

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V1	C	C	E	D	B	C	13	42π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x(z-2)^5 - \cos y, y(z-2)^5 - 5yz^4, z^5 + e^x)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = 2(z-2)^5$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 2(z-2)^5 \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega} (z-2)^5 \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega'} \rho (z-2)^5 \, d\rho \, d\vartheta \, dz,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - \rho^2} \right\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 2 \int_{\Omega'} \rho (z-2)^5 \, d\rho \, d\vartheta \, dz = 4\pi \int_0^2 \rho \left(\int_0^{2+\sqrt{4-\rho^2}} (z-2)^5 \, dz \right) d\rho = \\ &= 4\pi \int_0^2 \rho \left[\frac{1}{6} (z-2)^6 \right]_0^{2+\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = \frac{2}{3}\pi \int_0^2 \rho \left[(4-\rho^2)^3 - 64 \right] d\rho = \\ &= \frac{2}{3}\pi \int_0^2 \left[\rho (4-\rho^2)^3 - 64\rho \right] d\rho = \frac{2}{3}\pi \left[-\frac{1}{8} (4-\rho^2)^4 - 32\rho^2 \right]_0^2 = -64\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V2	E	B	D	E	E	C	26	12π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(6x(z-1)^3 + e^{y^2}, 6y(z-1)^3 - 3yz^2, z^3 + \sin x \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = 12(z-1)^3$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 12(z-1)^3 \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 12 \int_{\Omega} (z-1)^3 \, dx \, dy \, dz = 12 \int_{\Omega'} \rho (z-1)^3 \, d\rho \, d\vartheta \, dz,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2} \right\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 12 \int_{\Omega'} \rho (z-1)^3 \, d\rho \, d\vartheta \, dz = 24\pi \int_0^1 \rho \left(\int_0^{1+\sqrt{1-\rho^2}} (z-1)^3 \, dz \right) d\rho = \\ &= 24\pi \int_0^1 \rho \left[\frac{1}{4} (z-1)^4 \right]_0^{1+\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = 6\pi \int_0^1 \rho \left[(1-\rho^2)^2 - 1 \right] d\rho = \\ &= 6\pi \int_0^1 \left[\rho (1-\rho^2)^2 - \rho \right] d\rho = 6\pi \left[-\frac{1}{6} (1-\rho^2)^3 - \frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^1 = -2\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V3	D	E	E	C	D	D	10	18π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(e^y + \frac{3}{2}x(z-2)^5, 6yz^5 + \frac{3}{2}y(z-2)^5, \cos x - z^6 \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = 3(z-2)^5$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 3(z-2)^5 \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 3 \int_{\Omega} (z-2)^5 \, dx \, dy \, dz = 3 \int_{\Omega'} \rho (z-2)^5 \, d\rho \, d\vartheta \, dz,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - \rho^2} \right\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 3 \int_{\Omega'} \rho (z-2)^5 \, d\rho \, d\vartheta \, dz = 6\pi \int_0^2 \rho \left(\int_0^{2+\sqrt{4-\rho^2}} (z-2)^5 \, dz \right) d\rho = \\ &= 6\pi \int_0^2 \rho \left[\frac{1}{6} (z-2)^6 \right]_0^{2+\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = \pi \int_0^2 \rho \left[(4-\rho^2)^3 - 64 \right] d\rho = \\ &= \pi \int_0^2 \left[\rho (4-\rho^2)^3 - 64\rho \right] d\rho = \pi \left[-\frac{1}{8} (4-\rho^2)^4 - 32\rho^2 \right]_0^2 = -96\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V4	B	B	D	C	C	D	20	27π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (\sin y + 12x(z-1)^3, 4yz^3 + 12y(z-1)^3, e^x - z^4)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = 24(z-1)^3$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 24(z-1)^3 \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 24 \int_{\Omega} (z-1)^3 \, dx \, dy \, dz = 24 \int_{\Omega'} \rho (z-1)^3 \, d\rho \, d\vartheta \, dz,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2} \right\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 24 \int_{\Omega'} \rho (z-1)^3 \, d\rho \, d\vartheta \, dz = 48\pi \int_0^1 \rho \left(\int_0^{1+\sqrt{1-\rho^2}} (z-1)^3 \, dz \right) d\rho = \\ &= 48\pi \int_0^1 \rho \left[\frac{1}{4} (z-1)^4 \right]_0^{1+\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = 12\pi \int_0^1 \rho \left[(1-\rho^2)^2 - 1 \right] d\rho = \\ &= 12\pi \int_0^1 \left[\rho (1-\rho^2)^2 - \rho \right] d\rho = 12\pi \left[-\frac{1}{6} (1-\rho^2)^3 - \frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^1 = -4\pi. \end{aligned}$$