

Versione: V1

Quiz 1. Sia $\Phi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $\Phi(r, u, v) = (r e^u \cos v, r e^u \sin v, r e^{-u})$.

Il determinante della matrice Jacobiana di Φ in (r, u, v) è

☐ A $2r^2 e^{2u}$.

☐ B $r^2 e^u$.

☐ C $r e^u$.

☐ D $2r^2 e^u$.

☐ E $2r e^u$.

SVOLGIMENTO

La funzione Φ è certamente differenziabile nel suo dominio. Posto $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, la matrice Jacobiana di Φ in ogni punto (r, u, v) del suo dominio è

$$J_{\Phi}(r, u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(r, u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(r, u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(r, u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u \cos v & r e^u \cos v & -r e^u \sin v \\ e^u \sin v & r e^u \sin v & r e^u \cos v \\ e^{-u} & -r e^{-u} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$\det J_{\Phi}(r, u, v) = \begin{vmatrix} e^u \cos v & r e^u \cos v & -r e^u \sin v \\ e^u \sin v & r e^u \sin v & r e^u \cos v \\ e^{-u} & -r e^{-u} & 0 \end{vmatrix} =$$

sviluppendolo rispetto all'ultima riga

$$= e^{-u} (r^2 e^{2u} \cos^2 v + r^2 e^{2u} \sin^2 v) + r e^{-u} (r e^{2u} \cos^2 v + r e^{2u} \sin^2 v) = 2r^2 e^u.$$

La risposta corretta è ☒ D.

Quiz 2. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{y}{z-2}, -\frac{x}{z-2}, z - 5(x^2 + y^2) \right)$ e la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 + 5(x^2 + y^2), 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Il flusso di F attraverso Σ , orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

☐ A 0.

☐ B 10π .

☐ C 15π .

☐ D 20π .

☐ E 5π .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 2 + 5(x^2 + y^2)$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 2 + 5(x^2 + y^2))$.

Si ha che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-10x, -10y, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Quindi consideriamo

$$N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = (-10x, -10y, 1).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F(x, y, 2 + 5(x^2 + y^2)) \cdot (-10x, -10y, 1) = \\ &= \left(\frac{y}{5(x^2 + y^2)}, -\frac{x}{5(x^2 + y^2)}, 2 \right) \cdot (-10x, -10y, 1) = 2. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K 2 \, dx \, dy = 2m(K) = 10\pi.$$

La risposta corretta è **B**.

Quiz 3. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2x^2 + y^4} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^4 + 4}, 0 \leq y \leq x\}$. L'integrale $\int_{\Omega} \frac{18yz}{x+2} \, dx \, dy \, dz$ vale

A 24. **B** 6. **C** 1. **D** 12. **E** 3.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sqrt{2x^2 + y^4} \leq \sqrt{x^2 + y^4 + 4} \iff x^2 \leq 4 \iff |x| \leq 2.$$

Quindi

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2x^2 + y^4} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^4 + 4}, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 2\}$$

ed è idoneo per integrare per fili paralleli all'asse z . Posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 2\}$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{18yz}{x+2} \, dx \, dy \, dz &= 18 \int_D \frac{y}{x+2} \left(\int_{\sqrt{2x^2+y^4}}^{\sqrt{x^2+y^4+4}} z \, dz \right) \, dx \, dy = 18 \int_D \frac{y}{x+2} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{\sqrt{2x^2+y^4}}^{\sqrt{x^2+y^4+4}} \, dx \, dy = \\ &= 9 \int_D \frac{y}{x+2} (4 - x^2) \, dx \, dy = 9 \int_D (2 - x)y \, dx \, dy = \end{aligned}$$

essendo D un insieme y -semplice si ottiene

$$= 9 \int_0^2 (2 - x) \left(\int_0^x y \, dy \right) \, dx = 9 \int_0^2 (2 - x) \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^x \, dx = \frac{9}{2} \int_0^2 (2x^2 - x^3) \, dx = \frac{9}{2} \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = 6.$$

La risposta corretta è **B**.

Quiz 4. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 .

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A Se Ω è semplicemente connesso, allora F è conservativo.

B Se F non è irrotazionale, allora F non è conservativo.

- ☐ **C** Se F è irrotazionale, allora F è conservativo.
- ☐ **D** Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo.
- ☐ **E** Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per la condizione necessaria affinché un campo vettoriale di classe C^1 sia conservativo, se F non è irrotazionale, allora F non è conservativo. La risposta corretta è ☒ **B**.

Quiz 5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 indivergente e per ogni $a > 0$ sia $\Omega_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - a)^2 + z^2 \leq 9\}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Nessuna delle altre è corretta.
- ☐ **B** Se $a > 4$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a è zero.
- ☐ **C** Se $2 < a < 4$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a è zero.
- ☐ **D** Se $a < 1$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a è zero.
- ☐ **E** Se $1 < a < 3$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a è zero.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 ed è indivergente sul suo dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ che non è stellato. Quindi non possiamo concludere nulla sulla solenoidalità di F sul proprio dominio. Però certamente F è solenoidale su ogni sottoinsieme stellato del dominio.

Osserviamo che l'insieme Ω_a è la sfera di centro il punto $(0, a, 0)$ e raggio $R = 3$. Quindi se $a > 3$, allora questa sfera è tutta contenuta nel semispazio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$. Infatti,

$$x^2 + (y - a)^2 + z^2 \leq 9 \iff |y - a| \leq \sqrt{9 - x^2 - z^2} \iff a - \sqrt{9 - x^2 - z^2} \leq y \leq a + \sqrt{9 - x^2 - z^2},$$

da cui segue che

$$y \geq a - \underbrace{\sqrt{9 - x^2 - z^2}}_{\leq 3} \geq a - 3 > 0.$$

Poiché il semispazio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$ è stellato, risulta che F ristretto a questo semispazio è solenoidale, e quindi il flusso, sia entrante che uscente, di F da una superficie chiusa contenuta nel semispazio è zero.

Poiché per $a > 4$ il bordo di Ω_a è una superficie chiusa contenuta in questo semispazio, si deduce che il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a è zero. La risposta corretta è ☒ **B**.

