

Versione: V1

Quiz 1. Siano $R > 0$ e $\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - 3(x^2 + y^2)^{3/2}, \ x^2 + y^2 \leq R^2, \ y \geq 0 \right\}$.

L'integrale $\int_{\Sigma} \frac{z-2}{\sqrt{81(x^2+y^2)^2+1}} d\sigma$ vale

☐ A $-\frac{3}{2}\pi R^4$.

☐ B $-\frac{6}{5}\pi R^5$.

☐ C $-\frac{3}{5}\pi R^5$.

☐ D $-\pi R^5$.

☐ E $-\frac{3}{4}\pi R^4$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 2 - 3(x^2 + y^2)^{3/2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, \ y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 2 - 3(x^2 + y^2)^{3/2})$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z-2}{\sqrt{81(x^2+y^2)^2+1}}$, per definizione

$$\int_{\Sigma} \frac{z-2}{\sqrt{81(x^2+y^2)^2+1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(9x (x^2 + y^2)^{1/2}, 9y (x^2 + y^2)^{1/2}, 1 \right).$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{81(x^2 + y^2)^2 + 1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f(x, y, 2 - 3(x^2 + y^2)^{3/2}) = -3(x^2 + y^2)^{3/2},$$

si ha che

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = -3 \int_K \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{\sqrt{81(x^2 + y^2)^2 + 1}} \cdot \sqrt{81(x^2 + y^2)^2 + 1} dx dy = -3 \int_K (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= -3 \int_{K'} \rho^4 d\rho d\vartheta =$$

dove $K' = [0, R] \times [0, \pi]$, e quindi si ottiene

$$= -3\pi \int_0^R \rho^4 d\rho = -3\pi \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^R = -\frac{3}{5} \pi R^5.$$

La risposta corretta è C.

Quiz 2. Siano $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 , $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $F(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + g(\|(x, y)\|) x - 2y, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + g(\|(x, y)\|) y + 2x \right)$ e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

L'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω orientato positivamente vale

A 4π .

B 42π .

C 20π .

D 13π .

E 5π .

SVOLGIMENTO

Sia $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G(x, y) = g(\|(x, y)\|) (x, y)$. Evidentemente G è radiale. Poiché g è continua, essendo di classe C^1 , il campo G è continuo e quindi risulta che G è conservativo. Inoltre anche il campo vettoriale ∇f è continuo e conservativo. Posto $H(x, y) = (-2y, 2x)$, osserviamo che

$$F(x, y) = \nabla f(x, y) + G(x, y) + H(x, y).$$

Quindi l'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω orientato positivamente è

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot dP + \int_{\partial\Omega} G \cdot dP + \int_{\partial\Omega} H \cdot dP =$$

essendo $\partial\Omega$ l'unione di due circonferenze, parametrizzabili tramite curve parametriche chiuse e regolari, e i campi ∇f e G conservativi, risulta che $\int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot dP = \int_{\partial\Omega} G \cdot dP = 0$ e quindi si ottiene

$$= \int_{\partial\Omega} H \cdot dP =$$

applicando il Teorema di Green al campo $H = (h_1, h_2)$ che è di classe C^1 si ha

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \int_{\Omega} 4 dx dy = 4m(\Omega) = 20\pi.$$

La risposta corretta è C.

In alternativa l'integrale di linea di H lungo $\partial\Omega$ orientato positivamente si può calcolare come la somma dell'integrale di linea di H lungo una curva parametrica che parametrizza la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 3 che induce su di essa un verso di percorrenza antiorario e dell'integrale di linea di H lungo una curva parametrica che parametrizza la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2 che induce su di essa un verso di percorrenza orario.

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(2x + \frac{16x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}, \frac{16y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 8y \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(2t(4t^2 - 2t - 1), t^2 - \sin(\pi t) \right)$ vale

A 32. B 4. C 8. D 0. E 16.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{16xy}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 2x + \frac{16x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = \frac{16y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 8y. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \left(2x + \frac{16x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} \right) dx = x^2 + 16\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{16y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} + c'(y) = \frac{16y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 8y \implies c'(y) = -8y \implies c(y) = -4y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = x^2 + 16\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 4y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(2, 1) - f(0, 0) = 16.$$

La risposta corretta è **E**.

Quiz 4. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $x_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A** Se f non è differenziabile in x_0 , allora f non è continua in x_0 .
- B** Se esiste il gradiente di f in x_0 , allora f è continua in x_0 .
- C** Se f è continua in x_0 , allora f è differenziabile in x_0 .
- D** Se f è differenziabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .
- E** Se f non è continua in x_0 , allora non esiste il gradiente di f in x_0 .

SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale, se f è differenziabile in x_0 , allora f è continua in x_0 . La risposta corretta è **D**.

Quiz 5. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n + 4}{3n e^n}$

- A** diverge positivamente.
- B** converge ma non assolutamente.
- C** è indeterminata.
- D** diverge negativamente.
- E** converge assolutamente.

