

Versione: V1

Quiz 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x^3 - \pi^2 x$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, siano b_n i coefficienti di Fourier di f . La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

- ☐ **A** converge a π^6 .
☐ **B** converge a $\frac{16}{105}\pi^6$.
☐ **C** converge a $\frac{32}{105}\pi^6$.
☐ **D** converge a $\frac{8}{105}\pi^6$.
☐ **E** diverge.

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Poiché g è dispari anche f è dispari e quindi i coefficienti a_n della serie di Fourier di f sono zero, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che l'identità di Parseval diventa

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

da cui si ricava che

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Essendo $|f|^2$ pari si ha che

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (x^3 - \pi^2 x)^2 dx = 2 \int_0^{\pi} (x^3 - \pi^2 x)^2 dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi} (x^6 - 2\pi^2 x^4 + \pi^4 x^2) dx = 2 \left[\frac{1}{7} x^7 - \frac{2}{5} \pi^2 x^5 + \frac{1}{3} \pi^4 x^3 \right]_0^{\pi} = \frac{2}{7} \pi^7 - \frac{4}{5} \pi^7 + \frac{2}{3} \pi^7 = \frac{16}{105} \pi^7. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{16}{105} \pi^6.$$

La risposta corretta è ☒ **B**.

Quiz 2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 2, 3)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 indivergente ma non solenoidale, e siano Σ e S due superfici chiuse e diverse che sono i bordi rispettivamente di due aperti con bordo D e V di $\mathbb{R}^3$ che contengono il punto $(1, 2, 3)$.

Indicati con I_{Σ} e I_S i flussi uscenti di F rispettivamente dal bordo di D e dal bordo di V , quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** $I_{\Sigma} \neq I_S = 0$.
☐ **B** $I_{\Sigma} = I_S \neq 0$.
☐ **C** $I_{\Sigma} = I_S = 0$.
☐ **D** $0 = I_{\Sigma} \neq I_S$.

[E] $I_\Sigma \neq I_S$ con $I_\Sigma \neq 0$ e $I_S \neq 0$.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è **[B]**.

Senza perdita di generalità possiamo supporre che il punto $(1, 2, 3)$ sia il punto $(0, 0, 0)$. Il campo F è indivergente ma non solenoidale e il suo dominio non è stellato (altrimenti F avrebbe potenziale vettore e quindi sarebbe solenoidale dato che per ipotesi è indivergente). Quindi esiste almeno una superficie chiusa $T \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tale che il flusso di F attraverso T non è zero. Evidentemente T deve essere il bordo di un aperto con bordo W che contiene $(0, 0, 0)$, perché, se non contenesse $(0, 0, 0)$, allora T sarebbe contenuta in un sottoinsieme stellato di $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e quindi F ristretto a questo insieme avrebbe potenziale vettore e quindi sarebbe solenoidale e di conseguenza il flusso di F attraverso T sarebbe zero.

Consideriamo il flusso uscente di F da $T = \partial W$ (analogamente si procede nell'altro caso).

Proviamo che esiste una palla di centro $(0, 0, 0)$ e raggio r tale che il flusso uscente di F dal bordo di questa palla coincide con quello uscente di F da $T = \partial W$.

Poiché $\overline{W} = W \cup \partial W$ è un insieme limitato, esiste $r > 0$ tale che $\overline{W} \subseteq B_r(0, 0, 0)$. Denotiamo con S_r la superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio r , ovvero $S_r = \partial B_r(0, 0, 0)$.

Sia $\Omega = B_r(0, 0, 0) \setminus W$. Evidentemente $\partial\Omega = S_r \cup T$ e $(0, 0, 0) \notin \Omega$. Quindi $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} = \text{dom}(F)$.

