

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V1	B	B	E	E	A	A	2π	6π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Siano $a > 0$ e $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 \leq a^4, x \geq 0\}$. Calcolare il volume di Ω .

SVOLGIMENTO

Per definizione il volume di Ω , ovvero la misura di Ω , è

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \sqrt[4]{a^4 - y^2 - z^2}, y^2 + z^2 \leq a^4\}.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse x si ottiene

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq a^2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq x \leq \sqrt[4]{a^4 - \rho^2}\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 2\pi \int_0^{a^2} \rho \left(\int_0^{\sqrt[4]{a^4 - \rho^2}} 1 \, dx \right) d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{a^2} \rho \sqrt[4]{a^4 - \rho^2} \, d\rho = 2\pi \int_0^{a^2} \rho (a^4 - \rho^2)^{1/4} \, d\rho = \\ &= 2\pi \left[-\frac{2}{5} (a^4 - \rho^2)^{5/4} \right]_0^{a^2} = \frac{4}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

In alternativa, l'insieme Ω' si può scrivere anche come

$$\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{a^4 - x^4}\}.$$

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 2\pi \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^4 - x^4}} \rho \, d\rho \right) dx = \\ &= 2\pi \int_0^a \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^{\sqrt{a^4 - x^4}} dx = \pi \int_0^a (a^4 - x^4) \, dx = \\ &= \pi \left[a^4 x - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^a = \frac{4}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V2	B	E	C	A	D	D	3π	2π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Siano $b > 0$ e $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^2 \leq b^4, y \geq 0\}$. Calcolare il volume di Ω .

SVOLGIMENTO

Per definizione il volume di Ω , ovvero la misura di Ω , è

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq \sqrt[4]{b^4 - x^2 - z^2}, x^2 + z^2 \leq b^4\}.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse y si ottiene

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq b^2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq y \leq \sqrt[4]{b^4 - \rho^2}\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 2\pi \int_0^{b^2} \rho \left(\int_0^{\sqrt[4]{b^4 - \rho^2}} 1 \, dy \right) d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{b^2} \rho \sqrt[4]{b^4 - \rho^2} \, d\rho = 2\pi \int_0^{b^2} \rho (b^4 - \rho^2)^{1/4} \, d\rho = \\ &= 2\pi \left[-\frac{2}{5} (b^4 - \rho^2)^{5/4} \right]_0^{b^2} = \frac{4}{5} \pi b^5. \end{aligned}$$

In alternativa, l'insieme Ω' si può scrivere anche come

$$\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq b, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{b^4 - y^4}\}.$$

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 2\pi \int_0^b \left(\int_0^{\sqrt{b^4 - y^4}} \rho \, d\rho \right) dy = \\ &= 2\pi \int_0^b \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^{\sqrt{b^4 - y^4}} dy = \pi \int_0^b (b^4 - y^4) \, dy = \\ &= \pi \left[b^4 y - \frac{1}{5} y^5 \right]_0^b = \frac{4}{5} \pi b^5. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V3	B	B	C	C	E	A	4π	8π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Siano $a > 0$ e $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 \leq a^4, x \geq 0\}$. Calcolare il volume di Ω .

SVOLGIMENTO

Per definizione il volume di Ω , ovvero la misura di Ω , è

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \sqrt[4]{a^4 - y^2 - z^2}, y^2 + z^2 \leq a^4\}.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse x si ottiene

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq a^2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq x \leq \sqrt[4]{a^4 - \rho^2}\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 2\pi \int_0^{a^2} \rho \left(\int_0^{\sqrt[4]{a^4 - \rho^2}} 1 \, dx \right) d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{a^2} \rho \sqrt[4]{a^4 - \rho^2} \, d\rho = 2\pi \int_0^{a^2} \rho (a^4 - \rho^2)^{1/4} \, d\rho = \\ &= 2\pi \left[-\frac{2}{5} (a^4 - \rho^2)^{5/4} \right]_0^{a^2} = \frac{4}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

In alternativa, l'insieme Ω' si può scrivere anche come

$$\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{a^4 - x^4}\}.$$

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 2\pi \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^4 - x^4}} \rho \, d\rho \right) dx = \\ &= 2\pi \int_0^a \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^{\sqrt{a^4 - x^4}} dx = \pi \int_0^a (a^4 - x^4) \, dx = \\ &= \pi \left[a^4 x - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^a = \frac{4}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V4	B	B	A	A	B	E	6π	4π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Siano $b > 0$ e $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^2 \leq b^4, y \geq 0\}$. Calcolare il volume di Ω .

SVOLGIMENTO

Per definizione il volume di Ω , ovvero la misura di Ω , è

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq \sqrt[4]{b^4 - x^2 - z^2}, x^2 + z^2 \leq b^4\}.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse y si ottiene

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq b^2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq y \leq \sqrt[4]{b^4 - \rho^2}\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 2\pi \int_0^{b^2} \rho \left(\int_0^{\sqrt[4]{b^4 - \rho^2}} 1 \, dy \right) d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{b^2} \rho \sqrt[4]{b^4 - \rho^2} \, d\rho = 2\pi \int_0^{b^2} \rho (b^4 - \rho^2)^{1/4} \, d\rho = \\ &= 2\pi \left[-\frac{2}{5} (b^4 - \rho^2)^{5/4} \right]_0^{b^2} = \frac{4}{5} \pi b^5. \end{aligned}$$

In alternativa, l'insieme Ω' si può scrivere anche come

$$\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq b, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{b^4 - y^4}\}.$$

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 2\pi \int_0^b \left(\int_0^{\sqrt{b^4 - y^4}} \rho \, d\rho \right) dy = \\ &= 2\pi \int_0^b \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^{\sqrt{b^4 - y^4}} dy = \pi \int_0^b (b^4 - y^4) \, dy = \\ &= \pi \left[b^4 y - \frac{1}{5} y^5 \right]_0^b = \frac{4}{5} \pi b^5. \end{aligned}$$