In alternativa si può osservare che il Teorema di Gauss (o della divergenza) si può applicare per calcolare il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a quando $\Omega_a \subseteq \text{dom}(F)$, e questo succede solo se $a > 3$, e quindi certamente per $a > 4$.

Infine, osserviamo che le altre risposte non sono corrette. Infatti, il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

è un campo vettoriale di classe C^1 ed è indivergente sul proprio dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, ma il flusso uscente di F dal bordo di un qualunque aperto con bordo D contenente $(0, 0, 0)$, e quindi tale che $D \not\subseteq \text{dom}(F)$, vale 4π , e quindi non è zero. Questa situazione si presenta per l'insieme Ω_a quando $a < 3$, e quindi le altre risposte sono errate.

Quiz 6. La serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (\pi - e)^n$

☐ **A** converge a $\frac{e - \pi}{\pi + 1 - e}$.

☐ **B** è indeterminata.

☐ **C** converge a $\frac{1}{\pi + 1 - e}$.

☐ **D** converge a $\frac{(e - \pi)^2}{\pi + 1 - e}$.

☐ **E** converge a $\frac{1}{\pi - e}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (\pi - e)^n = \sum_{n=2}^{\infty} (e - \pi)^n$$

che è una serie geometrica di ragione $a = e - \pi$. Osserviamo che $|a| = \pi - e < 1$ perché $\pi < 7/2$ ed $e > 5/2$. Poiché la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge se e solo se $|a| < 1$, e in tal caso la somma della serie è $\frac{1}{1-a}$, la serie data converge e la sua somma è

$$\sum_{n=2}^{\infty} (e - \pi)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (e - \pi)^n - (1 + e - \pi) = \frac{1}{1 - (e - \pi)} - (1 + e - \pi) = \frac{(e - \pi)^2}{\pi + 1 - e}.$$

La risposta corretta è ☒ **D**.

Domanda 7.

Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = (y \log(1 + z^2) - 10xz, x \log(1 + z^2) - 5yz, 10z^2 - e^{xy})$ e l'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω ?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = 5z$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 5z \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 5 \int_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = 5 \int_{\Omega'} \rho z \, d\rho \, d\vartheta \, dz,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad \rho \leq z \leq 2\}$.

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = 5 \int_{\Omega'} \rho z \, d\rho \, d\vartheta \, dz = 10\pi \int_0^2 \rho \left(\int_{\rho}^2 z \, dz \right) d\rho = 10\pi \int_0^2 \rho \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{\rho}^2 d\rho =$$

$$= 5\pi \int_0^2 \rho (4 - \rho^2) d\rho = 5\pi \left[-\frac{1}{4} (4 - \rho^2)^2 \right]_0^2 = 20\pi.$$

La risposta corretta è 20π .

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, z \geq 0\}$ e il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{5y}{x^2 + y^2 + 1} + 3xz, -\frac{5x}{x^2 + y^2 + 1} - 3yz, xy(e^z - 1) \right)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ , orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

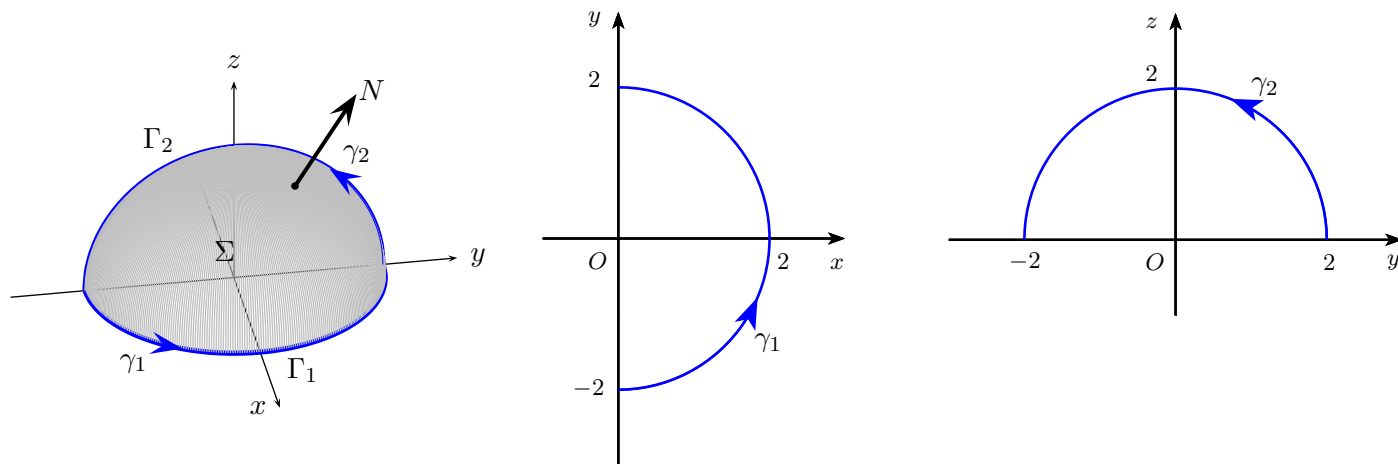
SVOLGIMENTO

Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP.$$

Osserviamo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 0, x \geq 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 4, x = 0, z \geq 0\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve parametriche che parametrizzano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 in modo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sia percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ , che deve formare un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Si ha che $\gamma_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $\gamma_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt,$$

dove

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(2 \cos t, 2 \sin t, 0) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) = (2 \sin t, -2 \cos t, 0) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) = -4.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt = -4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = -4\pi.$$

Inoltre si ha che $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $\gamma_2(t) = (0, 2 \cos t, 2 \sin t)$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^{\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt,$$

dove

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(0, 2 \cos t, 2 \sin t) \cdot (0, -2 \sin t, 2 \cos t) = \\ &= \left(\frac{10 \cos t}{4 \cos^2 t + 1}, -12 \cos t \sin t, 0 \right) \cdot (0, -2 \sin t, 2 \cos t) = 24 \cos t \sin^2 t. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt = \int_0^\pi 24 \cos t \sin^2 t dt = 24 \left[\frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^\pi = 0.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma = \int_{\partial \Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = -4\pi.$$

La risposta corretta è -4π .