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza) il flusso uscente di F dal bordo di Ω , che è l'unione di S_r orientata secondo il verso uscente da $B_r(0, 0, 0)$ e di T orientata secondo il verso entrante in W , è

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma + \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \underbrace{\text{div} F(x, y, z)}_{=0} \, dx \, dy \, dz = 0$$

da cui segue che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = - \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma,$$

ed essendo

$$\int_{T^+} F \cdot n \, d\sigma = - \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma,$$

si ottiene che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_{T^+} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove S_r^- indica S_r orientata secondo il verso entrante, S_r^+ indica S_r orientata secondo il verso uscente, T^- indica T orientata secondo il verso entrante, T^+ indica T orientata secondo il verso uscente.

Poiché il flusso uscente di F da $T = \partial W$ non è zero, si ha che

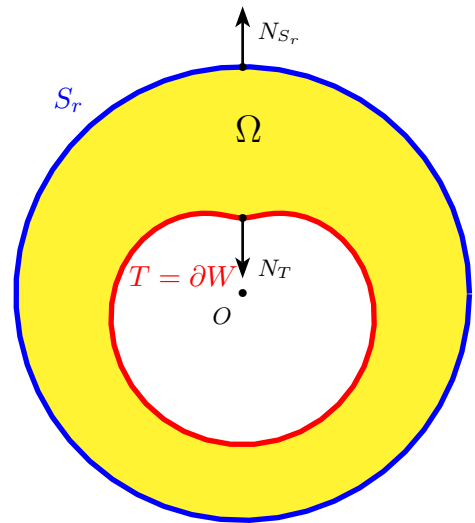
$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma \neq 0.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento fatto sopra per S_r e T , prima con S al posto di T e poi con Σ al posto di T , si ottiene che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_S F \cdot n \, d\sigma = \int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma \neq 0.$$

Concludiamo osservando che un campo vettoriale F avente le caratteristiche indicate esiste. Ad esempio

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$



Quiz 3. Si consideri la funzione $f(x, y) = (x^2 - 1) \log(e^2 + 1 - y^2)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha né punti di minimo locale né punti di sella.
- ☐ **B** La funzione f ha un punto di massimo locale e ha quattro punti di sella.
- ☐ **C** La funzione f ha due punti di minimo locale, due punti di massimo locale e un punto di sella.
- ☐ **D** La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha né punti di massimo locale né punti di sella.
- ☐ **E** La funzione f ha un punto di minimo locale e ha quattro punti di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < \sqrt{e^2 + 1}\}$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \log(e^2 + 1 - y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2y(x^2 - 1)}{e^2 + 1 - y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x \log(e^2 + 1 - y^2) = 0 \\ 2y(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, & y = \pm e \\ y = 0, & x = \pm 1. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono: $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm e)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \log(e^2 + 1 - y^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2(x^2 - 1) \frac{e^2 + 1 + y^2}{(e^2 + 1 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{4xy}{e^2 + 1 - y^2}.$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 \log(e^2 + 1) & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^2 + 1} \end{pmatrix}, \quad H_f(1, e) = H_f(-1, -e) = \begin{pmatrix} 0 & -4e \\ -4e & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(1, -e) = H_f(-1, e) = \begin{pmatrix} 0 & 4e \\ 4e & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di minimo locale per f , $(\pm 1, \pm e)$ sono quattro punti di sella per f .

La risposta corretta è ☒ **E**.

Quiz 4. Siano (a_n) una successione tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora $a_n \sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$.
- ☐ **B** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$.
- ☐ **C** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, 1)$.
- ☐ **D** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in (1, +\infty) \cup \{+\infty\}$.
- ☐ **E** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$.

SVOLGIMENTO

Per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$. La risposta corretta è ☒ **E**.

Osserviamo che le altre risposte sono certamente errate. Infatti, la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge e $\frac{1}{n^{1/2}} \not\sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$, e quindi la risposta **A** è errata.

Inoltre la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge anche se $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, e quindi la risposta **C** è errata.

Similmente la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge anche se $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, e quindi la risposta **D** è errata.

Infine, se consideriamo la successione (a_n) definita da

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n = 2^k \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } n \neq 2^k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$

si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge perché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (si vedano i dettagli a piè pagina)¹, ed entrambe le serie a destra della disuguaglianza convergono. Però $a_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$, essendo

$$na_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 2^k \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \neq 2^k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\lim_n \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_n na_n \quad \text{non esiste.}$$

Ne segue che anche la risposta **B** è errata.