SVOLGIMENTO

È una serie a termini di segno alterno. Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{e^n + 4}{3n e^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + 4}{3n e^n}.$$

Si ha che

$$\frac{e^n + 4}{3n e^n} \sim \frac{1}{3n}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + 4}{3n e^n}$ diverge e quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \frac{e^n + 4}{3n e^n}$, si ha che $b_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$, $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e (b_n) è decrescente. Infatti, la funzione $f(x) = \frac{e^x + 4}{3x e^x}$ definita su $[1, +\infty)$ è derivabile con derivata $f'(x) = -\frac{e^x + 4x + 4}{3x^2 e^x} < 0$ per ogni $x \geq 1$, da cui segue che f è decrescente su $[1, +\infty)$ e di conseguenza (b_n) è decrescente (in alternativa si può osservare che $b_n = \frac{1}{3n} + \frac{4}{3n e^n}$ e che queste due successioni sono decrescenti, da cui segue che anche (b_n) è decrescente). Per il Criterio di Leibniz la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n + 4}{3n e^n}$ converge. La risposta corretta è

B.

Quiz 6. Sia $f(x, y) = 5(x^2 - 4)(y^2 - 9) + 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A** La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.
B La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e tre punti di sella.
C La funzione f ha un punto di massimo locale, non ha punti di minimo locale e ha quattro punti di sella.
D La funzione f non ha punti di massimo e di minimo locale.
E La funzione f ha un punto di minimo locale, non ha punti di massimo locale e ha quattro punti di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10x(y^2 - 9), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 10y(x^2 - 4).$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x(y^2 - 9) = 0 \\ y(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, y = \pm 3 \\ y = 0, x = \pm 2 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0), (\pm 2, \pm 3).$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 10(y^2 - 9), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 10(x^2 - 4), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 20xy.$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -90 & 0 \\ 0 & -40 \end{pmatrix}, \quad H_f(2, 3) = H_f(-2, -3) = \begin{pmatrix} 0 & 120 \\ 120 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(-2, 3) = H_f(2, -3) = \begin{pmatrix} 0 & -120 \\ -120 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di massimo locale per f , mentre i punti $(\pm 2, \pm 3)$ sono di sella per f . La risposta corretta è **C**.

Domanda 7. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + 6x} \leq y \leq \sqrt{8 - x^2}\}$. Quanto vale l'integrale $\int_{\Omega} 6y \, dx \, dy$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è y -semplice. Infatti

$$\sqrt{x^2 + 6x} \leq y \leq \sqrt{8 - x^2} \implies \begin{cases} x^2 + 6x \geq 0 \\ 8 - x^2 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq -6, x \geq 0 \\ -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \\ -4 \leq x \leq 1 \end{cases} \implies 0 \leq x \leq 1,$$

e quindi si ha che

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x^2 + 6x} \leq y \leq \sqrt{8 - x^2} \right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi y -semplici, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 6y \, dx \, dy &= 6 \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x^2+6x}}^{\sqrt{8-x^2}} y \, dy \right) dx = 6 \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\sqrt{x^2+6x}}^{\sqrt{8-x^2}} dx = \\ &= 3 \int_0^1 (8 - 2x^2 - 6x) \, dx = 3 \left[8x - \frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^1 = 13. \end{aligned}$$

La risposta corretta è 13.

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z - 2)^2 = x^2 + y^2 - 2, 0 \leq z \leq 1, x \geq 0\}$ e il campo vettoriale $F(x, y, z) = (\sqrt{1 + x^2} - 2y(z - 2)^2, 2x(z - 2)^2 + \log(1 + y^2), e^z - \sin z)$.

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sqrt{1+x^2} - 2y(z-2)^2 & 2x(z-2)^2 + \log(1+y^2) & e^z - \sin z \end{vmatrix} = \\ &= (-4x(z-2), -4y(z-2), 4(z-2)^2). \end{aligned}$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} (z-2)^2 = x^2 + y^2 - 2 \\ 0 \leq z \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2 \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 2} \\ 0 \leq z \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2} \\ 3 \leq x^2 + y^2 \leq 6 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x^2 + y^2 \leq 6, x \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_\sigma(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F \left(x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, 1 \right) = \\ &= \left(4x\sqrt{x^2 + y^2 - 2}, 4y\sqrt{x^2 + y^2 - 2}, 4(x^2 + y^2 - 2) \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, 1 \right) = \\ &= 8(x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K 8(x^2 + y^2 - 1) \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = 8 \int_K (x^2 + y^2 - 1) \, dx \, dy = 8 \int_{K'} \rho(\rho^2 - 1) \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [\sqrt{3}, \sqrt{6}] \times [-\pi/2, \pi/2]$ e quindi si ottiene

$$= 8\pi \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \rho(\rho^2 - 1) \, d\rho = 8\pi \left[\frac{1}{4} (\rho^2 - 1)^2 \right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} = 42\pi.$$

La risposta corretta è 42π .