Versione V2

Quiz 1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 indivergente e per ogni $b > 0$ sia $\Omega_b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-b)^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Nessuna delle altre è corretta.
- ☐ **B** Se $b > 6$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b è zero.
- ☐ **C** Se $b < 3$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b è zero.
- ☐ **D** Se $4 < b < 6$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b è zero.
- ☐ **E** Se $3 < b < 5$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b è zero.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 ed è indivergente sul suo dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ che non è stellato. Quindi non possiamo concludere nulla sulla solenoidalità di F sul proprio dominio. Però certamente F è solenoidale su ogni sottoinsieme stellato del dominio.

Osserviamo che l'insieme Ω_b è la sfera di centro il punto $(b,0,0)$ e raggio $R = 5$. Quindi se $b > 5$, allora questa sfera è tutta contenuta nel semispazio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$. Infatti,

$$(x-b)^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \iff |x-b| \leq \sqrt{25-y^2-z^2} \iff b - \sqrt{25-y^2-z^2} \leq x \leq b + \sqrt{25-y^2-z^2},$$

da cui segue che

$$x \geq b - \underbrace{\sqrt{25-y^2-z^2}}_{\leq 5} \geq b-5 > 0.$$

Poiché il semispazio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ è stellato, risulta che F ristretto a questo semispazio è solenoidale, e quindi il flusso, sia entrante che uscente, di F da una superficie chiusa contenuta nel semispazio è zero.

Poiché per $b > 6$ il bordo di Ω_b è una superficie chiusa contenuta in questo semispazio, si deduce che il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b è zero. La risposta corretta è **B**.

In alternativa si può osservare che il Teorema di Gauss (o della divergenza) si può applicare per calcolare il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b quando $\Omega_b \subseteq \text{dom}(F)$, e questo succede solo se $b > 5$, e quindi certamente per $b > 6$.

Infine, osserviamo che le altre risposte non sono corrette. Infatti, il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

è un campo vettoriale di classe C^1 ed è indivergente sul proprio dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, ma il flusso uscente di F dal bordo di un qualunque aperto con bordo D contenente $(0,0,0)$, e quindi tale che $D \not\subseteq \text{dom}(F)$, vale 4π , e quindi non è zero. Questa situazione si presenta per l'insieme Ω_b quando $b < 5$, e quindi le altre risposte sono errate.

Quiz 2. Sia $\Phi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $\Phi(r,u,v) = (r e^{-u} \cos v, r e^{-u} \sin v, r e^u)$.

Il determinante della matrice Jacobiana di Φ in (r,u,v) è

- ☐ **A** $-2r^2 e^{-2u}$.
- ☐ **B** $-r^2 e^{-u}$.
- ☐ **C** $-r e^{-u}$.
- ☐ **D** $-2r^2 e^{-u}$.
- ☐ **E** $-2r e^{-u}$.

SVOLGIMENTO

La funzione Φ è certamente differenziabile nel suo dominio. Posto $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, la matrice Jacobiana di Φ in ogni punto (r, u, v) del suo dominio è

$$J_{\Phi}(r, u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(r, u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(r, u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(r, u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-u} \cos v & -r e^{-u} \cos v & -r e^{-u} \sin v \\ e^{-u} \sin v & -r e^{-u} \sin v & r e^{-u} \cos v \\ e^u & r e^u & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$\det J_{\Phi}(r, u, v) = \begin{vmatrix} e^{-u} \cos v & -r e^{-u} \cos v & -r e^{-u} \sin v \\ e^{-u} \sin v & -r e^{-u} \sin v & r e^{-u} \cos v \\ e^u & r e^u & 0 \end{vmatrix} =$$

sviluppandolo rispetto all'ultima riga

$$= e^u \left(-r^2 e^{-2u} \cos^2 v - r^2 e^{-2u} \sin^2 v \right) - r e^u \left(r e^{-2u} \cos^2 v + r e^{-2u} \sin^2 v \right) = -2r^2 e^{-u}.$$

La risposta corretta è **D**.

Quiz 3. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{y}{z+2}, -\frac{x}{z+2}, 9(x^2 + y^2) - z \right)$ e la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 9(x^2 + y^2) - 2, 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$.

Il flusso di F attraverso Σ , orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

A 7π . **B** 0 . **C** 56π . **D** 14π . **E** 28π .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 9(x^2 + y^2) - 2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 9(x^2 + y^2) - 2)$.

Si ha che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-18x, -18y, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Quindi consideriamo

$$N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = (-18x, -18y, 1).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F(x, y, 9(x^2 + y^2) - 2) \cdot (-18x, -18y, 1) = \\ &= \left(\frac{y}{9(x^2 + y^2)}, -\frac{x}{9(x^2 + y^2)}, 2 \right) \cdot (-18x, -18y, 1) = 2. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K 2 \, dx \, dy = 2m(K) = 14\pi.$$

La risposta corretta è **D**.

Quiz 4. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 .

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Se F non è conservativo, allora F non è irrotazionale.
- ☐ **B** Se Ω è semplicemente connesso, allora F è conservativo.
- ☐ **C** Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo.
- ☐ **D** Se F è conservativo, allora F è irrotazionale.
- ☐ **E** Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per la condizione necessaria affinché un campo vettoriale di classe C^1 sia conservativo, se F è conservativo, allora F è irrotazionale. La risposta corretta è ☒ **D**.

Quiz 5. La serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

- ☐ **A** converge a $-\frac{e}{\pi}$.
- ☐ **B** converge a $\frac{e^2}{\pi(\pi+e)}$.
- ☐ **C** converge a $\frac{\pi}{\pi+e}$.
- ☐ **D** è indeterminata.
- ☐ **E** converge a $-\frac{e}{\pi+e}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{\pi}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{e}{\pi}\right)^n$$

che è una serie geometrica di ragione $a = -\frac{e}{\pi}$. Osserviamo che $|a| = \frac{e}{\pi} < 1$ perché $0 < e < \pi$. Poiché la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge se e solo se $|a| < 1$, e in tal caso la somma della serie è $\frac{1}{1-a}$, la serie data converge e la sua somma è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{e}{\pi}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{e}{\pi}\right)^n - \left(1 - \frac{e}{\pi}\right) = \frac{1}{1 + \frac{e}{\pi}} - \left(1 - \frac{e}{\pi}\right) = \frac{e^2}{\pi(\pi+e)}.$$

La risposta corretta è ☒ **B**.

