Svolgimento di quiz e domande dell'esame di Analisi Matematica II del 15/09/2025 ore 17

Versione: V1

Quiz 1. Siano $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 e conservativo e $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 e radiale. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Per ogni $(x,y,z) \in \Omega$ si ha che $\text{rotF}(x,y,z) = \text{rotG}(x,y,z) = (0,0,0)$.

$\boxed{\text{B}}$ Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x,y,z) - G(x,y,z) = c$ per ogni $(x,y,z) \in \Omega$.

$\boxed{\text{C}}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{\text{D}}$ Esiste $(x,y,z) \in \Omega$ tale che $\text{rotF}(x,y,z) \neq \text{rotG}(x,y,z)$.

$\boxed{\text{E}}$ Per ogni $(x,y,z) \in \Omega$ si ha che $\text{rotF}(x,y,z) = \text{rotG}(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

SVOLGIMENTO

Poiché F è di classe C^1 su Ω e conservativo, allora è irrotazionale. Inoltre, essendo G radiale e di classe C^1 su Ω, quindi anche continuo, anch'esso è conservativo e quindi irrotazionale. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3}}{\frac{1}{n} + 2}$

$\boxed{\text{A}}$ converge ad un numero negativo.

$\boxed{\text{B}}$ converge a zero.

$\boxed{\text{C}}$ diverge positivamente.

$\boxed{\text{D}}$ converge ad un numero positivo.

$\boxed{\text{E}}$ diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Poiché $n^2 < n^3$ per ogni $n > 1$, la serie è a termini positivi, e quindi converge ad un numero positivo oppure diverge positivamente.

Essendo $\dfrac{1}{n^3} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ per $n \to +\infty$ e $\dfrac{1}{n} = o\left(2\right)$ per $n \to +\infty$ si ha che

$$\frac{\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3}}{\frac{1}{n} + 2} \sim \frac{1}{2n^2}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge.

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 3. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(xy^6 + 6x^4 + 4y^6 - z,\ 6x^4 + 4y^6 - x^4y - z,\ 4x^2 + 4y^2\right)$ e la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ z = 6x^4 + 4y^6,\ x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\right\}$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z, vale

$\boxed{\text{A}}$ 16π. $\boxed{\text{B}}$ 8π. $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{16}{3}\pi$. $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{32}{3}\pi$. $\boxed{\text{E}}$ 4π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 6x^4 + 4y^6$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, 6x^4 + 4y^6\right)$.

Si ha che

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ è

$$N_\sigma(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-24x^3, \ -24y^5, \ 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi consideriamo

$$N(x,y) = N_\sigma(x,y) = \left(-24x^3, \ -24y^5, \ 1\right).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) &= F\left(x, y, 6x^4 + 4y^6\right) \cdot \left(-24x^3, \ -24y^5, \ 1\right) = \\ &= \left(xy^6, \ -x^4 y, \ 4x^2 + 4y^2\right) \cdot \left(-24x^3, \ -24y^5, \ 1\right) = 4x^2 + 4y^2. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = 4 \int_K \left(x^2 + y^2\right) \, dx \, dy = 4 \int_{K' = [0,2] \times [0,\pi]} \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta = 4\pi \int_0^2 \rho^3 \, d\rho = 4\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 = 16\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 4. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \leq z \leq \sqrt{36 - x^2 - y^2}\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{2} z \, dx \, dy \, dz$ vale

$\boxed{\text{A}}$ 4π.

$\boxed{\text{B}}$ 128π.

$\boxed{\text{C}}$ 64π.

$\boxed{\text{D}}$ 16π.

$\boxed{\text{E}}$ 32π.

SVOLGIMENTO

Integrando per fili paralleli all'asse z si ha che

$$\int_\Omega \frac{1}{2} z \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \rho z \, d\rho \, d\vartheta \, dz,$$

dove Ω' è l'insieme dei $(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} \sqrt{\rho^2 - 4} \leq z \leq \sqrt{36 - \rho^2} \\ \rho \geq 0 \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{\rho^2 - 4} \leq z \leq \sqrt{36 - \rho^2} \\ 2 \leq \rho \leq 6 \\ \rho^2 - 4 \leq 36 - \rho^2 \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{\rho^2 - 4} \leq z \leq \sqrt{36 - \rho^2} \\ 2 \leq \rho \leq \sqrt{20} \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\int_\Omega \frac{1}{2} z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_{\Omega'} \rho z\,d\rho\,d\vartheta\,dz = \pi \int_2^{\sqrt{20}} \rho \left(\int_{\sqrt{\rho^2-4}}^{\sqrt{36-\rho^2}} z\,dz \right) d\rho =$$

$$= \pi \int_2^{\sqrt{20}} \rho \left(20 - \rho^2\right) d\rho = \pi \left[-\frac{1}{4}\left(20-\rho^2\right)^2 \right]_2^{\sqrt{20}} = 64\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 5. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = a$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Se $a = b = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{\text{B}}$ Se $a > 0$ e $b = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{\text{C}}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $b \neq 0$ il punto (x_0, y_0) è di sella per f.

$\boxed{\text{D}}$ Se $a < 0$ e $b = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

$\boxed{\text{E}}$ Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{E}$. Infatti, il punto (x_0, y_0) non è detto che sia stazionario, e quindi se non è stazionario non può essere né di estremo locale né di sella.

A titolo d'esempio, si consideri la funzione $f(x, y) = \dfrac{1}{2}ax^2 + y^4 + bxy$ e il punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Per questo punto sono soddisfatte le ipotesi e $\nabla f(x_0, y_0) = (a, b)$.

Se $a \neq 0$ il punto non è stazionario e quindi non è né di estremo locale né di sella.

Se $a = b = 0$, allora è stazionario, ma $f(x, y) = y^4$ ed è un punto di minimo assoluto.

Quiz 6. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x + y,\ x - y,\ 3z)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (\sin t - \cos t,\ \sin t + \cos t,\ 2t)$ vale

$\boxed{\text{A}}$ 12π.

$\boxed{\text{B}}$ $12\pi^2$.

$\boxed{\text{C}}$ $24\pi^2$.

$\boxed{\text{D}}$ 0.

$\boxed{\text{E}}$ 24π.

SVOLGIMENTO

Si può procedere in due modi.