Versione V2

Quiz 1. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(32x + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}, \frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 32y \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(4t(5t^2 - 3t - 1), 4(t^3 + \sin(\pi t)) \right)$ vale

☐ A 40. ☐ B 0. ☐ C 5. ☐ D 10. ☐ E 20.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{5xy}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 32x + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = \frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 32y. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \left(32x + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} \right) dx = 16x^2 + 5\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} + c'(y) = \frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 32y \implies c'(y) = -32y \implies c(y) = -16y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 16x^2 + 5\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 16y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(4, 4) - f(0, 0) = 20.$$

La risposta corretta è ☒ E.

Quiz 2. Siano $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 , $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $F(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - g(\|(x, y)\|)x - 3y, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - g(\|(x, y)\|)y + 3x \right)$ e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$.

L'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω orientato positivamente vale

☐ A 6π . ☐ B 42π . ☐ C 25π . ☐ D 7π . ☐ E 150π .

SVOLGIMENTO

Sia $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G(x, y) = g(\|(x, y)\|)(x, y)$. Evidentemente G è radiale. Poiché g è continua, essendo di classe C^1 , il campo G è continuo e quindi risulta che G è conservativo. Inoltre anche il campo vettoriale ∇f è continuo e conservativo. Posto $H(x, y) = (-3y, 3x)$, osserviamo che

$$F(x, y) = \nabla f(x, y) - G(x, y) + H(x, y).$$

Quindi l'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω orientato positivamente è

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot dP - \int_{\partial\Omega} G \cdot dP + \int_{\partial\Omega} H \cdot dP =$$

essendo $\partial\Omega$ l'unione di due circonferenze, parametrizzabili tramite curve parametriche chiuse e regolari, e i campi ∇f e G conservativi, risulta che $\int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot dP = \int_{\partial\Omega} G \cdot dP = 0$ e quindi si ottiene

$$= \int_{\partial\Omega} H \cdot dP =$$

applicando il Teorema di Green al campo $H = (h_1, h_2)$ che è di classe C^1 si ha

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \int_{\Omega} 6 dx dy = 6m(\Omega) = 42\pi.$$

La risposta corretta è **B**.

In alternativa l'integrale di linea di H lungo $\partial\Omega$ orientato positivamente si può calcolare come la somma dell'integrale di linea di H lungo una curva parametrica che parametrizza la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 4 che induce su di essa un verso di percorrenza antiorario e dell'integrale di linea di H lungo una curva parametrica che parametrizza la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 3 che induce su di essa un verso di percorrenza orario.

Quiz 3. Siano $R > 0$ e $\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - 2(x^2 + y^2)^{5/2}, \ x^2 + y^2 \leq R^2, \ x \geq 0 \right\}$.

L'integrale $\int_{\Sigma} \frac{z-4}{\sqrt{100(x^2+y^2)^4+1}} d\sigma$ vale

A $-\frac{4}{7}\pi R^7.$

B $-\frac{2}{3}\pi R^6.$

C $-\frac{4}{3}\pi R^6.$

D $-\frac{2}{7}\pi R^7.$

E $-\pi R^7.$

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 4 - 2(x^2 + y^2)^{5/2}$, dove

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, \ x \geq 0 \right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 4 - 2(x^2 + y^2)^{5/2})$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z-4}{\sqrt{100(x^2+y^2)^4+1}}$, per definizione

$$\int_{\Sigma} \frac{z-4}{\sqrt{100(x^2+y^2)^4+1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(10x (x^2 + y^2)^{3/2}, 10y (x^2 + y^2)^{3/2}, 1 \right).$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{100(x^2 + y^2)^4 + 1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f\left(x, y, 4 - 2(x^2 + y^2)^{5/2}\right) = -2(x^2 + y^2)^{5/2},$$

si ha che

$$\int_{\Sigma} f \, d\sigma = -2 \int_K \frac{(x^2 + y^2)^{5/2}}{\sqrt{100(x^2 + y^2)^4 + 1}} \cdot \sqrt{100(x^2 + y^2)^4 + 1} \, dx \, dy = -2 \int_K (x^2 + y^2)^{5/2} \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= -2 \int_{K'} \rho^6 \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [0, R] \times [-\pi/2, \pi/2]$, e quindi si ottiene

$$= -2\pi \int_0^R \rho^6 \, d\rho = -2\pi \left[\frac{1}{7} \rho^7 \right]_0^R = -\frac{2}{7} \pi R^7.$$

La risposta corretta è D.