Quiz 5. Un potenziale del campo vettoriale $F(x, y) = \left(\frac{6xy^2 + 2y}{1 + x^2y^2}, \frac{6x^2y + 2x}{1 + x^2y^2} \right)$ è

A $f(x, y) = 3 \log(1 + x^2y^2) + 2 \arctan(xy) - 1.$

B $f(x, y) = 3 \log(1 + x^2y^2) - 2 \arctan(xy) - 3.$

C $f(x, y) = 3 \log(1 + x^2y^2) + \arctan(xy) - 2.$

D $f(x, y) = \log(1 + x^2y^2) + 2 \arctan(xy) + 1.$

E $f(x, y) = \log(1 + x^2y^2) + \arctan(xy) + 2.$

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{(12xy + 2)(1 + x^2y^2) - 2x^2y(6xy^2 + 2y)}{(1 + x^2y^2)^2} = \frac{12xy + 2 - 2x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

¹Se per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si pone $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, si osserva che $S_{2^m} \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k^2}$, per ogni $m \in \mathbb{N}$. Se ora si considera un

qualunque $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, esiste almeno un $m \in \mathbb{N}$ tale che $2^{m-1} \leq n \leq 2^m$. Di conseguenza si ha che $S_n \leq S_{2^m} \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k^2}$.

Poiché le serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convergono, per il Primo teorema del confronto sui limiti esiste in $\mathbb{R}$ il limite della successione (S_n) e

quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e, sempre, per il Primo teorema del confronto sui limiti, vale la disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = \frac{6xy^2 + 2y}{1 + x^2y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = \frac{6x^2y + 2x}{1 + x^2y^2}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \frac{6xy^2 + 2y}{1 + x^2y^2} dx = \int \left(3 \frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} + 2 \frac{y}{1 + x^2y^2} \right) dx = 3 \log(1 + x^2y^2) + 2 \arctan(xy) + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{6x^2y + 2x}{1 + x^2y^2} + c'(y) = \frac{6x^2y + 2x}{1 + x^2y^2} \implies c'(y) = 0 \implies c(y) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 3 \log(1 + x^2y^2) + 2 \arctan(xy) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La risposta corretta è ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E.

Quiz 6. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x + y - z, y, z - x - y)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (2t^2, 3t + t^2, 2t^2)$ vale

☐ A 8. ☐ B 2. ☐ C 0. ☐ D 4. ☐ E 16.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (4t, 3 + 2t, 4t)$ per ogni $t \in [0, 1]$ e

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1] : \quad F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= F(2t^2, 3t + t^2, 2t^2) \cdot (4t, 3 + 2t, 4t) = \\ &= (3t + t^2, 3t + t^2, -3t - t^2) \cdot (4t, 3 + 2t, 4t) = (3t + t^2)(3 + 2t) \end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_0^1 (3t + t^2)(3 + 2t) dt = \left[\frac{1}{2} (3t + t^2)^2 \right]_0^1 = 8.$$

La risposta corretta è ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E.

Domanda 7. Sia $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{e-1}, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$.

Quanto vale l'integrale $\int_{\Omega} \frac{16z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz$?

SVOLGIMENTO

Passiamo in coordinate polari centrate in $(0, 0, 0)$ con la colatitudine misurata dall'asse z , ovvero consideriamo

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, \varphi)| = \rho^2 \sin \vartheta.$$

Si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{16z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz = 16 \int_{\Omega'} \frac{\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho^4 + 1} d\rho d\vartheta d\varphi,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ è tale che $\Phi(\Omega') = \Omega$. Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{e-1} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^2 \leq \sqrt{e-1} \\ 0 \leq \rho \cos \vartheta \leq \rho \sin \vartheta \\ \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt[4]{e-1} \\ \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = [0, \sqrt[4]{e-1}] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{16z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz &= 16 \int_{\Omega'} \frac{\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho^4 + 1} d\rho d\vartheta d\varphi = \\ &= 32\pi \left(\int_0^{\sqrt[4]{e-1}} \frac{\rho^3}{\rho^4 + 1} d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = \\ &= 32\pi \left[\frac{1}{4} \log(\rho^4 + 1) \right]_0^{\sqrt[4]{e-1}} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è 2π .