<u>Primo modo</u>. Per definizione l'integrale di linea di F lungo γ è dato da

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Essendo $\gamma'(t) = (\cos t + \sin t,\ \cos t - \sin t,\ 2)$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$, si ha che

$$\forall t \in [0, 2\pi] : \qquad F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\left(\sin t - \cos t,\ \sin t + \cos t,\ 2t\right) \cdot \left(\cos t + \sin t,\ \cos t - \sin t,\ 2\right) =$$

$$= \left(2\sin t,\ -2\cos t,\ 6t\right) \cdot \left(\cos t + \sin t,\ \cos t - \sin t,\ 2\right) =$$

$$= 4\sin t\cos t + 2\sin^2 t - 2\cos^2 t + 12t,$$

si ottiene che

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\left(4\sin t\cos t + 2\sin^2 t - 2\cos^2 t + 12t\right)\,dt =$$

$$= \left[2\sin^2 t + t - \sin t\cos t - t - \sin t\cos t + 6t^2\right]_0^{2\pi} = 24\pi^2.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Secondo modo. Si osserva che F è conservativo. Infatti, F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso e inoltre è anche irrotazionale. Quindi per la condizione sufficiente per i campi vettoriali di classe C^1 risulta essere conservativo.

Un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ è

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy + \frac{3}{2}z^2.$$

Per la proprietà dell'integrale di linea di un campo conservativo si ha che l'integrale di linea di F lungo γ è

$$\int_\gamma F\cdot dP = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(-1,1,4\pi) - f(-1,1,0) = 24\pi^2.$$

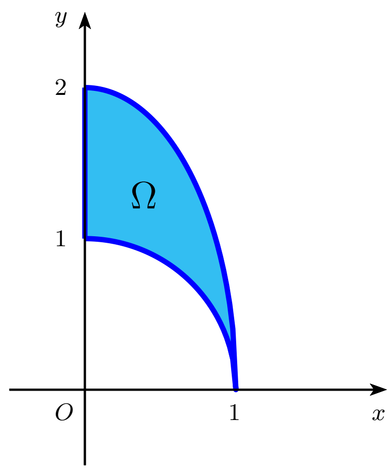
Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y) = \left(4xy^2 + \dfrac{3x}{x^2+y^2},\ 8x^2y + \dfrac{3y}{x^2+y^2}\right)$ e l'insieme $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\geq 1,\ x^2+\frac{1}{4}y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e che F è di classe C^1 su $\mathrm{dom}\,(F)$. Inoltre $\Omega\subseteq\mathrm{dom}\,(F)$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot dP = \int_\Omega\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right)\,dx\,dy = \int_\Omega 8xy\,dx\,dy.$$



Osserviamo che Ω è un insieme y-semplice. Infatti,

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leq x\leq 1,\ \sqrt{1-x^2}\leq y\leq 2\sqrt{1-x^2}\right\}.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot dP = \int_\Omega 8xy\,dx\,dy = 8\int_0^1 x\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right)\,dx =$$

$$= 12\int_0^1 x\left(1-x^2\right)\,dx = 12\left[-\frac{1}{4}\left(1-x^2\right)^2\right]_0^1 = 3.$$

In alternativa, passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che

$$\int_\Omega 8xy\,dx\,dy = 8\int_{\Omega'}\rho^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta,$$

dove Ω' è dato dalle relazioni

$$(x,y)\in\Omega \implies \begin{cases} x^2+y^2\geq 1\\ x^2+\frac{1}{4}y^2\leq 1\\ x\geq 0,\ \ y\geq 0\end{cases} \implies \begin{cases}\rho^2\geq 1\\ \rho^2\left(\cos^2\vartheta + \frac{1}{4}\sin^2\vartheta\right)\leq 1\\ \rho\geq 0,\ 0\leq\vartheta\leq\pi/2\end{cases} \implies \begin{cases}1\leq\rho\leq\dfrac{2}{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}\\ 0\leq\vartheta\leq\pi/2.\end{cases}$$

Quindi $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \;\; 0 \le \vartheta \le \pi/2, \;\; 1 \le \rho \le \dfrac{2}{\sqrt{1 + 3\cos^2 \vartheta}} \right\}$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = 8 \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\rho \, d\vartheta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left(\int_1^{\frac{2}{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}} \rho^3 \, d\rho \right) d\vartheta =$$

$$= 8 \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_1^{\frac{2}{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}} d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left[\frac{16}{(1 + 3\cos^2\vartheta)^2} - 1 \right] d\vartheta =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{16 \cos\vartheta \sin\vartheta}{(1 + 3\cos^2\vartheta)^2} - \cos\vartheta \sin\vartheta \right] d\vartheta = 2 \left[\frac{8}{3\,(1 + 3\cos^2\vartheta)} - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta \right]_0^{\pi/2} = 3.$$

La risposta corretta è 3.

Domanda 8. Sia $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + y^2 \le 36, \;\; (x-3)^2 + y^2 \ge 9, \;\; x \ge 0, \;\; 0 \le z \le \dfrac{1}{4}xy \right\}$.

Quanto vale il volume di W?

SVOLGIMENTO

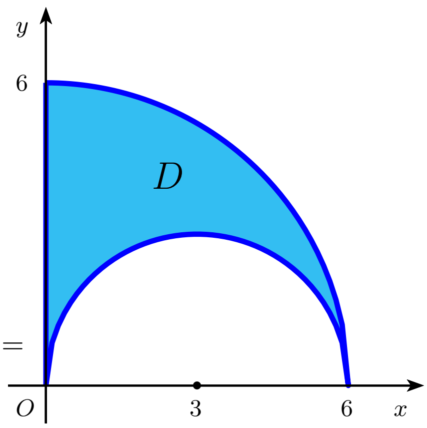
Integrando per fili paralleli all'asse z si ha che il volume di W è

$$m(W) = \int_W 1 \, dx \, dy \, dz = \int_D \left(\int_0^{\frac{1}{4}xy} 1 \, dz \right) dx \, dy = \int_D \frac{1}{4} xy \, dx \, dy,$$

dove $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 + y^2 \le 36, \;\; (x-3)^2 + y^2 \ge 9, \;\; x \ge 0, \;\; y \ge 0 \}$.

Passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che

$$m(W) = \int_D \frac{1}{4} xy \, dx \, dy = \frac{1}{4} \int_{D'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\rho \, d\vartheta,$$



dove $D' = \{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \;\; 0 \le \vartheta \le \pi/2, \;\; 6\cos\vartheta \le \rho \le 6 \}$. Ne segue che

$$m(W) = \frac{1}{4} \int_{D'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\rho \, d\vartheta \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left(\int_{6\cos\vartheta}^{6} \rho^3 \, d\rho \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_{6\cos\vartheta}^{6} d\vartheta = \frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left(6^4 - 6^4 \cos^4\vartheta \right) d\vartheta =$$

$$= 81 \int_0^{\pi/2} \left(\cos\vartheta \sin\vartheta - \cos^5\vartheta \sin\vartheta \right) d\vartheta = 81 \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta + \frac{1}{6}\cos^6\vartheta \right]_0^{\pi/2} = 27.$$

La risposta corretta è 27.

