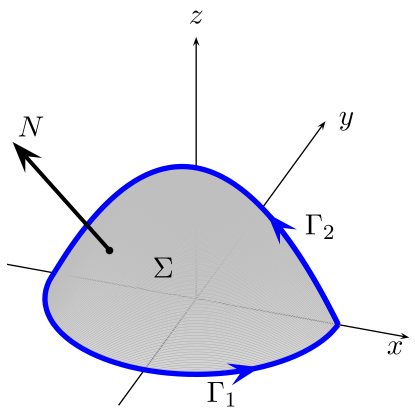
SVOLGIMENTO

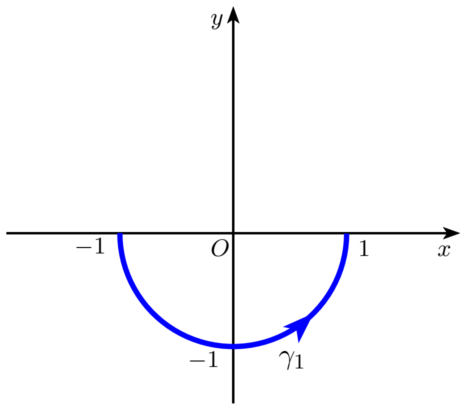
Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

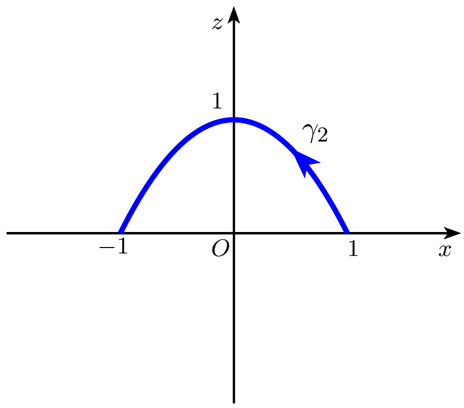
$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP.$$

Osserviamo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2+y^2 = 1, \;\; z = 0, \;\; y \le 0\right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; z = 1 - x^2, \;\; y = 0, \;\; -1 \le x \le 1\right\}.$$







Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve parametriche che parametrizzano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 in modo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sia percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ che deve formare un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Si ha che $\gamma_1 : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_\pi^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt,$$

dove

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = \left(10\cos^2 t, -10\sin^2 t, \cos t \sin t - 1\right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) =$$

$$= -10\left(\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t\right).$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP == \int_\pi^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt = -10 \int_\pi^{2\pi} \left(\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t\right) \, dt = -10\left[-\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_\pi^{2\pi} = \frac{20}{3}.$$

Inoltre si ha che $\gamma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ è $\gamma_2(t) = (-t, 0, 1 - t^2)$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-1}^1 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, dt,$$

dove

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F(-t, 0, 1-t^2) \cdot (-1, 0, -2t) = \left(10t^4 - t + t^3, 0, -t^2\right) \cdot (-1, 0, -2t) = -10t^4 + t + t^3.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-1}^{1} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \left(-10t^4 + t + t^3\right)\, dt = \left[-2t^5 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4\right]_{-1}^{1} = -4.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \frac{20}{3} - 4 = \frac{8}{3}.$$

La risposta corretta è $\dfrac{8}{3}$.

Versione V4

Quiz 1. Il volume di $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x^4 + x^2 + 3y^2 \le z \le x^4 + 2y^2 + 9, \ \ x^2 + y^2 \ge 1, \ \ y \le 0\}$ vale

A 4π.

B 8π.

C 2π.

D 32π.

E 16π.

SVOLGIMENTO

Il volume di Ω è

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dx \, dy \, dz =$$

integrando per fili parallelli all'asse z si ottiene

$$= \int_D \left(\int_{x^4+x^2+3y^2}^{x^4+2y^2+9} 1 \, dz \right) dx \, dy = \int_D \left(9 - x^2 - y^2\right) \, dx \, dy,$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^4 + x^2 + 3y^2 \le x^4 + 2y^2 + 9, \ \ x^2 + y^2 \ge 1, \ \ y \le 0\right\} =$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ 1 \le x^2 + y^2 \le 9, \ \ y \le 0\right\}.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$m(\Omega) = \int_D \left(9 - x^2 - y^2\right) \, dx \, dy = \int_{D'} \rho \left(9 - \rho^2\right) \, d\rho \, d\vartheta =$$

con $D' = [1,3] \times [\pi, 2\pi]$, da cui segue

$$= \pi \int_1^3 \rho \left(9 - \rho^2\right) \, d\rho = \pi \left[-\frac{1}{4} \left(9 - \rho^2\right)^2 \right]_1^3 = 16\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 2. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ z = 5 + 4\log\left(1 + x^2 + y^2\right), \ x^2 + y^2 \le 4\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(y\left[z - 4\log\left(1 + x^2 + y^2\right)\right], \ x\left[4\log\left(1 + x^2 + y^2\right) - z\right], \ 6\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z vale

A 0.

B 16π.

