

| Versione | Quiz 1 | Quiz 2 | Quiz 3 | Quiz 4 | Quiz 5 | Quiz 6 | Dom. 7  | Dom. 8  |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|
| V1       | D      | B      | B      | B      | B      | D      | $20\pi$ | $-4\pi$ |

**Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)**

Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( 4xy^2 + \frac{3x}{x^2 + y^2}, 4x^2y - \frac{6y}{x^2 + y^2} \right)$$

lungo il bordo dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

percorso in verso antiorario.

### SVOLGIMENTO

Si ha che  $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e che  $F$  è di classe  $C^1$  su  $\text{dom}(F)$ . Inoltre  $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$ .

Posto  $F = (f_1, f_2)$ , per il Teorema di Green si ha che

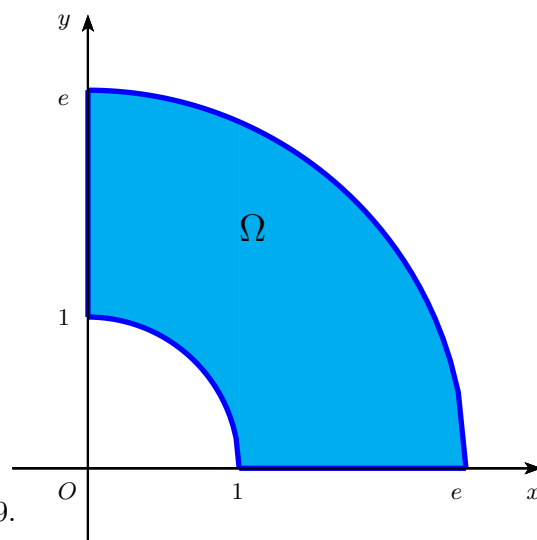
$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \\ &= \int_{\Omega} \frac{18xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \end{aligned}$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= 18 \int_{\Omega'} \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho} d\rho d\vartheta =$$

essendo  $\Omega' = [1, e] \times [0, \pi/2]$  si ha

$$= 18 \left[ \int_1^e \frac{1}{\rho} d\rho \right] \left( \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = 18 \left[ \log |\rho| \right]_1^e \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\pi/2} = 9.$$



|          |        |        |        |        |        |        |         |         |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|
| Versione | Quiz 1 | Quiz 2 | Quiz 3 | Quiz 4 | Quiz 5 | Quiz 6 | Dom. 7  | Dom. 8  |
| V2       | B      | D      | D      | D      | B      | C      | $10\pi$ | $18\pi$ |

**Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)**

Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( \frac{8x}{x^2 + y^2} - 6xy^2, -6x^2y - \frac{16y}{x^2 + y^2} \right)$$

lungo il bordo dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2, x \leq 0, y \geq 0\}$$

percorso in verso antiorario.

### SVOLGIMENTO

Si ha che  $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e che  $F$  è di classe  $C^1$  su  $\text{dom}(F)$ . Inoltre  $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$ .

Posto  $F = (f_1, f_2)$ , per il Teorema di Green si ha che

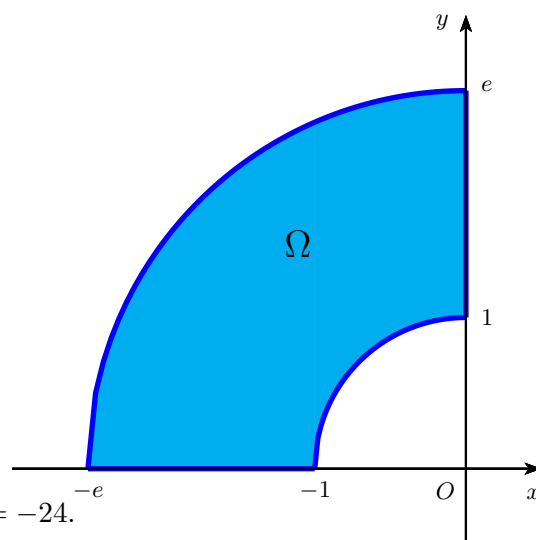
$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \\ &= \int_{\Omega} \frac{48xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \end{aligned}$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= 18 \int_{\Omega'} \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho} d\rho d\vartheta =$$