Quiz 6. Sia $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^4 + 2y^2} \leq z \leq 2\sqrt{x^4 + y^2 + 1}, 0 \leq x \leq y \right\}$. L'integrale $\int_{\Omega} \frac{24xz}{y+1} dx dy dz$ vale

- ☐ **A** 1.
- ☐ **B** 4.
- ☐ **C** 2.
- ☐ **D** 8.
- ☐ **E** 16.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$2\sqrt{x^4 + 2y^2} \leq 2\sqrt{x^4 + y^2 + 1} \iff y^2 \leq 1 \iff |y| \leq 1.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^4 + 2y^2} \leq z \leq 2\sqrt{x^4 + y^2 + 1}, 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

ed è idoneo per integrare per fili paralleli all'asse z . Posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{24xz}{y+1} dx dy dz &= 24 \int_D \frac{x}{y+1} \left(\int_{2\sqrt{x^4+2y^2}}^{2\sqrt{x^4+y^2+1}} z dz \right) dx dy = 24 \int_D \frac{x}{y+1} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{2\sqrt{x^4+2y^2}}^{2\sqrt{x^4+y^2+1}} dx dy = \\ &= 12 \int_D \frac{x}{y+1} (4 - 4y^2) dx dy = 48 \int_D (1-y)x dx dy = \end{aligned}$$

essendo D un insieme x -semplice si ottiene

$$= 48 \int_0^1 (1-y) \left(\int_0^y x dx \right) dy = 48 \int_0^1 (1-y) \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^y dy = 24 \int_0^1 (y^2 - y^3) dy = 24 \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = 2.$$

La risposta corretta è C.

Domanda 7. Si considerino l'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$ e il campo vettoriale $F(x, y, z) = (z \log(1 + y^2) - 10xz, z \log(1 + x^2) - 20yz, 20z^2 + \cos(xy))$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω ?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) dx dy dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = 10z$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega} 10z dx dy dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} \quad \rho \geq 0, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, z \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) dx dy dz = 10 \int_{\Omega} z dx dy dz = 10 \int_{\Omega'} \rho z d\rho d\vartheta dz,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 2\rho \leq z \leq 2\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n d\sigma &= 10 \int_{\Omega'} \rho z d\rho d\vartheta dz = 20\pi \int_0^1 \rho \left(\int_{2\rho}^2 z dz \right) d\rho = 20\pi \int_0^1 \rho \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{2\rho}^2 d\rho = \\ &= 10\pi \int_0^1 \rho (4 - 4\rho^2) d\rho = 40\pi \left[-\frac{1}{4} (1 - \rho^2)^2 \right]_0^1 = 10\pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è 10π .

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, y \geq 0, z \geq 0\}$ e il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(6xz - \frac{20y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{20x}{x^2 + y^2 + 1} - 6yz, xy(1 - \cos z)\right)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ , orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

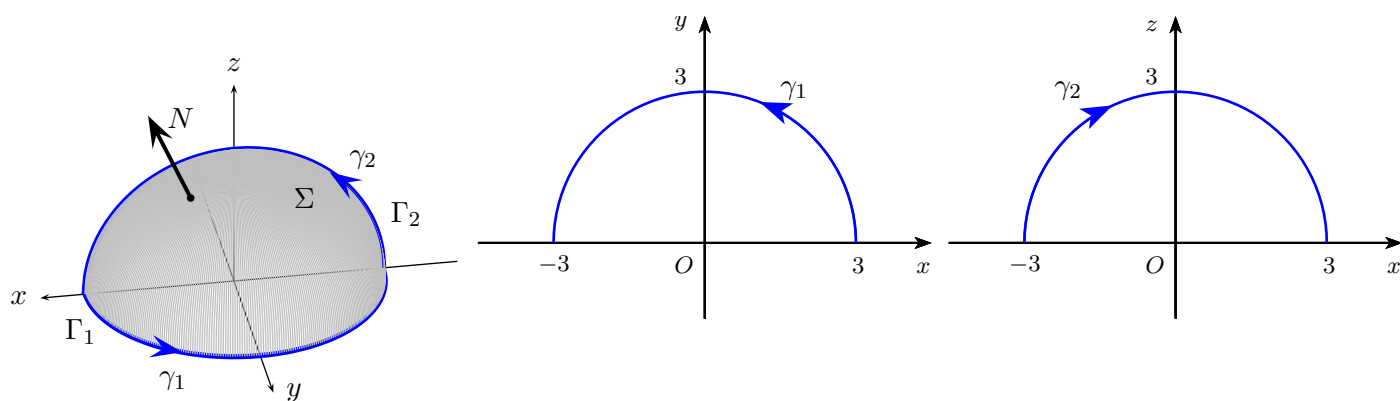
SVOLGIMENTO

Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP.$$

Osserviamo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9, z = 0, y \geq 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 9, y = 0, z \geq 0\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve parametriche che parametrizzano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 in modo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sia percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ , che deve formare un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Si ha che $\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $\gamma_1(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 0)$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt,$$

dove

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(3 \cos t, 3 \sin t, 0) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) = (-6 \sin t, 6 \cos t, 0) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) = 18.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt = 18 \int_0^\pi 1 \, dt = 18\pi.$$

Inoltre si ha che $\gamma_2 : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $\gamma_2(t) = (3 \cos t, 0, -3 \sin t)$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_\pi^{2\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, dt,$$

dove

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(3 \cos t, 0, -3 \sin t) \cdot (-3 \sin t, 0, -3 \cos t) = \\ &= \left(-54 \cos t \sin t, \frac{60 \cos t}{9 \cos^2 t + 1}, 0\right) \cdot (-3 \sin t, 0, -3 \cos t) = 162 \cos t \sin^2 t. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt = \int_\pi^{2\pi} 162 \cos t \sin^2 t dt = 162 \left[\frac{1}{3} \sin^3 t \right]_\pi^{2\pi} = 0.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 18\pi.$$

La risposta corretta è 18π .