In alternativa l'integrale doppio su D si può calcolare con la formula di integrazione sugli insiemi y-semplici, perché D si può scrivere come

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; 0 \le x \le 6, \;\; \sqrt{9 - (x-3)^2} \le y \le \sqrt{36 - x^2} \right\}.$$

Versione V2

Quiz 1. La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}+3}{\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^3}}$

$\boxed{\text{A}}$ converge ad un numero positivo.

$\boxed{\text{B}}$ converge a zero.

$\boxed{\text{C}}$ diverge negativamente.

$\boxed{\text{D}}$ diverge positivamente.

$\boxed{\text{E}}$ converge ad un numero negativo.

SVOLGIMENTO

Poiché $n^2 < n^3$ per ogni $n > 1$, la serie è a termini positivi, e quindi converge ad un numero positivo oppure diverge positivamente.

Essendo $\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ per $n \to +\infty$ e $\frac{1}{n} = o(3)$ per $n \to +\infty$ si ha che

$$\frac{\frac{1}{n}+3}{\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^3}} \sim 3n^2, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data diverge. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 2. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \big(xy^4 + 4x^6 + 6y^4 - z,\ 4x^6 + 6y^4 - x^6y - z,\ 4x^2 + 4y^2\big)$ e la superficie $\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ z = 4x^6 + 6y^4,\ x^2 + y^2 \le 9,\ x \ge 0\big\}$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z, vale

$\boxed{\text{A}}$ 12π.

$\boxed{\text{B}}$ 3π.

$\boxed{\text{C}}$ 27π.

$\boxed{\text{D}}$ 36π.

$\boxed{\text{E}}$ 81π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 4x^6 + 6y^4$, dove

$$K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ x^2 + y^2 \le 9,\ x \ge 0\big\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \big(x,y,4x^6 + 6y^4\big)$.

Si ha che

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ è

$$N_\sigma(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \big(-24x^5,\ -24y^3,\ 1\big).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi consideriamo

$$N(x,y) = N_\sigma(x,y) = \left(-24x^5,\ -24y^3,\ 1\right).$$

Ne segue che

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = F\left(x, y, 4x^6 + 6y^4\right) \cdot \left(-24x^5,\ -24y^3,\ 1\right) =$$
$$= \left(xy^4,\ -x^6 y,\ 4x^2 + 4y^2\right) \cdot \left(-24x^5,\ -24y^3,\ 1\right) = 4x^2 + 4y^2.$$

Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = 4 \int_K \left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy = 4 \int_{K'=[0,3]\times[-\pi/2,\pi/2]} \rho^3\, d\rho\, d\vartheta = 4\pi \int_0^3 \rho^3\, d\rho = 4\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^3 = 81\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x+y,\ x-y,\ -3z)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (\sin t + \cos t,\ \sin t - \cos t,\ -2t)$ vale

$\boxed{\text{A}}$ $-12\pi^2$. $\boxed{\text{B}}$ $-24\pi^2$. $\boxed{\text{C}}$ 0. $\boxed{\text{D}}$ -24π. $\boxed{\text{E}}$ -12π.

SVOLGIMENTO

Si può procedere in due modi.

Primo modo. Per definizione l'integrale di linea di F lungo γ è dato da

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Essendo $\gamma'(t) = (\cos t - \sin t,\ \cos t - \sin t,\ -2)$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$, si ha che

$$\forall t \in [0,2\pi]: \qquad F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\sin t + \cos t,\ \sin t - \cos t,\ -2t) \cdot (\cos t - \sin t,\ \cos t + \sin t,\ -2) =$$
$$= (2\sin t,\ 2\cos t,\ 6t) \cdot (\cos t - \sin t,\ \cos t + \sin t,\ -2) =$$
$$= 4 \sin t \cos t - 2\sin^2 t + 2\cos^2 t - 12t,$$

si ottiene che

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(4 \sin t \cos t - 2\sin^2 t + 2\cos^2 t - 12t\right)\, dt =$$
$$= \left[2\sin^2 t - t + \sin t \cos t + t + \sin t \cos t - 6t^2\right]_0^{2\pi} = -24\pi^2.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Secondo modo. Si osserva che F è conservativo. Infatti, F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso e inoltre è anche irrotazionale. Quindi per la condizione sufficiente per i campi vettoriali di classe C^1 risulta essere conservativo.

Un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ è

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{3}{2}z^2.$$

Per la proprietà dell'integrale di linea di un campo conservativo si ha che l'integrale di linea di F lungo γ è

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1,-1,-4\pi) - f(1,-1,0) = -24\pi^2.$$

Quiz 4. Siano $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 e radiale e $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 e conservativo. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Esiste $(x,y,z)\in\Omega$ tale che $\text{rotF}(x,y,z)\neq\text{rotG}(x,y,z)$.

$\boxed{\text{B}}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{\text{C}}$ Esiste $c\in\mathbb{R}$ tale che $F(x,y,z)-G(x,y,z)=c$ per ogni $(x,y,z)\in\Omega$.

$\boxed{\text{D}}$ Per ogni $(x,y,z)\in\Omega$ si ha che $\text{rotF}(x,y,z)=\text{rotG}(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

$\boxed{\text{E}}$ Per ogni $(x,y,z)\in\Omega$ si ha che $\text{rotF}(x,y,z)=\text{rotG}(x,y,z)=(0,0,0)$.

SVOLGIMENTO

Poiché G è di classe C^1 su Ω e conservativo, allora è irrotazionale. Inoltre, essendo F radiale e di classe C^1 su Ω, quindi anche continuo, anch'esso è conservativo e quindi irrotazionale. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 5. Sia $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2-4}\le z\le\sqrt{16-x^2-y^2}\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega 3z\,dx\,dy\,dz$ vale

$\boxed{\text{A}}$ 27π.

$\boxed{\text{B}}$ 3π.

$\boxed{\text{C}}$ 54π.

$\boxed{\text{D}}$ 18π.

$\boxed{\text{E}}$ 108π.