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 17, z \geq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$ e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{17}yz}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + e^{x^2} \sin x, \log(1 + y^2) - \frac{\sqrt{17}xz}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos(z^4 + 2) \right).$$

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\text{dom}(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\} : x^2 + y^2 \neq 0\}$, ovvero su tutto $\mathbb{R}^3$ escluso l'asse z . Osserviamo che $\Sigma \subseteq \text{dom}(F)$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \text{rot} F(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) & f_2(x, y, z) & f_3(x, y, z) \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z), \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{17}x}{x^2 + y^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{\sqrt{17}y}{x^2 + y^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}, \right. \\ &\quad -\sqrt{17}z \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x \left[2x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{x(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]}{(x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2 + z^2)} + \\ &\quad \left. -\sqrt{17}z \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - y \left[2y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]}{(x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2 + z^2)} \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{17}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{\sqrt{17}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{\sqrt{17}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 17 \\ z \geq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{17 - x^2 - y^2} \\ z \geq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{17 - x^2 - y^2} \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = \sqrt{17 - x^2 - y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{17 - x^2 - y^2})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \text{rot} F(x, y, \sqrt{17 - x^2 - y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \left(\frac{1}{17}x, \frac{1}{17}y, \frac{1}{17}\sqrt{17 - x^2 - y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \frac{x^2}{17\sqrt{17 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{17\sqrt{17 - x^2 - y^2}} + \frac{1}{17}\sqrt{17 - x^2 - y^2} = \frac{1}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K \frac{1}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_K \frac{1}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = \int_{K'} \frac{\rho}{\sqrt{17 - \rho^2}} \, d\rho \, d\vartheta =$$

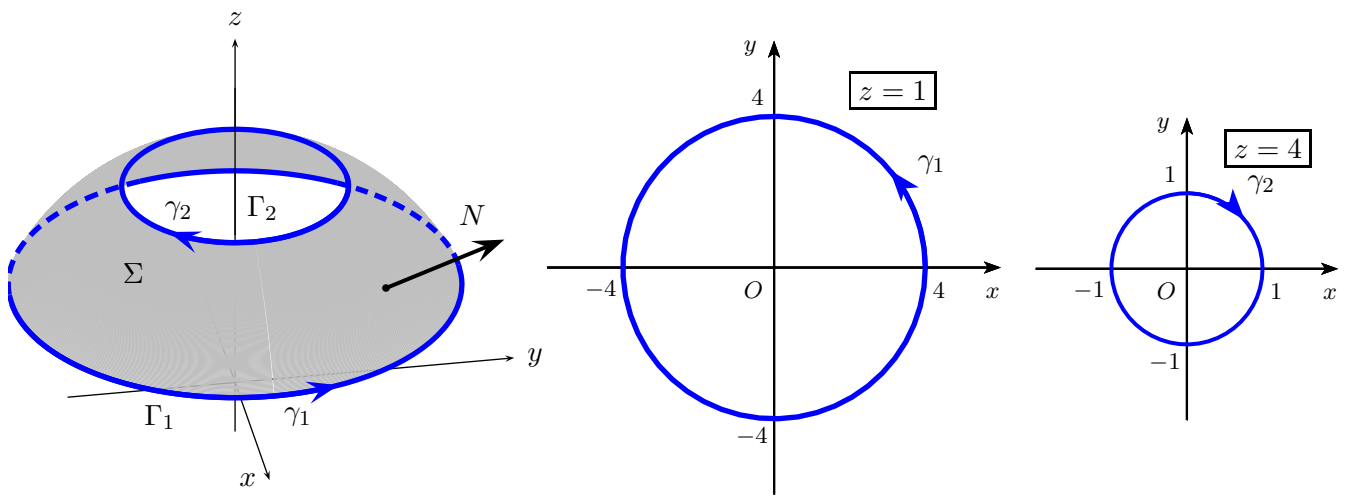
dove $K' = [1, 4] \times [0, 2\pi]$ e quindi si ottiene

$$= 2\pi \int_1^4 \rho (17 - \rho^2)^{-1/2} \, d\rho = 2\pi \left[-(17 - \rho^2)^{1/2} \right]_1^4 = 6\pi.$$

La risposta corretta è 6π .