Quiz 4. Sia $f(x, y) = 3 - 9(x^2 - 4)(1 - y^2)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.
- B La funzione f ha un punto di minimo locale, non ha punti di massimo locale e ha quattro punti di sella.
- C La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e tre punti di sella.
- D La funzione f non ha punti di massimo e di minimo locale.
- E La funzione f ha un punto di massimo locale, non ha punti di minimo locale e ha quattro punti di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 18x(1 - y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 18y(x^2 - 4).$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x(1 - y^2) = 0 \\ y(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, y = \pm 1 \\ y = 0, x = \pm 2 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0), (\pm 2, \pm 1).$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -18(1 - y^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 18(x^2 - 4), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 36xy.$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -72 \end{pmatrix}, \quad H_f(2, 1) = H_f(-2, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 72 \\ 72 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(-2, 1) = H_f(2, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -72 \\ -72 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di massimo locale per f , mentre i punti $(\pm 2, \pm 1)$ sono di sella per f . La risposta corretta è E.

Quiz 5. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n - 3^n}{n^2 4^n + 1}$

- ☐ **A** è indeterminata.
- ☐ **B** converge ma non assolutamente.
- ☐ **C** diverge negativamente.
- ☐ **D** diverge positivamente.
- ☐ **E** converge assolutamente.

SVOLGIMENTO

È una serie a termini di segno alterno. Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{4^n - 3^n}{n^2 4^n + 1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{n^2 4^n + 1}.$$

Si ha che

$$\frac{4^n - 3^n}{n^2 4^n + 1} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{n^2 4^n + 1}$ converge e quindi la serie data converge assolutamente. La risposta corretta è ☒ **E**.

Quiz 6. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $x_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Se f non è continua in x_0 , allora non esiste il gradiente di f in x_0 .
- ☐ **B** Se f non è differenziabile in x_0 , allora f non è continua in x_0 .
- ☐ **C** Se f è differenziabile in x_0 , allora esiste il gradiente di f in x_0 .
- ☐ **D** Se f non è differenziabile in x_0 , allora non esiste il gradiente di f in x_0 .
- ☐ **E** Se esiste il gradiente di f in x_0 , allora f è continua in x_0 .

SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale, se f è differenziabile in x_0 , allora esiste il gradiente di f in x_0 . La risposta corretta è ☒ **C**.

Domanda 7. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y^2 + 6y} \leq x \leq \sqrt{8 - y^2}\}$. Quanto vale l'integrale $\int_{\Omega} 12x \, dx \, dy$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è x -semplice. Infatti

$$\sqrt{y^2 + 6y} \leq x \leq \sqrt{8 - y^2} \implies \begin{cases} y^2 + 6y \geq 0 \\ 8 - y^2 \geq 0 \\ y^2 + 3y - 4 \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y \leq -6, y \geq 0 \\ -2\sqrt{2} \leq y \leq 2\sqrt{2} \\ -4 \leq y \leq 1 \end{cases} \implies 0 \leq y \leq 1,$$

e quindi si ha che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y^2 + 6y} \leq x \leq \sqrt{8 - y^2}\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi x -semplici, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 12x \, dx \, dy &= 12 \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y^2 + 6y}}^{\sqrt{8 - y^2}} x \, dx \right) dy = 12 \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\sqrt{y^2 + 6y}}^{\sqrt{8 - y^2}} dy = \\ &= 6 \int_0^1 (8 - 2y^2 - 6y) \, dy = 6 \left[8x - \frac{2}{3} y^3 - 3y^2 \right]_0^1 = 26. \end{aligned}$$

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z-2)^2 = x^2 + y^2 - 3, 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}$ e il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\sqrt{2+x^2} - \frac{1}{2}y(z-2)^2, \frac{1}{2}x(z-2)^2 + \log(2+y^2), e^z - \cos z \right)$.

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sqrt{2+x^2} - \frac{1}{2}y(z-2)^2 & \frac{1}{2}x(z-2)^2 + \log(2+y^2) & e^z - \cos z \end{vmatrix} = (-x(z-2), -y(z-2), (z-2)^2).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} (z-2)^2 = x^2 + y^2 - 3 \\ 0 \leq z \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2 \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 3} \\ 0 \leq z \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 3} \\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 7 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 3}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 7, y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 3})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F(x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 3}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3}}, 1 \right) = \\ &= (x\sqrt{x^2 + y^2 - 4}, y\sqrt{x^2 + y^2 - 4}, x^2 + y^2 - 3) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3}}, 1 \right) = \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 3. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (2x^2 + 2y^2 - 3) \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_K (2x^2 + 2y^2 - 3) \, dx \, dy = \int_{K'} \rho (2\rho^2 - 3) \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [2, \sqrt{7}] \times [0, \pi]$ e quindi si ottiene

$$= \pi \int_2^{\sqrt{7}} \rho (2\rho^2 - 3) \, d\rho = \pi \left[\frac{1}{8} (2\rho^2 - 3)^2 \right]_2^{\sqrt{7}} = 12\pi.$$

La risposta corretta è 12π .