SVOLGIMENTO

Integrando per fili paralleli all'asse z si ha che

$$\int_\Omega 3z\,dx\,dy\,dz=3\int_{\Omega'}\rho z\,d\rho\,d\vartheta\,dz,$$

dove Ω' è l'insieme dei $(\rho,\vartheta,z)\in\mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases}\sqrt{\rho^2-4}\le z\le\sqrt{16-\rho^2}\\ \rho\ge 0\\ 0\le\vartheta\le 2\pi\end{cases}\iff\begin{cases}\sqrt{\rho^2-4}\le z\le\sqrt{16-\rho^2}\\ 2\le\rho\le 4\\ \rho^2-4\le 16-\rho^2\\ 0\le\vartheta\le 2\pi\end{cases}\iff\begin{cases}\sqrt{\rho^2-4}\le z\le\sqrt{16-\rho^2}\\ 2\le\rho\le\sqrt{10}\\ 0\le\vartheta\le 2\pi.\end{cases}$$

Ne segue che

$$\int_\Omega 3z\,dx\,dy\,dz=3\int_{\Omega'}\rho z\,d\rho\,d\vartheta\,dz=6\pi\int_2^{\sqrt{10}}\rho\left(\int_{\sqrt{\rho^2-4}}^{\sqrt{16-\rho^2}}z\,dz\right)d\rho=$$

$$=6\pi\int_2^{\sqrt{10}}\rho\left(10-\rho^2\right)\,d\rho=6\pi\left[-\frac{1}{4}\left(10-\rho^2\right)^2\right]_2^{\sqrt{10}}=54\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 6. Siano $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tali che $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)=a$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=b$, con $a,b\in\mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Se $a>0$ e $b=0$, allora (x_0,y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{\text{B}}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{\text{C}}$ Se $a=b=0$, allora (x_0,y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{\text{D}}$ Se $a < 0$ e $b = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

$\boxed{\text{E}}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $b \neq 0$ il punto (x_0, y_0) è di sella per f.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{B}$. Infatti, il punto (x_0, y_0) non è detto che sia stazionario, e quindi se non è stazionario non può essere né di estremo locale né di sella.

A titolo d'esempio, si consideri la funzione $f(x, y) = x^4 + \frac{1}{2}ay^2 + bxy$ e il punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Per questo punto sono soddisfatte le ipotesi e $\nabla f(x_0, y_0) = (b, a)$.

Se $a \neq 0$ il punto non è stazionario e quindi non è né di estremo locale né di sella.

Se $a = b = 0$, allora è stazionario, ma $f(x, y) = x^4$ ed è un punto di minimo assoluto.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y) = \left(6xy^2 - \dfrac{7x}{x^2+y^2},\ 10x^2y - \dfrac{7y}{x^2+y^2}\right)$ e l'insieme $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \geq 1,\ \frac{1}{9}x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

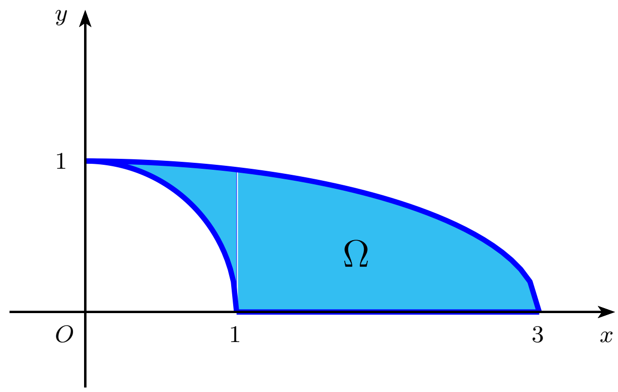
SVOLGIMENTO

Si ha che $\operatorname{dom}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e che F è di classe C^1 su $\operatorname{dom}(F)$. Inoltre $\Omega \subseteq \operatorname{dom}(F)$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)\right) dx\, dy = \int_\Omega 8xy\, dx\, dy.$$

Osserviamo che Ω è un insieme y-semplice. Infatti,

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq 1,\ \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq 3\sqrt{1 - y^2}\right\}.$$



Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_\Omega 8xy\, dx\, dy = 8\int_0^1 y\left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{3\sqrt{1-y^2}} x\, dx\right) dy =$$

$$= 32\int_0^1 y\left(1 - y^2\right) dy = 32\left[-\frac{1}{4}\left(1 - x^2\right)^2\right]_0^1 = 8.$$

In alternativa, passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che

$$\int_\Omega 8xy\, dx\, dy = 8\int_{\Omega'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta,$$

dove Ω' è dato dalle relazioni

$$(x, y) \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ \frac{1}{9}x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \rho^2 \geq 1 \\ \rho^2\left(\frac{1}{9}\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) \leq 1 \\ \rho \geq 0,\ \ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leq \rho \leq \dfrac{3}{\sqrt{1 + 8\sin^2\vartheta}} \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = \left\{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2,\ 1 \leq \rho \leq \dfrac{3}{\sqrt{1 + 8\sin^2\vartheta}}\right\}$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = 8\int_{\Omega'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta = 8\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left(\int_1^{\frac{3}{\sqrt{1+8\sin^2\vartheta}}} \rho^3\, d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^{\frac{3}{\sqrt{1+8\sin^2\vartheta}}} d\vartheta = 2\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left[\frac{81}{\left(1 + 8\sin^2\vartheta\right)^2} - 1\right] d\vartheta =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[\frac{81\cos\vartheta\sin\vartheta}{\left(1+8\sin^2\vartheta\right)^2} - \cos\vartheta\sin\vartheta \right] d\vartheta = 2\left[-\frac{81}{16\left(1+8\sin^2\vartheta\right)} - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta \right]_0^{\pi/2} = 8.$$

La risposta corretta è 8.

Domanda 8. Sia $W = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ \ x^2+y^2\leq 16,\ x^2+(y-2)^2\geq 4,\ y\geq 0,\ 0\leq z\leq 3xy\right\}$.

Quanto vale il volume di W?

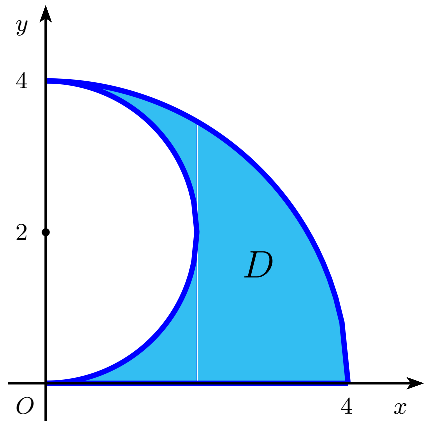
SVOLGIMENTO

Integrando per fili paralleli all'asse z si ha che il volume di W è

$$m(W) = \int_W 1\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_0^{3xy} 1\,dz\right)\,dx\,dy = \int_D 3xy\,dx\,dy,$$

dove $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \ x^2+y^2\leq 16,\ x^2+(y-2)^2\geq 4,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$.

Passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che



$$m(W) = \int_D 3xy\,dx\,dy = 3\int_{D'} \rho^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta,$$

dove $D' = \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2 :\ \ 0\leq\vartheta\leq\pi/2,\ \ 4\sin\vartheta\leq\rho\leq 4\right\}$. Ne segue che

$$m(W) = 3\int_{D'} \rho^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta 3\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta \left(\int_{4\sin\vartheta}^{4} \rho^3\,d\rho\right)\,d\vartheta =$$

$$= 3\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{4\sin\vartheta}^{4}\,d\vartheta = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta\left(4^4 - 4^4\sin^4\vartheta\right)\,d\vartheta =$$

$$= 192\int_0^{\pi/2} \left(\cos\vartheta\sin\vartheta - \cos\vartheta\sin^5\vartheta\right)\,d\vartheta = 192\left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta - \frac{1}{6}\sin^6\vartheta\right]_0^{\pi/2} = 64.$$

La risposta corretta è 64.

In alternativa l'integrale doppio su D si può calcolare con la formula di integrazione sugli insiemi x-semplici, perché D si può scrivere come

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \ 0\leq y\leq 4,\ \sqrt{16-(y-2)^2}\leq x\leq\sqrt{16-y^2}\right\}.$$

Versione V3

Quiz 1. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x + y,\ x - y,\ 2z)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (\sin t - \cos t,\ \sin t + \cos t,\ 3t)$ vale

A $12\pi^2$.

B $36\pi^2$.

C 36π.

D 0.

E 12π.

SVOLGIMENTO

Si può procedere in due modi.

Primo modo. Per definizione l'integrale di linea di F lungo γ è dato da

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Essendo $\gamma'(t) = (\cos t + \sin t,\ \cos t - \sin t,\ 3)$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$, si ha che

$$\forall t \in [0, 2\pi] : \qquad F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\sin t - \cos t,\ \sin t + \cos t,\ 3t) \cdot (\cos t + \sin t,\ \cos t - \sin t,\ 3) =$$

$$= (2 \sin t,\ -2 \cos t,\ 6t) \cdot (\cos t + \sin t,\ \cos t - \sin t,\ 3) =$$

$$= 4 \sin t \cos t + 2 \sin^2 t - 2 \cos^2 t + 18t,$$

si ottiene che

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(4 \sin t \cos t + 2 \sin^2 t - 2 \cos^2 t + 18t\right) dt =$$

$$= \left[2 \sin^2 t + t - \sin t \cos t - t - \sin t \cos t + 9t^2\right]_0^{2\pi} = 36\pi^2.$$

La risposta corretta è $\boxed{B}$.

Secondo modo. Si osserva che F è conservativo. Infatti, F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso e inoltre è anche irrotazionale. Quindi per la condizione sufficiente per i campi vettoriali di classe C^1 risulta essere conservativo.

Un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ è

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy + z^2.$$

Per la proprietà dell'integrale di linea di un campo conservativo si ha che l'integrale di linea di F lungo γ è

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(-1, 1, 6\pi) - f(-1, 1, 0) = 36\pi^2.$$

Quiz 2. Sia $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16} \le z \le \sqrt{36 - x^2 - y^2}\right\}$. L'integrale $\int_\Omega 2z\, dx\, dy\, dz$ vale

A 5π. B 100π. C 25π. D 200π. E 50π.

SVOLGIMENTO

Integrando per fili paralleli all'asse z si ha che

$$\int_\Omega 2z\, dx\, dy\, dz = 2 \int_{\Omega'} \rho z\, d\rho\, d\vartheta\, dz,$$

dove Ω' è l'insieme dei $(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} \sqrt{\rho^2 - 16} \le z \le \sqrt{36 - \rho^2} \\ \rho \ge 0 \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{\rho^2 - 16} \le z \le \sqrt{36 - \rho^2} \\ 4 \le \rho \le 6 \\ \rho^2 - 16 \le 36 - \rho^2 \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{\rho^2 - 16} \le z \le \sqrt{36 - \rho^2} \\ 4 \le \rho \le \sqrt{26} \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\int_\Omega 2z \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega'} \rho z \, d\rho \, d\vartheta \, dz = 4\pi \int_4^{\sqrt{26}} \rho \left(\int_{\sqrt{\rho^2-16}}^{\sqrt{36-\rho^2}} z \, dz \right) d\rho =$$

$$= 4\pi \int_4^{\sqrt{26}} \rho \left(26 - \rho^2\right) \, d\rho = 4\pi \left[-\frac{1}{4} \left(26 - \rho^2\right)^2 \right]_4^{\sqrt{26}} = 100\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 3. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^3}}{\frac{1}{n} + 4}$

A diverge negativamente.

B diverge positivamente.

C converge ad un numero positivo.

D converge ad un numero negativo.

E converge a zero.

SVOLGIMENTO

Poiché $n^2 < n^3$ per ogni $n > 1$, la serie è a termini positivi, e quindi converge ad un numero positivo oppure diverge positivamente.

Essendo $\displaystyle\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ per $n \to +\infty$ e $\displaystyle\frac{1}{n} = o(4)$ per $n \to +\infty$ si ha che

$$\frac{\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^3}}{\frac{1}{n} + 4} \sim \frac{1}{4n^2}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge.

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 4. Siano $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 e conservativo e $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 e radiale. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A Per ogni $(x, y, z) \in \Omega$ si ha che $\mathrm{rotF}(x, y, z) = \mathrm{rotG}(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

B Esiste $(x, y, z) \in \Omega$ tale che $\mathrm{rotF}(x, y, z) \neq \mathrm{rotG}(x, y, z)$.

C Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x, y, z) - G(x, y, z) = c$ per ogni $(x, y, z) \in \Omega$.

D Per ogni $(x, y, z) \in \Omega$ si ha che $\mathrm{rotF}(x, y, z) = \mathrm{rotG}(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

E Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Poiché F è di classe C^1 su Ω e conservativo, allora è irrotazionale. Inoltre, essendo G radiale e di classe C^1 su Ω, quindi anche continuo, anch'esso è conservativo e quindi irrotazionale. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 5. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(6x^4+4y^6-xy^6-z,\ 6x^4+4y^6+x^4y-z,\ 8x^2+8y^2\right)$ e la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ z=6x^4+4y^6,\ x^2+y^2\le 4,\ y\le 0\right\}$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z, vale

$\boxed{\text{A}}$ 16π.

$\boxed{\text{B}}$ 32π.

$\boxed{\text{C}}$ $\frac{32}{3}\pi$.

$\boxed{\text{D}}$ 4π.

$\boxed{\text{E}}$ $\frac{64}{3}\pi$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g: K\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=6x^4+4y^6$, dove

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^2+y^2\le 4,\ y\le 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma=\sigma(K)$, dove $\sigma: K\to\mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y)=(x,y,g(x,y))=\left(x,y,6x^4+4y^6\right)$.