Osservazione. Si può procedere anche calcolando direttamente l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ che è costituito dall'unione di due circonferenze. Infatti, si ha che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + y^2 = 16\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4, x^2 + y^2 = 1\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP.$$

Si ha che $\Gamma_1 = \text{im}(\gamma_1)$, dove $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva parametrica $\gamma_1(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 1)$ e $\Gamma_2 = \text{im}(\gamma_2)$, dove $\gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva parametrica $\gamma_2(t) = (\cos t, -\sin t, 4)$.

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) &= F(4 \cos t, 4 \sin t, 1) \cdot (-4 \sin t, 4 \cos t, 0) = \\ &= \left(\frac{1}{4} \sin t + e^{16 \cos^2 t} \sin(4 \cos t), \log(1 + 16 \sin^2 t) - \frac{1}{4} \cos t, \cos 3 \right) \cdot (-4 \sin t, 4 \cos t, 0) = \\ &= -4 \sin t e^{16 \cos^2 t} \sin(4 \cos t) + 4 \cos t \log(1 + 16 \sin^2 t) - 1 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \left[-4 \sin t e^{16 \cos^2 t} \sin(4 \cos t) + 4 \cos t \log(1 + 16 \sin^2 t) - 1 \right] dt = \\ &= -2\pi + \int_0^{2\pi} \left[-4 \sin t e^{16 \cos^2 t} \sin(4 \cos t) + 4 \cos t \log(1 + 16 \sin^2 t) \right] dt = -2\pi \end{aligned}$$

perché questo integrale di destra è zero. Infatti,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left[-4 \sin t e^{16 \cos^2 t} \sin(4 \cos t) + 4 \cos t \log(1 + 16 \sin^2 t) \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-4 \sin t e^{16 \cos^2 t} \sin(4 \cos t) \right] dt + \int_0^{2\pi} 4 \cos t \log(1 + 16 \sin^2 t) dt = \end{aligned}$$

essendo entrambe le funzioni periodiche di periodo 2π si ottiene

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[-4 \sin t e^{16 \cos^2 t} \sin(4 \cos t) \right] dt + \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos t \log(1 + 16 \sin^2 t) dt =$$

ed essendo la funzione integranda del primo integrale dispari, questo integrale è zero, mentre nel secondo la funzione è pari e quindi si ottiene

$$= 2 \int_0^{\pi} 4 \cos t \log(1 + 16 \sin^2 t) dt =$$

essendo $\cos t = \sin(\pi/2 - t)$ e $\sin t = \cos(\pi/2 - t)$

$$= 2 \int_0^{\pi} 4 \sin(\pi/2 - t) \log(1 + 16 \cos^2(\pi/2 - t)) dt =$$

posto $u = \pi/2 - t$ si ha

$$= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \sin u \log(1 + 16 \cos^2 u) du = 0$$

perché la funzione integranda è dispari.

Similmente

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(\cos t, -\sin t, 4) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) = \\ &= \left(-4\sin t + e^{\cos^2 t} \sin(\cos t), \log(1 + \sin^2 t) - 4\cos t, \cos(4^4 + 1) \right) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) = \\ &= -\sin t e^{\cos^2 t} \sin(\cos t) - \cos t \log(1 + \sin^2 t) + 4 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \left[-\sin t e^{\cos^2 t} \sin(\cos t) - \cos t \log(1 + \sin^2 t) + 4 \right] dt = \\ &= 8\pi + \int_0^{2\pi} \left[-\sin t e^{\cos^2 t} \sin(\cos t) - \cos t \log(1 + \sin^2 t) \right] dt = 8\pi \end{aligned}$$