Versione V3

Quiz 1. Sia $\Phi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $\Phi(r, u, v) = (r e^u \sin v, r e^u \cos v, r e^{-u})$.

Il determinante della matrice Jacobiana di Φ in (r, u, v) è

- ☐ A $-2r e^u$. ☐ B $-2r^2 e^u$. ☐ C $-r^2 e^u$. ☐ D $-2r^2 e^{2u}$. ☐ E $-r e^u$.

SVOLGIMENTO

La funzione Φ è certamente differenziabile nel suo dominio. Posto $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, la matrice Jacobiana di Φ in ogni punto (r, u, v) del suo dominio è

$$J_{\Phi}(r, u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(r, u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(r, u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(r, u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u \sin v & r e^u \sin v & r e^u \cos v \\ e^u \cos v & r e^u \cos v & -r e^u \sin v \\ e^{-u} & -r e^{-u} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$\det J_{\Phi}(r, u, v) = \begin{vmatrix} e^u \sin v & r e^u \sin v & r e^u \cos v \\ e^u \cos v & r e^u \cos v & -r e^u \sin v \\ e^{-u} & -r e^{-u} & 0 \end{vmatrix} =$$

sviluppandolo rispetto all'ultima riga

$$= e^{-u} (-r^2 e^{2u} \sin^2 v - r^2 e^{2u} \cos^2 v) + r e^{-u} (-r e^{2u} \sin^2 v - r e^{2u} \cos^2 v) = -2r^2 e^u.$$

La risposta corretta è ☒ B.

Quiz 2. La serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (e - \pi)^n$

☐ A è indeterminata.

☐ B converge a $\frac{\pi - e}{e + 1 - \pi}$.

☐ C converge a $\frac{(\pi - e)^2}{e + 1 - \pi}$.

☐ D converge a $\frac{1}{e - \pi}$.

☐ E converge a $\frac{1}{e + 1 - \pi}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (e - \pi)^n = \sum_{n=2}^{\infty} (\pi - e)^n$$

che è una serie geometrica di ragione $a = \pi - e$. Osserviamo che $|a| = \pi - e < 1$ perché $\pi < 7/2$ ed $e > 5/2$.

Poiché la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge se e solo se $|a| < 1$, e in tal caso la somma della serie è $\frac{1}{1-a}$, la serie data converge e la sua somma è

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\pi - e)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\pi - e)^n - (1 + \pi - e) = \frac{1}{1 - (\pi - e)} - (1 + \pi - e) = \frac{(\pi - e)^2}{e + 1 - \pi}.$$

La risposta corretta è ☒ C.

Quiz 3. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 .

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Se F non è irrotazionale, allora F non è conservativo.
- ☐ **B** Se Ω è semplicemente connesso, allora F è conservativo.
- ☐ **C** Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo.
- ☐ **D** Se F è irrotazionale, allora F è conservativo.
- ☐ **E** Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per la condizione necessaria affinché un campo vettoriale di classe C^1 sia conservativo, se F non è irrotazionale, allora F non è conservativo. La risposta corretta è ☒ **A**.

Quiz 4. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{z-4}, \frac{x}{z-4}, z - 7(x^2 + y^2) \right)$ e la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 + 7(x^2 + y^2), 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Il flusso di F attraverso Σ , orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

- ☐ **A** 10π .
- ☐ **B** 20π .
- ☐ **C** 0 .
- ☐ **D** 5π .
- ☐ **E** 40π .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 4 + 7(x^2 + y^2)$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 4 + 7(x^2 + y^2))$.

Si ha che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-14x, -14y, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Quindi consideriamo

$$N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = (-14x, -14y, 1).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F(x, y, 4 + 7(x^2 + y^2)) \cdot (-14x, -14y, 1) = \\ &= \left(-\frac{y}{7(x^2 + y^2)}, \frac{x}{7(x^2 + y^2)}, 4 \right) \cdot (-14x, -14y, 1) = 4. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K 4 \, dx \, dy = 4m(K) = 20\pi.$$

La risposta corretta è **B**.

Quiz 5. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{3x^2 + 5y^4} \leq z \leq \sqrt{2x^2 + 5y^4 + 4}, 0 \leq y \leq x\}$. L'integrale $\int_{\Omega} \frac{24yz}{x+2} dx dy dz$ vale

A 16.

B 32.

C 8.

D 4.

E 1.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sqrt{3x^2 + 5y^4} \leq \sqrt{2x^2 + 5y^4 + 4} \iff x^2 \leq 4 \iff |x| \leq 2.$$

Quindi

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{3x^2 + 5y^4} \leq z \leq \sqrt{2x^2 + 5y^4 + 4}, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 2\}$$

ed è idoneo per integrare per fili paralleli all'asse z . Posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 2\}$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{24yz}{x+2} dx dy dz &= 24 \int_D \frac{y}{x+2} \left(\int_{\sqrt{3x^2+5y^4}}^{\sqrt{2x^2+5y^4+4}} z dz \right) dx dy = 24 \int_D \frac{y}{x+2} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{\sqrt{3x^2+5y^4}}^{\sqrt{2x^2+5y^4+4}} dx dy = \\ &= 12 \int_D \frac{y}{x+2} (4 - x^2) dx dy = 12 \int_D (2 - x)y dx dy = \end{aligned}$$

essendo D un insieme y -semplice si ottiene

$$= 12 \int_0^2 (2 - x) \left(\int_0^x y dy \right) dx = 12 \int_0^2 (2 - x) \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^x dx = 6 \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = 6 \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = 8.$$

La risposta corretta è **C**.

Quiz 6. Sia $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 indivergente e per ogni $a > 0$ sia $\Omega_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - a)^2 + z^2 \leq 16\}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A Se $3 < a < 5$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a è zero.

B Nessuna delle altre è corretta.

C Se $a > 5$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a è zero.

D Se $2 < a < 4$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a è zero.

E Se $a < 2$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a è zero.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 ed è indivergente sul suo dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ che non è stellato. Quindi non possiamo concludere nulla sulla solenoidalità di F sul proprio dominio. Però certamente F è solenoidale su ogni sottoinsieme stellato del dominio.