Versione V3

Quiz 1. Siano $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 , $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $F(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + g(\|(x, y)\|) x - \frac{5}{2}y, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + g(\|(x, y)\|) y + \frac{5}{2}x \right)$ e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

L'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω orientato positivamente vale

- ☐ **A** 65π . ☐ **B** 6π . ☐ **C** 13π . ☐ **D** 25π . ☐ **E** 5π .

SVOLGIMENTO

Sia $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G(x, y) = g(\|(x, y)\|) (x, y)$. Evidentemente G è radiale. Poiché g è continua, essendo di classe C^1 , il campo G è continuo e quindi risulta che G è conservativo. Inoltre anche il campo vettoriale ∇f è continuo e conservativo. Posto $H(x, y) = \left(-\frac{5}{2}y, \frac{5}{2}x\right)$, osserviamo che

$$F(x, y) = \nabla f(x, y) + G(x, y) + H(x, y).$$

Quindi l'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω orientato positivamente è

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot dP + \int_{\partial\Omega} G \cdot dP + \int_{\partial\Omega} H \cdot dP =$$

essendo $\partial\Omega$ l'unione di due circonferenze, parametrizzabili tramite curve parametriche chiuse e regolari, e i campi ∇f e G conservativi, risulta che $\int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot dP = \int_{\partial\Omega} G \cdot dP = 0$ e quindi si ottiene

$$= \int_{\partial\Omega} H \cdot dP =$$

applicando il Teorema di Green al campo $H = (h_1, h_2)$ che è di classe C^1 si ha

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \int_{\Omega} 5 dx dy = 5m(\Omega) = 25\pi.$$

La risposta corretta è ☒ **D**.

In alternativa l'integrale di linea di H lungo $\partial\Omega$ orientato positivamente si può calcolare come la somma dell'integrale di linea di H lungo una curva parametrica che parametrizza la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 3 che induce su di essa un verso di percorrenza antiorario e dell'integrale di linea di H lungo una curva parametrica che parametrizza la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2 che induce su di essa un verso di percorrenza orario.

Quiz 2. Sia $f(x, y) = 2 - 7(x^2 - 9)(y^2 - 4)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** La funzione f non ha punti di massimo e di minimo locale.
- ☐ **B** La funzione f ha un punto di massimo locale, non ha punti di minimo locale e ha quattro punti di sella.
- ☐ **C** La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e tre punti di sella.
- ☐ **D** La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.
- ☐ **E** La funzione f ha un punto di minimo locale, non ha punti di massimo locale e ha quattro punti di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -14x(y^2 - 4), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -14y(x^2 - 9).$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x(y^2 - 4) = 0 \\ y(x^2 - 9) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, y = \pm 2 \\ y = 0, x = \pm 3 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0), (\pm 3, \pm 2).$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -14(y^2 - 4), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -14(x^2 - 9), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -28xy.$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 56 & 0 \\ 0 & 126 \end{pmatrix}, \quad H_f(3, 2) = H_f(-3, -2) = \begin{pmatrix} 0 & -168 \\ -168 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(-3, 2) = H_f(3, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 168 \\ 168 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di minimo locale per f , mentre i punti $(\pm 3, \pm 2)$ sono di sella per f . La risposta corretta è **E**.

Quiz 3. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n + 5}{4n e^n}$

A diverge negativamente.

B è indeterminata.

C diverge positivamente.

D converge assolutamente.

E converge ma non assolutamente.

SVOLGIMENTO

È una serie a termini di segno alterno. Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{e^n + 5}{4n e^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + 5}{4n e^n}.$$

Si ha che

$$\frac{e^n + 5}{4n e^n} \sim \frac{1}{4n}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + 5}{4n e^n}$ diverge e quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \frac{e^n + 5}{4n e^n}$, si ha che $b_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$, $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e (b_n) è decrescente. Infatti, la funzione $f(x) = \frac{e^x + 5}{4x e^x}$ definita su $[1, +\infty)$ è derivabile con derivata $f'(x) = -\frac{e^x + 5x + 5}{4x^2 e^x} < 0$ per ogni $x \geq 1$, da cui segue che f è decrescente su $[1, +\infty)$ e di conseguenza (b_n) è decrescente (in alternativa si può osservare che $b_n = \frac{1}{4n} + \frac{5}{4n e^n}$ e che queste due successioni sono decrescenti, da cui segue che anche (b_n) è decrescente). Per il Criterio di Leibniz la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n + 5}{4n e^n}$ converge. La risposta corretta è **E**.

Quiz 4. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(8x - \frac{16x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}, -\frac{16y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 2y \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^2 + \sin(\pi t), 2t(4t^2 - 2t - 1) \right)$ vale

A -8.

☐ B -4 .

☐ C -16 .

☐ D 0 .

☐ E -32 .

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{16xy}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 8x - \frac{16x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = -\frac{16y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 2y. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \left(8x - \frac{16x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} \right) dx = 4x^2 - 16\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{16y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} + c'(y) = -\frac{16y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 2y \implies c'(y) = -2y \implies c(y) = -y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 4x^2 - 16\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1, 2) - f(0, 0) = -16.$$

La risposta corretta è ☒ C .