Si ha che

$$\int_\Sigma F\cdot n\,d\sigma=\int_K F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y)\,dx\,dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ è

$$N_\sigma(x,y)=\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)=\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),1\right)=\left(-24x^3,\ -24y^5,\ 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi consideriamo

$$N(x,y)=N_\sigma(x,y)=\left(-24x^3,\ -24y^5,\ 1\right).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y)&=F\left(x,y,6x^4+4y^6\right)\cdot\left(-24x^3,\ -24y^5,\ 1\right)=\\&=\left(-xy^6,\ x^4y,\ 8x^2+8y^2\right)\cdot\left(-24x^3,\ -24y^5,\ 1\right)=8x^2+8y^2.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_\Sigma F\cdot n\,d\sigma=8\int_K\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy=8\int_{K'=[0,2]\times[\pi,2\pi]}\rho^3\,d\rho\,d\vartheta=8\pi\int_0^2\rho^3\,d\rho=8\pi\left[\frac14\rho^4\right]_0^2=32\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 6. Siano $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tali che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)=a$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)=0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=b$, con $a,b\in\mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Se $a>0$ e $b=0$, allora (x_0,y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{\text{B}}$ Se $a<0$ e $b=0$, allora (x_0,y_0) è un punto di massimo locale per f.

C Nessuna delle altre è corretta.

D Se $a = b = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

E Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $b \neq 0$ il punto (x_0, y_0) è di sella per f.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{C}$. Infatti, il punto (x_0, y_0) non è detto che sia stazionario, e quindi se non è stazionario non può essere né di estremo locale né di sella.

A titolo d'esempio, si consideri la funzione $f(x, y) = \frac{1}{2}ax^2 + y^4 + bxy$ e il punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Per questo punto sono soddisfatte le ipotesi e $\nabla f(x_0, y_0) = (a, b)$.

Se $a \neq 0$ il punto non è stazionario e quindi non è né di estremo locale né di sella.

Se $a = b = 0$, allora è stazionario, ma $f(x, y) = y^4$ ed è un punto di minimo assoluto.

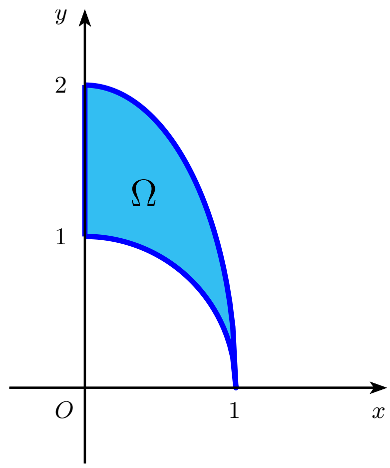
Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y) = \left(8xy^2 + \frac{5x}{x^2+y^2},\ 16x^2y + \frac{5y}{x^2+y^2}\right)$ e l'insieme $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e che F è di classe C^1 su $\mathrm{dom}\,(F)$. Inoltre $\Omega \subseteq \mathrm{dom}\,(F)$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)\right) dx\, dy = \int_\Omega 16xy\, dx\, dy.$$



Osserviamo che Ω è un insieme y-semplice. Infatti,

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 2\sqrt{1 - x^2}\right\}.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_\Omega 16xy\, dx\, dy = 16 \int_0^1 x \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} y\, dy\right) dx =$$

$$= 24 \int_0^1 x\left(1 - x^2\right) dx = 24 \left[-\frac{1}{4}\left(1 - x^2\right)^2\right]_0^1 = 6.$$

In alternativa, passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che

$$\int_\Omega 16xy\, dx\, dy = 16 \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta,$$

dove Ω' è dato dalle relazioni

$$(x, y) \in \Omega \implies \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1 \\ x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \rho^2 \geq 1 \\ \rho^2 \left(\cos^2\vartheta + \frac{1}{4}\sin^2\vartheta\right) \leq 1 \\ \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}} \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = \left\{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2,\ 1 \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}}\right\}$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = 16 \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta = 16 \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left(\int_1^{\frac{2}{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}} \rho^3\, d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= 16\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^{\frac{2}{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}} d\vartheta = 4\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta\left[\frac{16}{(1+3\cos^2\vartheta)^2} - 1\right] d\vartheta =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \left[\frac{16\cos\vartheta\sin\vartheta}{(1+3\cos^2\vartheta)^2} - \cos\vartheta\sin\vartheta\right] d\vartheta = 4\left[\frac{8}{3\,(1+3\cos^2\vartheta)} - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = 6.$$

La risposta corretta è 6.

Domanda 8. Sia $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \le 36, \ (x-3)^2+y^2 \ge 9, \ x \ge 0, \ 0 \le z \le \frac{1}{3}xy\right\}$.

Quanto vale il volume di W?

SVOLGIMENTO

Integrando per fili paralleli all'asse z si ha che il volume di W è

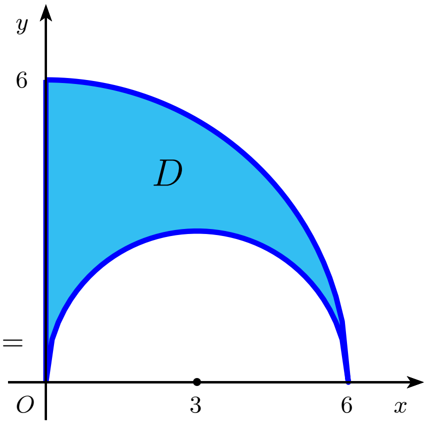
$$m(W) = \int_W 1\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_0^{\frac{1}{3}xy} 1\,dz\right) dx\,dy = \int_D \frac{1}{3}xy\,dx\,dy,$$

dove $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 36, \ (x-3)^2+y^2 \ge 9, \ x \ge 0, \ y \ge 0\right\}$.

Passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che

$$m(W) = \int_D \frac{1}{3}xy\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_{D'} \rho^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta,$$

dove $D' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le \vartheta \le \pi/2, \ 6\cos\vartheta \le \rho \le 6\right\}$. Ne segue che



$$m(W) = \frac{1}{3}\int_{D'} \rho^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\sin\vartheta\left(\int_{6\cos\vartheta}^{6}\rho^3\,d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\sin\vartheta\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{6\cos\vartheta}^{6} d\vartheta = \frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\sin\vartheta\left(6^4 - 6^4\cos^4\vartheta\right) d\vartheta =$$

$$= 108\int_0^{\pi/2}\left(\cos\vartheta\sin\vartheta - \cos^5\vartheta\sin\vartheta\right) d\vartheta = 108\left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta + \frac{1}{6}\cos^6\vartheta\right]_0^{\pi/2} = 36.$$

La risposta corretta è 36.

