

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V1	A	D	A	C	E	C	3	27

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad 9xy^2z + e^{x^2}, \quad \sin y - 9xyz^2 \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 3, \quad 1 \leq y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$.

Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove $\text{div} F$ è la divergenza di F definita da

$$\forall (x, y, z) \in \text{dom}(F) : \quad \text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = \frac{2x}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x si ottiene

$$= 2 \int_{\Omega'} x \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq x \leq 3\}$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = 2 \int_{\Omega'} x \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 4\pi \int_0^3 x \, dx = 4\pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^3 = 18\pi.$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V2	D	E	B	E	C	B	8	64

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(7x^2yz - e^{y^2}, \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \sqrt{x^2 + z^2}, \sin x - 7xyz^2 \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 2, 1 \leq x^2 + z^2 \leq 9\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$.

Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove $\text{div} F$ è la divergenza di F definita da

$$\forall (x, y, z) \in \text{dom}(F) : \quad \text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y si ottiene

$$= 2 \int_{\Omega'} y \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\}$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = 2 \int_{\Omega'} y \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 8\pi \int_0^2 y \, dy = 8\pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^2 = 16\pi.$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V3	B	B	C	D	B	C	6	36

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{3x^2}{2\sqrt{y^2 + z^2}} - \sqrt{y^2 + z^2}, \quad 8xy^2z - e^{x^2}, \quad \cos y - 8xyz^2 \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -3 \leq x \leq 0, \quad 1 \leq y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$.

Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove $\text{div} F$ è la divergenza di F definita da

$$\forall (x, y, z) \in \text{dom}(F) : \quad \text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = \frac{3x}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 3 \int_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x si ottiene

$$= 3 \int_{\Omega'} x \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad -3 \leq x \leq 0\}$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = 3 \int_{\Omega'} x \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 6\pi \int_{-3}^0 x \, dx = 6\pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-3}^0 = -27\pi.$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V4	D	E	B	A	B	B	4	32

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(5x^2yz + e^{y^2}, \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + z^2}} - \sqrt{x^2 + z^2}, \sin x - 5xyz^2 \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq y \leq 0, 1 \leq x^2 + z^2 \leq 9\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$.

Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove $\text{div} F$ è la divergenza di F definita da

$$\forall (x, y, z) \in \text{dom}(F) : \quad \text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = \frac{3y}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 3 \int_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y si ottiene

$$= 3 \int_{\Omega'} y \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, -2 \leq y \leq 0\}$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = 3 \int_{\Omega'} y \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 12\pi \int_{-2}^0 y \, dy = 12\pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{-2}^0 = -24\pi.$$