C 12π.

D 32π.

E 24π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 5 + 4\log\left(1 + x^2 + y^2\right)$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, 5 + 4\log\left(1 + x^2 + y^2\right)\right).$$

Per definizione

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-\frac{8x}{1+x^2+y^2}, \ -\frac{8y}{1+x^2+y^2}, \ 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi consideriamo

$$N(x,y) = N_\sigma(x,y) = \left(-\frac{8x}{1+x^2+y^2}, \ -\frac{8y}{1+x^2+y^2}, \ 1\right).$$

Ne segue che

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = F\left(x, y, 5 + 4\log\left(1+x^2+y^2\right)\right) \cdot \left(-\frac{8x}{1+x^2+y^2}, \ -\frac{8x}{1+x^2+y^2}, \ 1\right) =$$

$$= \left(5y, \ -5x, \ 6\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \left(-\frac{8x}{1+x^2+y^2}, \ -\frac{8y}{1+x^2+y^2}, \ 1\right) = 6\sqrt{x^2+y^2}$$

Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy = \int_K 6\sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 6 \int_{K'} \rho^2 \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [0,2] \times [0, 2\pi]$, e quindi si ottiene

$$= 12\pi \int_0^2 \rho^2 \, d\rho = 12\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^2 = 32\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \big(2(x+y), \ 4(y-x)\big)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^2 + t, \ t^2 - t\right)$ vale

$\boxed{\text{A}}$ 4. $\boxed{\text{B}}$ 0. $\boxed{\text{C}}$ 8. $\boxed{\text{D}}$ 1. $\boxed{\text{E}}$ 2.

SVOLGIMENTO

Per definizione l'integrale di linea di F lungo γ è dato da

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\left(t^2+t, \ t^2-t\right) \cdot (2t+1, \ 2t-1) = \left(4t^2, -8t\right) \cdot (2t+1, \ 2t-1) = 8t^3 - 12t^2 + 8t,$$

si ottiene

$$= \int_0^1 \left(8t^3 - 12t^2 + 8t\right) \, dt = \left[2t^4 - 4t^3 + 4t^2\right]_0^1 = 2.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 4. Siano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che il suo sviluppo di Taylor centrato in (x_0, y_0) arrestato al secondo ordine è

$$f(x, y) = 1 + a(y - y_0) + b(x - x_0)^2 - c(y - y_0)^2 + o\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right), \text{ per } (x, y) \to (x_0, y_0), \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Se $a = 0$, $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{\text{B}}$ Se $a = 0$, $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

$\boxed{\text{C}}$ Se $a = 0$, $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{\text{D}}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$, se $bc > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{\text{E}}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$, se $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

SVOLGIMENTO

Dallo sviluppo di Taylor segue che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = -2c, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Ne segue che se $a \neq 0$ il punto (x_0, y_0) non è stazionario e quindi non è né di estremo né di sella per f. Quindi le risposte $\boxed{\text{D}}$ ed $\boxed{\text{E}}$ sono errate.

Se $a = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto stazionario per f e in tal caso la matrice Hessiana di f in (x_0, y_0) è

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix}.$$

Ne segue che:

- se $b < 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f;
- se $b > 0$ e $c > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f;
- se $b < 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f;
- se $b > 0$ e $c < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 5. Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $|a| < \frac{1}{3}$. La serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-3)^n a^n$

$\boxed{\text{A}}$ converge al numero $\dfrac{9a^2}{1 - 3a}$.

$\boxed{\text{B}}$ converge al numero $\dfrac{1}{1 + 3a}$.

$\boxed{\text{C}}$ diverge positivamente.

$\boxed{\text{D}}$ converge al numero $\dfrac{1}{1 - 3a}$.

$\boxed{\text{E}}$ converge al numero $\dfrac{9a^2}{1 + 3a}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-3)^n a^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-3a)^n.$$

Si tratta quindi di una serie geometrica di ragione $b = -3a$. Poiché la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge al numero $\frac{1}{1-b}$ se e solo se $|b| < 1$, ed essendo $|a| < \frac{1}{3}$ si ha che $|-3a| = 3|a| < 1$, ne segue che la serie data converge e la sua somma è

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-3a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3a)^n - (1-3a) = \frac{1}{1+3a} - (1-3a) = \frac{9a^2}{1+3a}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 6. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Se F è indivergente, allora esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^2 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω.

$\boxed{\text{B}}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{\text{C}}$ Se esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^2 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω, allora F è indivergente.

$\boxed{\text{D}}$ Se non esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^2 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω, allora F non è indivergente.

$\boxed{\text{E}}$ Se esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^2 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω, allora F è irrotazionale.

SVOLGIMENTO

Per la Condizione necessaria affinché un campo vettoriale ammetta potenziale vettore, se F ammette un potenziale vettore di classe C^2, e quindi esiste $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ si classe C^2 tale che $\text{rot}G = F$ in Ω, allora F è indivergente. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Domanda 7. Si considerino l'insieme $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \ \ x,y,z \geq 0\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(e^z - \cos y - 8x^2yz, \ 8xy^2z + e^z + \sin x, \ e^{xy} + \frac{8}{9}\log\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, F è di classe C^1 su $\text{dom}\,(f)$ e $\Omega \subseteq \text{dom}\,(f)$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div}F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$.