Osserviamo che l'insieme Ω_a è la sfera di centro il punto $(0, a, 0)$ e raggio $R = 4$. Quindi se $a > 4$, allora questa sfera è tutta contenuta nel semispazio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$. Infatti,

$$x^2 + (y - a)^2 + z^2 \leq 16 \iff |y - a| \leq \sqrt{16 - x^2 - z^2} \iff a - \sqrt{16 - x^2 - z^2} \leq y \leq a + \sqrt{16 - x^2 - z^2},$$

da cui segue che

$$y \geq a - \underbrace{\sqrt{16 - x^2 - z^2}}_{\leq 4} \geq a - 4 > 0.$$

Poiché il semispazio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$ è stellato, risulta che F ristretto a questo semispazio è solenoidale, e quindi il flusso, sia entrante che uscente, di F da una superficie chiusa contenuta nel semispazio è zero.

Poiché per $a > 5$ il bordo di Ω_a è una superficie chiusa contenuta in questo semispazio, si deduce che il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a è zero. La risposta corretta è **C**.

In alternativa si può osservare che il Teorema di Gauss (o della divergenza) si può applicare per calcolare il flusso uscente di F dal bordo di Ω_a quando $\Omega_a \subseteq \text{dom}(F)$, e questo succede solo se $a > 4$, e quindi certamente per $a > 5$.

Infine, osserviamo che le altre risposte non sono corrette. Infatti, il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

è un campo vettoriale di classe C^1 ed è indivergente sul proprio dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, ma il flusso uscente di F dal bordo di un qualunque aperto con bordo D contenente $(0, 0, 0)$, e quindi tale che $D \not\subseteq \text{dom}(F)$, vale 4π , e quindi non è zero. Questa situazione si presenta per l'insieme Ω_a quando $a < 4$, e quindi le altre risposte sono errate.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = (y \log(1 + z^2) - 6xz, x \log(1 + z^2) - 3yz, 6z^2 + e^{xy})$ e l'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω ?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = 3z$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 3z \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 3 \int_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = 3 \int_{\Omega'} \rho z \, d\rho \, d\vartheta \, dz,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad \rho \leq z \leq 2\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 3 \int_{\Omega'} \rho z \, d\rho \, d\vartheta \, dz = 6\pi \int_0^2 \rho \left(\int_{\rho}^2 z \, dz \right) d\rho = 6\pi \int_0^2 \rho \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{\rho}^2 d\rho = \\ &= 3\pi \int_0^2 \rho (4 - \rho^2) \, d\rho = 3\pi \left[-\frac{1}{4} (4 - \rho^2)^2 \right]_0^2 = 12\pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è 12π .

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, z \geq 0\}$ e il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(-\frac{25y}{x^2 + y^2 + 1} - 4xz, 4yz + \frac{25x}{x^2 + y^2 + 1}, xy(1 - e^z) \right)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ , orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

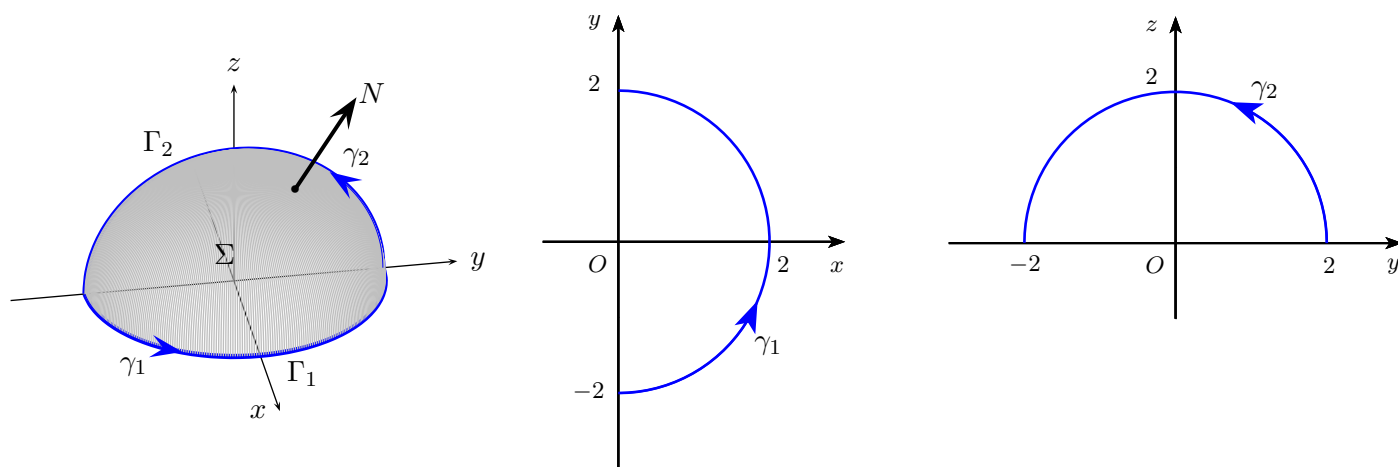
SVOLGIMENTO

Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP.$$

Osserviamo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 0, x \geq 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 4, x = 0, z \geq 0\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve parametriche che parametrizzano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 in modo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sia percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ , che deve formare un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Si ha che $\gamma_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $\gamma_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt,$$

dove

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(2 \cos t, 2 \sin t, 0) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) = (-10 \sin t, 10 \cos t, 0) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) = 20.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt = 20 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = 20\pi.$$

Inoltre si ha che $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $\gamma_2(t) = (0, 2 \cos t, 2 \sin t)$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, dt,$$

dove

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(0, 2 \cos t, 2 \sin t) \cdot (0, -2 \sin t, 2 \cos t) = \\ &= \left(-\frac{50 \cos t}{4 \cos^2 t + 1}, 16 \cos t \sin t, 0 \right) \cdot (0, -2 \sin t, 2 \cos t) = -32 \cos t \sin^2 t. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt = -32 \int_0^\pi \cos t \sin^2 t dt = -32 \left[\frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^\pi = 0.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 20\pi.$$

La risposta corretta è 20π .