Quiz 5. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $x_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ A Se esiste il gradiente di f in x_0 , allora f è continua in x_0 .

☐ B Se f non è differenziabile in x_0 , allora f non è continua in x_0 .

☐ C Se f non è continua in x_0 , allora non esiste il gradiente di f in x_0 .

☐ D Se f è differenziabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .

☐ E Se f è continua in x_0 , allora f è differenziabile in x_0 .

SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale, se f è differenziabile in x_0 , allora f è continua in x_0 . La risposta corretta è ☒ D .

Quiz 6. Siano $R > 0$ e $\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 7 + 3(x^2 + y^2)^{3/2}, x^2 + y^2 \leq R^2, y \leq 0 \right\}$.

L'integrale $\int_{\Sigma} \frac{z-7}{\sqrt{81(x^2+y^2)^2+1}} d\sigma$ vale

☐ A $\frac{3}{4}\pi R^4$.

☐ B πR^5 .

☐ C $\frac{6}{5}\pi R^5$.

☐ D $\frac{3}{5}\pi R^5$.

☐ E $\frac{3}{2}\pi R^4$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g: K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 7 + 3(x^2 + y^2)^{3/2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, y \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 7 + 3(x^2 + y^2)^{3/2})$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z-7}{\sqrt{81(x^2+y^2)^2+1}}$, per definizione

$$\int_{\Sigma} \frac{z-7}{\sqrt{81(x^2+y^2)^2+1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-9x(x^2 + y^2)^{1/2}, -9y(x^2 + y^2)^{1/2}, 1 \right).$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{81(x^2 + y^2)^2 + 1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f(x, y, 7 + 3(x^2 + y^2)^{3/2}) = 3(x^2 + y^2)^{3/2},$$

si ha che

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = 3 \int_K \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{\sqrt{81(x^2 + y^2)^2 + 1}} \cdot \sqrt{81(x^2 + y^2)^2 + 1} dx dy = 3 \int_K (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 3 \int_{K'} \rho^4 d\rho d\vartheta =$$

dove $K' = [0, R] \times [\pi, 2\pi]$, e quindi si ottiene

$$= 3\pi \int_0^R \rho^4 d\rho = 3\pi \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^R = \frac{3}{5} \pi R^5.$$

La risposta corretta è ☒ D.

Domanda 7. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + 4x} \leq y \leq \sqrt{6 - x^2}\}$. Quanto vale l'integrale $\int_{\Omega} 6y dx dy$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è y -semplice. Infatti

$$\sqrt{x^2 + 4x} \leq y \leq \sqrt{6 - x^2} \implies \begin{cases} x^2 + 4x \geq 0 \\ 6 - x^2 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq -4, x \geq 0 \\ -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6} \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \implies 0 \leq x \leq 1,$$

e quindi si ha che

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x^2 + 4x} \leq y \leq \sqrt{6 - x^2} \right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi y -semplici, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 6y \, dx \, dy &= 6 \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x^2+4x}}^{\sqrt{6-x^2}} y \, dy \right) dx = 6 \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\sqrt{x^2+4x}}^{\sqrt{6-x^2}} dx = \\ &= 3 \int_0^1 (6 - 2x^2 - 4x) \, dx = 3 \left[6x - \frac{2}{3} x^3 - 2x^2 \right]_0^1 = 10. \end{aligned}$$

La risposta corretta è 10.

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z - 2)^2 = x^2 + y^2 - 1, 0 \leq z \leq 1, x \leq 0\}$ e il campo vettoriale $F(x, y, z) = (\sqrt{3 + x^2} - y(z - 2)^2, x(z - 2)^2 - \log(3 + y^2), \sin z - e^z)$.

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sqrt{3+x^2} - y(z-2)^2 & x(z-2)^2 - \log(3+y^2) & \sin z - e^z \end{vmatrix} = (-2x(z-2), -2y(z-2), 2(z-2)^2).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} (z-2)^2 = x^2 + y^2 - 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2 \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \\ 0 \leq z \leq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \\ 2 \leq x^2 + y^2 \leq 5 \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 5, x \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 1})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Quindi $N(x, y) = N_\sigma(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, 1 \right)$.

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F \left(x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}, 1 \right) = \\ &= \left(2x\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, 2y\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, 2(x^2 + y^2 - 1) \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}, 1 \right) = \\ &= 2(2x^2 + 2y^2 - 1). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K 2(2x^2 + 2y^2 - 1) \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dP = 2 \int_K (2x^2 + 2y^2 - 1) \, dx \, dy = 2 \int_{K'} \rho (2\rho^2 - 1) \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [\sqrt{2}, \sqrt{5}] \times [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ e quindi si ottiene

$$= 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \rho (2\rho^2 - 1) \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{8} (2\rho^2 - 1)^2 \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = 18\pi.$$

La risposta corretta è 18π .