In alternativa l'integrale doppio su D si può calcolare con la formula di integrazione sugli insiemi y-semplici, perché D si può scrivere come

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 6, \ \sqrt{9-(x-3)^2} \le y \le \sqrt{36-x^2}\right\}.$$

Versione V4

Quiz 1. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \sqrt{x^2+y^2-16} \le z \le \sqrt{32-x^2-y^2}\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega z\,dx\,dy\,dz$ vale

$\boxed{\text{A}}$ 2π. $\boxed{\text{B}}$ 8π. $\boxed{\text{C}}$ 16π. $\boxed{\text{D}}$ 32π. $\boxed{\text{E}}$ 64π.

SVOLGIMENTO

Integrando per fili paralleli all'asse z si ha che

$$\int_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho z\,d\rho\,d\vartheta\,dz,$$

dove Ω' è l'insieme dei $(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} \sqrt{\rho^2-16} \le z \le \sqrt{32-\rho^2} \\ \rho \ge 0 \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{\rho^2-16} \le z \le \sqrt{32-\rho^2} \\ 4 \le \rho \le \sqrt{32} \\ \rho^2 - 16 \le 32 - \rho^2 \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{\rho^2-16} \le z \le \sqrt{32-\rho^2} \\ 4 \le \rho \le \sqrt{24} \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\int_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho z\,d\rho\,d\vartheta\,dz = 2\pi \int_4^{\sqrt{24}} \rho \left(\int_{\sqrt{\rho^2-16}}^{\sqrt{32-\rho^2}} z\,dz \right) d\rho =$$

$$= 2\pi \int_4^{\sqrt{18}} \rho \left(24-\rho^2\right) d\rho = 2\pi \left[-\frac{1}{4}\left(24-\rho^2\right)^2 \right]_4^{\sqrt{24}} = 32\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 2. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x+y,\ x-y,\ -2z)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (\sin t + \cos t,\ \sin t - \cos t,\ -3t)$ vale

$\boxed{\text{A}}$ $-12\pi^2$.

$\boxed{\text{B}}$ 0.

$\boxed{\text{C}}$ -12π.

$\boxed{\text{D}}$ -36π.

$\boxed{\text{E}}$ $-36\pi^2$.

SVOLGIMENTO

Si può procedere in due modi.

<u>Primo modo</u>. Per definizione l'integrale di linea di F lungo γ è dato da

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Essendo $\gamma'(t) = (\cos t - \sin t,\ \cos t - \sin t,\ -3)$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$, si ha che

$$\forall t \in [0,2\pi]: \qquad F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\sin t + \cos t,\ \sin t - \cos t,\ -3t) \cdot (\cos t - \sin t,\ \cos t + \sin t,\ -3) =$$

$$= (2\sin t,\ 2\cos t,\ 6t) \cdot (\cos t - \sin t,\ \cos t + \sin t,\ -3) =$$

$$= 4 \sin t \cos t - 2\sin^2 t + 2\cos^2 t - 18t,$$

si ottiene che

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(4\sin t\cos t - 2\sin^2 t + 2\cos^2 t - 18t\right)\, dt =$$

$$= \left[2\sin^2 t - t + \sin t\cos t + t + \sin t\cos t - 9t^2\right]_0^{2\pi} = -36\pi^2.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Secondo modo. Si osserva che F è conservativo. Infatti, F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso e inoltre è anche irrotazionale. Quindi per la condizione sufficiente per i campi vettoriali di classe C^1 risulta essere conservativo.

Un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ è

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy - z^2.$$

Per la proprietà dell'integrale di linea di un campo conservativo si ha che l'integrale di linea di F lungo γ è

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1,-1,-6\pi) - f(1,-1,0) = -36\pi^2.$$

Quiz 3. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = a$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Se $a < 0$ e $b = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

$\boxed{\text{B}}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{\text{C}}$ Se $a > 0$ e $b = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{\text{D}}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $b \neq 0$ il punto (x_0, y_0) è di sella per f.

$\boxed{\text{E}}$ Se $a = b = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{B}$. Infatti, il punto (x_0, y_0) non è detto che sia stazionario, e quindi se non è stazionario non può essere né di estremo locale né di sella.

A titolo d'esempio, si consideri la funzione $f(x,y) = x^4 + \frac{1}{2}ay^2 + bxy$ e il punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Per questo punto sono soddisfatte le ipotesi e $\nabla f(x_0, y_0) = (b, a)$.

Se $a \neq 0$ il punto non è stazionario e quindi non è né di estremo locale né di sella.

Se $a = b = 0$, allora è stazionario, ma $f(x,y) = x^4$ ed è un punto di minimo assoluto.

Quiz 4. La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{n} + 5}{\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^3}}$

$\boxed{\text{A}}$ diverge positivamente.

$\boxed{\text{B}}$ converge ad un numero positivo.

$\boxed{\text{C}}$ converge a zero.

$\boxed{\text{D}}$ converge ad un numero negativo.

$\boxed{\text{E}}$ diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Poiché $n^2 < n^3$ per ogni $n > 1$, la serie è a termini positivi, e quindi converge ad un numero positivo oppure diverge positivamente.

Essendo $\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ per $n \to +\infty$ e $\frac{1}{n} = o(5)$ per $n \to +\infty$ si ha che

$$\frac{\frac{1}{n} + 5}{\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^3}} \sim 5n^2, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data diverge. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 5. Siano $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 e radiale e $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 e conservativo. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Esiste $(x, y, z) \in \Omega$ tale che $\text{rotF}(x, y, z) \neq \text{rotG}(x, y, z)$.

$\boxed{\text{B}}$ Per ogni $(x, y, z) \in \Omega$ si ha che $\text{rotF}(x, y, z) = \text{rotG}(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$\boxed{\text{C}}$ Per ogni $(x, y, z) \in \Omega$ si ha che $\text{rotF}(x, y, z) = \text{rotG}(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

$\boxed{\text{D}}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{\text{E}}$ Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x, y, z) - G(x, y, z) = c$ per ogni $(x, y, z) \in \Omega$.

SVOLGIMENTO

Poiché G è di classe C^1 su Ω e conservativo, allora è irrotazionale. Inoltre, essendo F radiale e di classe C^1 su Ω, quindi anche continuo, anch'esso è conservativo e quindi irrotazionale. La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 6. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(4x^6 + 6y^4 - xy^4 - z,\ 4x^6 + 6y^4 + x^6 y - z,\ 8x^2 + 8y^2\right)$ e la superficie $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ z = 4x^6 + 6y^4,\ x^2 + y^2 \leq 9,\ x \leq 0\right\}$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z, vale

$\boxed{\text{A}}$ 54π.