Versione V4

Quiz 1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 indivergente e per ogni $b > 0$ sia $\Omega_b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-b)^2 + y^2 + z^2 \leq 36\}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Se $b > 7$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b è zero.
- ☐ **B** Se $4 < b < 6$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b è zero.
- ☐ **C** Se $b < 4$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b è zero.
- ☐ **D** Nessuna delle altre è corretta.
- ☐ **E** Se $5 < b < 7$, allora il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b è zero.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 ed è indivergente sul suo dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ che non è stellato. Quindi non possiamo concludere nulla sulla solenoidalità di F sul proprio dominio. Però certamente F è solenoidale su ogni sottoinsieme stellato del dominio.

Osserviamo che l'insieme Ω_b è la sfera di centro il punto $(b,0,0)$ e raggio $R = 6$. Quindi se $b > 6$, allora questa sfera è tutta contenuta nel semispazio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$. Infatti,

$$(x-b)^2 + y^2 + z^2 \leq 36 \iff |x-b| \leq \sqrt{36 - y^2 - z^2} \iff b - \sqrt{36 - y^2 - z^2} \leq x \leq b + \sqrt{36 - y^2 - z^2},$$

da cui segue che

$$x \geq b - \underbrace{\sqrt{36 - y^2 - z^2}}_{\leq 6} \geq b - 6 > 0.$$

Poiché il semispazio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ è stellato, risulta che F ristretto a questo semispazio è solenoidale, e quindi il flusso, sia entrante che uscente, di F da una superficie chiusa contenuta nel semispazio è zero.

Poiché per $b > 7$ il bordo di Ω_b è una superficie chiusa contenuta in questo semispazio, si deduce che il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b è zero. La risposta corretta è **A**.

In alternativa si può osservare che il Teorema di Gauss (o della divergenza) si può applicare per calcolare il flusso uscente di F dal bordo di Ω_b quando $\Omega_b \subseteq \text{dom}(F)$, e questo succede solo se $b > 6$, e quindi certamente per $b > 7$.

Infine, osserviamo che le altre risposte non sono corrette. Infatti, il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

è un campo vettoriale di classe C^1 ed è indivergente sul proprio dominio $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, ma il flusso uscente di F dal bordo di un qualunque aperto con bordo D contenente $(0,0,0)$, e quindi tale che $D \not\subseteq \text{dom}(F)$, vale 4π , e quindi non è zero. Questa situazione si presenta per l'insieme Ω_b quando $b < 6$, e quindi le altre risposte sono errate.

Quiz 2. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 .

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Nessuna delle altre è corretta.
- ☐ **B** Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo.
- ☐ **C** Se Ω è semplicemente connesso, allora F è conservativo.
- ☐ **D** Se F non è conservativo, allora F non è irrotazionale.
- ☐ **E** Se F è conservativo, allora F è irrotazionale.

SVOLGIMENTO

Per la condizione necessaria affinché un campo vettoriale di classe C^1 sia conservativo, se F è conservativo, allora F è irrotazionale. La risposta corretta è **E**.

Quiz 3. Sia $\Phi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $\Phi(r, u, v) = (r e^{-u} \sin v, r e^{-u} \cos v, r e^u)$.

Il determinante della matrice Jacobiana di Φ in (r, u, v) è

A $2r e^{-u}$. **B** $r e^{-u}$. **C** $2r^2 e^{-u}$. **D** $2r^2 e^{-2u}$. **E** $r^2 e^{-u}$.

SVOLGIMENTO

La funzione Φ è certamente differenziabile nel suo dominio. Posto $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, la matrice Jacobiana di Φ in ogni punto (r, u, v) del suo dominio è

$$J_{\Phi}(r, u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(r, u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(r, u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(r, u, v) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(r, u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-u} \sin v & -r e^{-u} \sin v & r e^{-u} \cos v \\ e^{-u} \cos v & -r e^{-u} \cos v & -r e^{-u} \sin v \\ e^u & r e^u & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$\det J_{\Phi}(r, u, v) = \begin{vmatrix} e^{-u} \sin v & -r e^{-u} \sin v & r e^{-u} \cos v \\ e^{-u} \cos v & -r e^{-u} \cos v & -r e^{-u} \sin v \\ e^u & r e^u & 0 \end{vmatrix} =$$

sviluppandolo rispetto all'ultima riga

$$= e^u (r^2 e^{-2u} \sin^2 v + r^2 e^{-2u} \cos^2 v) - r e^u (-r e^{-2u} \sin^2 v - r e^{-2u} \cos^2 v) = 2r^2 e^{-u}.$$

La risposta corretta è **C**.

Quiz 4. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{z+4}, \frac{x}{z+4}, 11(x^2 + y^2) - z\right)$ e la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 11(x^2 + y^2) - 4, 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$.

Il flusso di F attraverso Σ , orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

A 0.
B 28π .
C 7π .
D 4π .
E 56π .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 11(x^2 + y^2) - 4$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 11(x^2 + y^2) - 4)$.

Si ha che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-22x, -22y, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Quindi consideriamo

$$N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = (-22x, -22y, 1).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F(x, y, 11(x^2 + y^2) - 4) \cdot (-22x, -22y, 1) = \\ &= \left(\frac{y}{11(x^2 + y^2)}, -\frac{x}{11(x^2 + y^2)}, 4 \right) \cdot (-22x, -22y, 1) = 4. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K 4 \, dx \, dy = 4m(K) = 28\pi.$$

La risposta corretta è **B**.

Quiz 5. Sia $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{5x^4 + 3y^2} \leq z \leq 2\sqrt{5x^4 + 2y^2 + 1}, 0 \leq x \leq y \right\}$. L'integrale $\int_{\Omega} \frac{48xz}{y+1} \, dx \, dy \, dz$ vale

A 1.

B 16.

C 2.

D 4.