Versione V4

Quiz 1. Siano $R > 0$ e $\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5 + 2(x^2 + y^2)^{5/2}, x^2 + y^2 \leq R^2, x \leq 0 \right\}$.

L'integrale $\int_{\Sigma} \frac{z-5}{\sqrt{100(x^2+y^2)^4+1}} d\sigma$ vale

☐ A $\frac{4}{7}\pi R^7$.

☐ B $\frac{2}{7}\pi R^7$.

☐ C πR^7 .

☐ D $\frac{4}{3}\pi R^6$.

☐ E $\frac{2}{3}\pi R^6$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g: K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 5 + 2(x^2 + y^2)^{5/2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, x \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 5 + 2(x^2 + y^2)^{5/2})$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z-5}{\sqrt{100(x^2+y^2)^4+1}}$, per definizione

$$\int_{\Sigma} \frac{z-5}{\sqrt{100(x^2+y^2)^4+1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-10x(x^2 + y^2)^{3/2}, -10y(x^2 + y^2)^{3/2}, 1 \right).$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{100(x^2 + y^2)^4 + 1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f(x, y, 5 + 2(x^2 + y^2)^{5/2}) = 2(x^2 + y^2)^{5/2},$$

si ha che

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = 2 \int_K \frac{(x^2 + y^2)^{5/2}}{\sqrt{100(x^2 + y^2)^4 + 1}} \cdot \sqrt{100(x^2 + y^2)^4 + 1} dx dy = 2 \int_K (x^2 + y^2)^{5/2} dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 2 \int_{K'} \rho^6 d\rho d\vartheta =$$

dove $K' = [0, R] \times [\pi/2, (3/2)\pi]$, e quindi si ottiene

$$= 2\pi \int_0^R \rho^6 d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{7} \rho^7 \right]_0^R = \frac{2}{7} \pi R^7.$$

La risposta corretta è ☒ B.

Quiz 2. Siano $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 , $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $F(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - g(\|(x, y)\|) x - \frac{7}{2}y, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - g(\|(x, y)\|) y + \frac{7}{2}x \right)$ e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$.

L'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω orientato positivamente vale

- ☐ A 6π .
- ☐ B 49π .
- ☐ C 7π .
- ☐ D 175π .
- ☐ E 25π .

SVOLGIMENTO

Sia $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G(x, y) = g(\|(x, y)\|) (x, y)$. Evidentemente G è radiale. Poiché g è continua, essendo di classe C^1 , il campo G è continuo e quindi risulta che G è conservativo. Inoltre anche il campo vettoriale ∇f è continuo e conservativo. Posto $H(x, y) = \left(-\frac{7}{2}y, \frac{7}{2}x\right)$, osserviamo che

$$F(x, y) = \nabla f(x, y) - G(x, y) + H(x, y).$$

Quindi l'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω orientato positivamente è

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot dP - \int_{\partial\Omega} G \cdot dP + \int_{\partial\Omega} H \cdot dP =$$

essendo $\partial\Omega$ l'unione di due circonferenze, parametrizzabili tramite curve parametriche chiuse e regolari, e i campi ∇f e G conservativi, risulta che $\int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot dP = \int_{\partial\Omega} G \cdot dP = 0$ e quindi si ottiene

$$= \int_{\partial\Omega} H \cdot dP =$$

applicando il Teorema di Green al campo $H = (h_1, h_2)$ che è di classe C^1 si ha

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \int_{\Omega} 7 dx dy = 7m(\Omega) = 49\pi.$$

La risposta corretta è ☒ B .

In alternativa l'integrale di linea di H lungo $\partial\Omega$ orientato positivamente si può calcolare come la somma dell'integrale di linea di H lungo una curva parametrica che parametrizza la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 4 che induce su di essa un verso di percorrenza antiorario e dell'integrale di linea di H lungo una curva parametrica che parametrizza la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 3 che induce su di essa un verso di percorrenza orario.

Quiz 3. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n - 4^n}{n^2 5^n + 2}$

- ☐ A diverge positivamente.
- ☐ B è indeterminata.
- ☐ C diverge negativamente.
- ☐ D converge assolutamente.
- ☐ E converge ma non assolutamente.

SVOLGIMENTO

È una serie a termini di segno alterno. Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{5^n - 4^n}{n^2 5^n + 2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{n^2 5^n + 2}.$$

Si ha che

$$\frac{5^n - 4^n}{n^2 5^n + 2} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{n^2 5^n + 2}$ converge e quindi la serie data converge assolutamente. La risposta corretta è **[D]**.

Quiz 4. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $x_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

[A] Se f non è continua in x_0 , allora non esiste il gradiente di f in x_0 .

[B] Se f non è differenziabile in x_0 , allora f non è continua in x_0 .

[C] Se f è differenziabile in x_0 , allora esiste il gradiente di f in x_0 .

[D] Se f non è differenziabile in x_0 , allora non esiste il gradiente di f in x_0 .