Quindi $\text{div}F(x,y,z) = \frac{16z}{9\,(x^2+y^2+z^2)}$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega} \frac{16z}{9\,(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz.$$

Passiamo in coordinate sferiche con la colatitudine misurata dall'asse z. Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = \rho\cos\vartheta \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \ 0 \leq \vartheta \leq \pi, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad |\text{det}J_\Phi(\rho,\vartheta,\varphi)| = \rho^2 \sin\vartheta.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{16}{9}\int_{\Omega} \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{16}{9}\int_{\Omega'} \rho\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi,$$

dove $\Omega' = \{(\rho,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : \ 3 \leq \rho \leq 6, \ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \ 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$.

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \frac{16}{9}\int_{\Omega'} \rho\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{8}{9}\pi \left(\int_3^6 \rho\, d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta\right) =$$

$$= \frac{8}{9}\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_3^6 \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = 6\pi.$$

La risposta corretta è 6π.

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 - x^2 - y^2, \ x \geq 0, \ z \geq 0\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \Big(xz + 6x^2\left(x^2+y^2\right), \ 6y^2\left(x^2+y^2\right) + yz, \ xy\left(x^2+y^2\right) + z - 1\Big)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

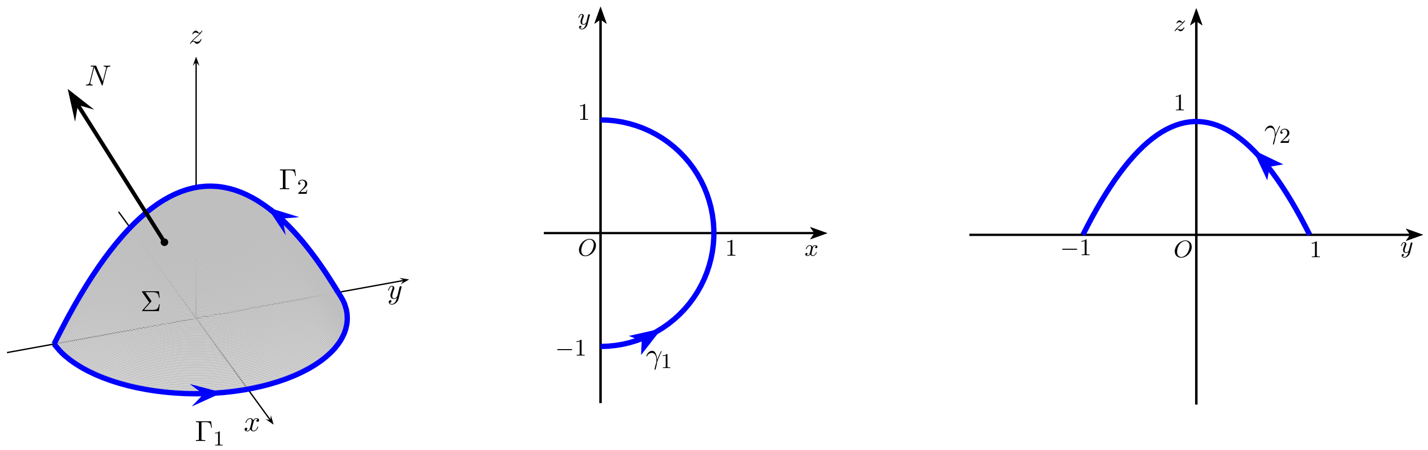
SVOLGIMENTO

Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP.$$

Osserviamo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = 1, \ z = 0, \ x \geq 0\right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 - y^2, \ x = 0, \ -1 \leq y \leq 1\right\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve parametriche che parametrizzano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 in modo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sia percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ che deve formare un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Si ha che $\gamma_1 : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ è $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt,$$

dove

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = \big(6\cos^2 t, 6\sin^2 t, \cos t \sin t - 1\big) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) =$$

$$= 6\cos^2 t \sin t + 6 \sin^2 t \cos t.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP == \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(6\cos^2 t \sin t + 6\sin^2 t \cos t\big) \, dt = \left[-2\cos^3 t + 2\sin^3 t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4.$$

Inoltre si ha che $\gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ è $\gamma_2(t) = (0, -t, 1-t^2)$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-1}^{1} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt,$$

dove

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F(0,-t,1-t^2) \cdot (0,-1,-2t) = \left(0, 6t^4 - t + t^3, -t^2\right) \cdot (0,-1,-2t) = -6t^4 + t + t^3.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-1}^{1} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \left(-6t^4 + t + t^3\right)\, dt = \left[-\frac{6}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4\right]_{-1}^{1} = -\frac{12}{5}.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}.$$

La risposta corretta è $\dfrac{8}{5}$.