E 8.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$2\sqrt{5x^4 + 3y^2} \leq 2\sqrt{5x^4 + 2y^2 + 1} \iff y^2 \leq 1 \iff |y| \leq 1.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{5x^4 + 3y^2} \leq z \leq 2\sqrt{5x^4 + 2y^2 + 1}, 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

ed è idoneo per integrare per fili paralleli all'asse z . Posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{48xz}{y+1} \, dx \, dy \, dz &= 48 \int_D \frac{x}{y+1} \left(\int_{2\sqrt{5x^4+2y^2+1}}^{2\sqrt{5x^4+3y^2}} z \, dz \right) \, dx \, dy = 48 \int_D \frac{x}{y+1} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{2\sqrt{5x^4+2y^2+1}}^{2\sqrt{5x^4+3y^2}} \, dx \, dy = \\ &= 24 \int_D \frac{x}{y+1} (4 - 4y^2) \, dx \, dy = 96 \int_D (1 - y)x \, dx \, dy = \end{aligned}$$

essendo D un insieme x -semplice si ottiene

$$= 96 \int_0^1 (1 - y) \left(\int_0^y x \, dx \right) \, dy = 96 \int_0^1 (1 - y) \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^y \, dy = 48 \int_0^1 (y^2 - y^3) \, dy = 48 \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = 4.$$

La risposta corretta è **D**.

Quiz 6. La serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{e}{\pi} \right)^n$

A converge a $\frac{e}{\pi}$.

B è indeterminata.

$$\boxed{C} \text{ converge a } \frac{e}{\pi - e}.$$

$$\boxed{D} \text{ converge a } \frac{e^2}{\pi(\pi - e)}.$$

$$\boxed{E} \text{ converge a } \frac{\pi}{\pi - e}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{e}{\pi}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$$

che è una serie geometrica di ragione $a = \frac{e}{\pi}$. Osserviamo che $|a| = \frac{e}{\pi} < 1$ perché $0 < e < \pi$. Poiché la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge se e solo se $|a| < 1$, e in tal caso la somma della serie è $\frac{1}{1-a}$, la serie data converge e la sua somma è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n - \left(1 + \frac{e}{\pi}\right) = \frac{1}{1 - \frac{e}{\pi}} - \left(1 + \frac{e}{\pi}\right) = \frac{e^2}{\pi(\pi - e)}.$$

La risposta corretta è $\boxed{D}$.

Domanda 7. Si considerino l'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$ e il campo vettoriale $F(x, y, z) = (z \log(1 + y^2) - 16xz, z \log(1 + x^2) - 32yz, 32z^2 - \cos(xy))$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω ?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = 16z$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 16z \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 16 \int_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = 16 \int_{\Omega'} \rho z \, d\rho \, d\vartheta \, dz,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 2\rho \leq z \leq 2\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 16 \int_{\Omega'} \rho z \, d\rho \, d\vartheta \, dz = 32\pi \int_0^1 \rho \left(\int_{2\rho}^2 z \, dz \right) d\rho = 32\pi \int_0^1 \rho \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{2\rho}^2 d\rho = \\ &= 16\pi \int_0^1 \rho (4 - 4\rho^2) \, d\rho = 64\pi \left[-\frac{1}{4} (1 - \rho^2)^2 \right]_0^1 = 16\pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è 16π .

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, y \geq 0, z \geq 0\}$ e il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(-8xz - \frac{30y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{30x}{x^2 + y^2 + 1} + 8yz, xy \sin z\right)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ , orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

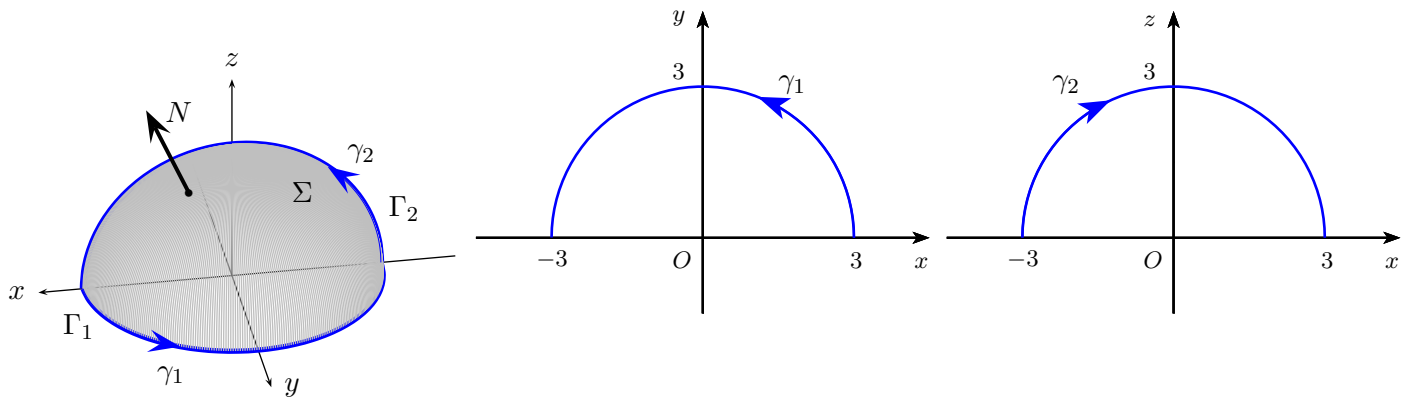
SVOLGIMENTO

Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP.$$

Osserviamo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9, z = 0, y \geq 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 9, y = 0, z \geq 0\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve parametriche che parametrizzano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 in modo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sia percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ , che deve formare un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Si ha che $\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $\gamma_1(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 0)$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt,$$

dove

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(3 \cos t, 3 \sin t, 0) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) = (-9 \sin t, 9 \cos t, 0) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) = 27.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt = 27 \int_0^\pi 1 \, dt = 27\pi.$$

Inoltre si ha che $\gamma_2 : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $\gamma_2(t) = (3 \cos t, 0, -3 \sin t)$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_\pi^{2\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, dt,$$

dove

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F(3 \cos t, 0, -3 \sin t) \cdot (-3 \sin t, 0, -3 \cos t) =$$

$$= \left(72 \cos t \sin t, \frac{90 \cos t}{9 \cos^2 t + 1}, 0 \right) \cdot (-3 \sin t, 0, -3 \cos t) = -216 \cos t \sin^2 t.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt = \int_\pi^{2\pi} (-216 \cos t \sin^2 t) dt = -216 \left[\frac{1}{3} \sin^3 t \right]_\pi^{2\pi} = 0.$$

In conclusione si ha che

$$\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 27\pi.$$

La risposta corretta è 27π .