[E] Se esiste il gradiente di f in x_0 , allora f è continua in x_0 .

SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale, se f è differenziabile in x_0 , allora esiste il gradiente di f in x_0 . La risposta corretta è **[C]**.

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(32x - \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}, -\frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 32y \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(4(t^3 - \sin(\pi t)), 4t(5t^2 - 3t - 1) \right)$ vale

[A] -10. **[B]** 0. **[C]** -20. **[D]** -40. **[E]** -5.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{5xy}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 32x - \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = -\frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 32y. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \left(32x - \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} \right) dx = 16x^2 - 5\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} + c'(y) = -\frac{5y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} - 32y \implies c'(y) = -32y \implies c(y) = -16y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 16x^2 - 5\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 16y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(4, 4) - f(0, 0) = -20.$$

La risposta corretta è C.

Quiz 6. Sia $f(x, y) = 11(1 - x^2)(y^2 - 4) + 7$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A La funzione f non ha punti di massimo e di minimo locale.
- B La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e tre punti di sella.
- C La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.
- D La funzione f ha un punto di minimo locale, non ha punti di massimo locale e ha quattro punti di sella.
- E La funzione f ha un punto di massimo locale, non ha punti di minimo locale e ha quattro punti di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -22x(y^2 - 4), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 22y(1 - x^2).$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x(y^2 - 4) = 0 \\ y(1 - x^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, y = \pm 2 \\ y = 0, x = \pm 1 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0), (\pm 1, \pm 2).$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -22(y^2 - 4), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 22(1 - x^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -44xy.$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 88 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}, \quad H_f(1, 2) = H_f(-1, -2) = \begin{pmatrix} 0 & -88 \\ -88 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(-1, 2) = H_f(1, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 88 \\ 88 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di minimo locale per f , mentre i punti $(\pm 1, \pm 2)$ sono di sella per f . La risposta corretta è D.

Domanda 7. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y^2 + 4y} \leq x \leq \sqrt{6 - y^2}\}$. Quanto vale l'integrale $\int_{\Omega} 12x \, dx \, dy$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è x -semplice. Infatti

$$\sqrt{y^2 + 4y} \leq x \leq \sqrt{6 - y^2} \implies \begin{cases} y^2 + 4y \geq 0 \\ 6 - y^2 \geq 0 \\ y^2 + 2y - 3 \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y \leq -4, y \geq 0 \\ -\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6} \\ -3 \leq y \leq 1 \end{cases} \implies 0 \leq y \leq 1,$$

e quindi si ha che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y^2 + 4y} \leq x \leq \sqrt{6 - y^2}\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi x -semplici, si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} 12x \, dx \, dy &= 12 \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y^2+4y}}^{\sqrt{6-y^2}} x \, dx \right) dy = 12 \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\sqrt{y^2+4y}}^{\sqrt{6-y^2}} dy = \\ &= 6 \int_0^1 (6 - 2y^2 - 4y) \, dy = 6 \left[6x - \frac{2}{3} y^3 - 2y^2 \right]_0^1 = 20.\end{aligned}$$

La risposta corretta è 20.

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z-2)^2 = x^2 + y^2 - 4, \ 0 \leq z \leq 1, \ y \leq 0\}$ e il campo vettoriale $F(x, y, z) = (\sqrt{4+x^2-y(z-2)^2}, x(z-2)^2 - \log(4+y^2), \cos z - e^z)$.

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sqrt{4+x^2-y(z-2)^2} & x(z-2)^2 + \log(4+y^2) & \cos z - e^z \end{vmatrix} = (-2x(z-2), -2y(z-2), 2(z-2)^2).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} (z-2)^2 = x^2 + y^2 - 4 \\ 0 \leq z \leq 1 \\ y \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2 \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \\ 0 \leq z \leq 1 \\ y \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \\ 5 \leq x^2 + y^2 \leq 8 \\ y \leq 0. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \leq x^2 + y^2 \leq 8, \ y \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 4})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F(x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 4}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, 1 \right) = \\ &= \left(2x\sqrt{x^2 + y^2 - 4}, 2y\sqrt{x^2 + y^2 - 4}, 2(x^2 + y^2 - 4) \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, 1 \right) =\end{aligned}$$

$$= 4 \left(x^2 + y^2 - 2 \right).$$

Ne segue che

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K 4 \left(x^2 + y^2 - 2 \right) \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dP = 4 \int_K \left(x^2 + y^2 - 2 \right) \, dx \, dy = 4 \int_{K'} \rho \left(\rho^2 - 2 \right) \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [\sqrt{5}, \sqrt{8}] \times [\pi, 2\pi]$ e quindi si ottiene

$$= 4\pi \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \rho \left(\rho^2 - 2 \right) \, d\rho = 4\pi \left[\frac{1}{4} \left(\rho^2 - 2 \right)^2 \right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} = 27\pi.$$

La risposta corretta è 27π .