essendo  $\Omega' = [1, e] \times [-\pi/2, \pi]$  si ha

$$= 48 \left[ \int_1^e \frac{1}{\rho} d\rho \right] \left( \int_{-\pi/2}^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = 48 \left[ \log |\rho| \right]_1^e \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{-\pi/2}^{\pi} = -24.$$



|          |        |        |        |        |        |        |         |         |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|
| Versione | Quiz 1 | Quiz 2 | Quiz 3 | Quiz 4 | Quiz 5 | Quiz 6 | Dom. 7  | Dom. 8  |
| V3       | B      | C      | A      | B      | C      | C      | $12\pi$ | $20\pi$ |

**Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)**

Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( 5xy^2 + \frac{4x}{x^2 + y^2}, 5x^2y - \frac{8y}{x^2 + y^2} \right)$$

lungo il bordo dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

percorso in verso antiorario.

### SVOLGIMENTO

Si ha che  $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e che  $F$  è di classe  $C^1$  su  $\text{dom}(F)$ . Inoltre  $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$ .

Posto  $F = (f_1, f_2)$ , per il Teorema di Green si ha che

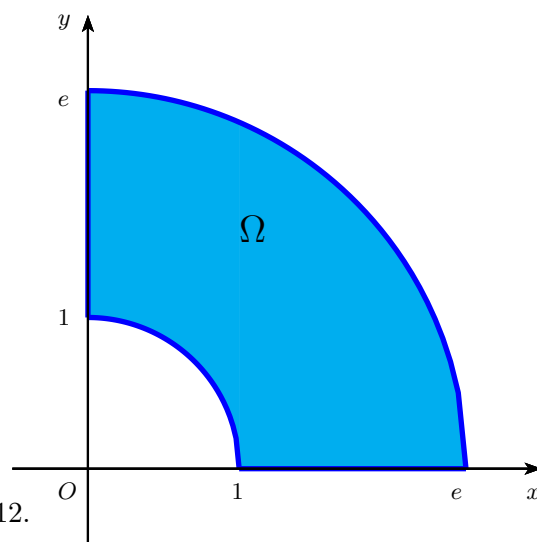
$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \\ &= \int_{\Omega} \frac{24xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \end{aligned}$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= 24 \int_{\Omega'} \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho} d\rho d\vartheta =$$

essendo  $\Omega' = [1, e] \times [0, \pi/2]$  si ha

$$= 24 \left[ \int_1^e \frac{1}{\rho} d\rho \right] \left( \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = 24 \left[ \log |\rho| \right]_1^e \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\pi/2} = 12.$$



| Versione | Quiz 1 | Quiz 2 | Quiz 3 | Quiz 4 | Quiz 5 | Quiz 6 | Dom. 7  | Dom. 8  |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|
| V4       | A      | E      | C      | B      | D      | D      | $16\pi$ | $27\pi$ |

**Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)**

Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( \frac{5x}{x^2 + y^2} - 7xy^2, -7x^2y - \frac{10y}{x^2 + y^2} \right)$$

lungo il bordo dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2, x \leq 0, y \geq 0\}$$

percorso in verso antiorario.

### SVOLGIMENTO

Si ha che  $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e che  $F$  è di classe  $C^1$  su  $\text{dom}(F)$ . Inoltre  $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$ .

Posto  $F = (f_1, f_2)$ , per il Teorema di Green si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \\ &= \int_{\Omega} \frac{30xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \end{aligned}$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= 30 \int_{\Omega'} \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho} d\rho d\vartheta =$$

essendo  $\Omega' = [1, e] \times [\pi/2, \pi]$  si ha

$$= 30 \left[ \int_1^e \frac{1}{\rho} d\rho \right] \left( \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = 30 \left[ \log |\rho| \right]_1^e \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\pi/2}^{\pi} = -15.$$