$\boxed{\text{B}}$ 162π.

$\boxed{\text{C}}$ 3π.

$\boxed{\text{D}}$ 24π.

$\boxed{\text{E}}$ 72π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 4x^6 + 6y^4$, dove

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ x^2 + y^2 \leq 9,\ x \leq 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = \left(x, y, 4x^6 + 6y^4\right)$.

Si ha che

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ è

$$N_\sigma(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) = \left(-24x^5,\ -24y^3,\ 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi consideriamo

$$N(x,y) = N_\sigma(x,y) = \left(-24x^5,\ -24y^3,\ 1\right).$$

Ne segue che

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = F\left(x, y, 4x^6 + 6y^4\right) \cdot \left(-24x^5,\ -24y^3,\ 1\right) =$$
$$= \left(-xy^4,\ x^6 y,\ 8x^2 + 8y^2\right) \cdot \left(-24x^5,\ -24y^3,\ 1\right) = 8x^2 + 8y^2.$$

Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = 8 \int_K \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy = 8 \int_{K' = [0,3]\times[\pi/2,(3/2)\pi]} \rho^3\, d\rho\, d\vartheta = 8\pi \int_0^3 \rho^3\, d\rho = 8\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^3 = 162\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y) = \left(3xy^2 - \dfrac{9x}{x^2+y^2},\ 5x^2 y - \dfrac{9y}{x^2+y^2}\right)$ e l'insieme $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \geq 1,\ \frac{1}{9}x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

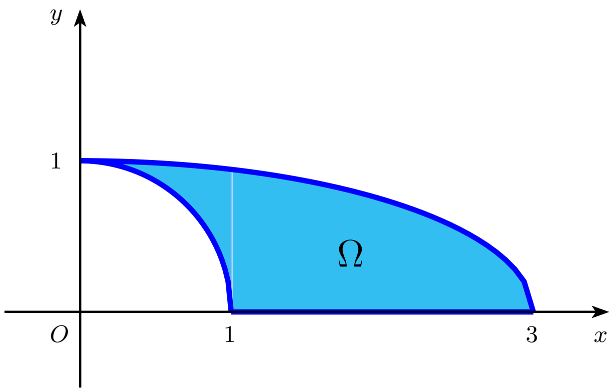
SVOLGIMENTO

Si ha che $\operatorname{dom}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e che F è di classe C^1 su $\operatorname{dom}(F)$. Inoltre $\Omega \subseteq \operatorname{dom}(F)$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\, dy = \int_\Omega 4xy\, dx\, dy.$$

Osserviamo che Ω è un insieme y-semplice. Infatti,

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq 1,\ \sqrt{1-y^2} \leq x \leq 3\sqrt{1-y^2}\right\}.$$



Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_\Omega 4xy\, dx\, dy = 4 \int_0^1 y \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{3\sqrt{1-y^2}} x\, dx\right) dy =$$

$$= 16 \int_0^1 y\left(1 - y^2\right) dy = 16 \left[-\frac{1}{4}\left(1 - x^2\right)^2\right]_0^1 = 4.$$

In alternativa, passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che

$$\int_\Omega 4xy\, dx\, dy = 4 \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta,$$

dove Ω' è dato dalle relazioni

$$(x,y) \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ \frac{1}{9}x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \rho^2 \geq 1 \\ \rho^2 \left(\frac{1}{9}\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) \leq 1 \\ \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leq \rho \leq \dfrac{3}{\sqrt{1 + 8\sin^2\vartheta}} \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2,\ 1 \leq \rho \leq \dfrac{3}{\sqrt{1 + 8\sin^2\vartheta}}\right\}$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = 4 \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta = 4 \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left(\int_1^{\frac{3}{\sqrt{1+8\sin^2\vartheta}}} \rho^3\, d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^{\frac{3}{\sqrt{1+8\sin^2\vartheta}}} d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left[\frac{81}{\left(1+8\sin^2\vartheta\right)^2} - 1\right] d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{81\cos\vartheta\sin\vartheta}{\left(1+8\sin^2\vartheta\right)^2} - \cos\vartheta\sin\vartheta\right] d\vartheta = \left[-\frac{81}{16\left(1+8\sin^2\vartheta\right)} - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = 4.$$

La risposta corretta è 4.

Domanda 8. Sia $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq 16, \ x^2+(y-2)^2 \geq 4, \ y \geq 0, \ 0 \leq z \leq \frac{3}{2}xy\right\}$.

Quanto vale il volume di W?

SVOLGIMENTO

Integrando per fili paralleli all'asse z si ha che il volume di W è

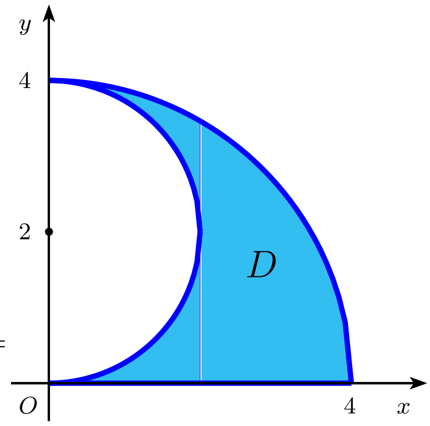
$$m(W) = \int_W 1\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_0^{\frac{3}{2}xy} 1\,dz\right) dx\,dy = \int_D \frac{3}{2}xy\,dx\,dy,$$

dove $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 16, \ x^2+(y-2)^2 \geq 4, \ x \geq 0, \ y \geq 0\right\}$.

Passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che

$$m(W) = \int_D \frac{3}{2}xy\,dx\,dy = \frac{3}{2}\int_{D'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta,$$

dove $D' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \ 4\sin\vartheta \leq \rho \leq 4\right\}$. Ne segue che



$$m(W) = \frac{3}{2}\int_{D'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta \left(\int_{4\sin\vartheta}^4 \rho^3\,d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{4\sin\vartheta}^4 d\vartheta = \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta\left(4^4 - 4^4\sin^4\vartheta\right) d\vartheta =$$

$$= 96\int_0^{\pi/2} \left(\cos\vartheta\sin\vartheta - \cos\vartheta\sin^5\vartheta\right) d\vartheta = 96\left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta - \frac{1}{6}\sin^6\vartheta\right]_0^{\pi/2} = 32.$$

La risposta corretta è 32.

In alternativa l'integrale doppio su D si può calcolare con la formula di integrazione sugli insiemi x-semplici, perché D si può scrivere come

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 4, \ \sqrt{16-(y-2)^2} \leq x \leq \sqrt{16-y^2}\right\}.$$