perché questo integrale di destra è zero. Infatti,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left[-\sin t e^{\cos^2 t} \sin(\cos t) - \cos t \log(1 + \sin^2 t) \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\sin t e^{\cos^2 t} \sin(\cos t) \right] dt - \int_0^{2\pi} \cos t \log(1 + \sin^2 t) dt = \end{aligned}$$

essendo entrambe le funzioni periodiche di periodo 2π si ottiene

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[-\sin t e^{\cos^2 t} \sin(\cos t) \right] dt - \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \log(1 + \sin^2 t) dt =$$

ed essendo la funzione integranda del primo integrale dispari, questo integrale è zero, mentre nel secondo la funzione è pari e quindi si ottiene

$$= -2 \int_0^{\pi} \cos t \log(1 + \sin^2 t) dt =$$

essendo $\cos t = \sin(\pi/2 - t)$ e $\sin t = \cos(\pi/2 - t)$

$$= -2 \int_0^{\pi} \sin(\pi/2 - t) \log(1 + \cos^2(\pi/2 - t)) dt =$$

posto $u = \pi/2 - t$ si ha

$$= -2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin u \log(1 + \cos^2 u) du = 0$$

perché la funzione integranda è dispari.

In conclusione

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = -2\pi + 8\pi = 6\pi.$$

Quiz 1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(-1, -2, -3)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 indivergente ma non solenoidale, e siano Σ e S due superfici chiuse e diverse che sono i bordi rispettivamente di due aperti con bordo D e V di $\mathbb{R}^3$ che contengono il punto $(-1, -2, -3)$.

Indicati con I_Σ e I_S i flussi uscenti di F rispettivamente dal bordo di D e dal bordo di V , quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ A $I_\Sigma \neq I_S$ con $I_\Sigma \neq 0$ e $I_S \neq 0$.

☒ B $I_\Sigma = I_S \neq 0$.

☐ C $I_\Sigma \neq I_S = 0$.

☐ D $0 = I_\Sigma \neq I_S$.

☐ E $I_\Sigma = I_S = 0$.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è ☒ B .

Senza perdita di generalità possiamo supporre che il punto $(-1, -2, -3)$ sia il punto $(0, 0, 0)$. Il campo F è indivergente ma non solenoidale e il suo dominio non è stellato (altrimenti F avrebbe potenziale vettore e quindi sarebbe solenoidale dato che per ipotesi è indivergente). Quindi esiste almeno una superficie chiusa $T \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tale che il flusso di F attraverso T non è zero. Evidentemente T deve essere il bordo di un aperto con bordo W che contiene $(0, 0, 0)$, perché, se non contenesse $(0, 0, 0)$, allora T sarebbe contenuta in un sottoinsieme stellato di $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e quindi F ristretto a questo insieme avrebbe potenziale vettore e quindi sarebbe solenoidale e di conseguenza il flusso di F attraverso T sarebbe zero.

Consideriamo il flusso uscente di F da $T = \partial W$ (analogamente si procede nell'altro caso).

Proviamo che esiste una palla di centro $(0, 0, 0)$ e raggio r tale che il flusso uscente di F dal bordo di questa palla coincide con quello uscente di F da $T = \partial W$.

Poiché $\overline{W} = W \cup \partial W$ è un insieme limitato, esiste $r > 0$ tale che $\overline{W} \subseteq B_r(0, 0, 0)$. Denotiamo con S_r la superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio r , ovvero $S_r = \partial B_r(0, 0, 0)$.

Sia $\Omega = B_r(0, 0, 0) \setminus W$. Evidentemente $\partial\Omega = S_r \cup T$ e $(0, 0, 0) \notin \Omega$. Quindi $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} = \text{dom}(F)$.

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza) il flusso uscente di F dal bordo di Ω , che è l'unione di S_r orientata secondo il verso uscente da $B_r(0, 0, 0)$ e di T orientata secondo il verso entrante in W , è

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma + \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \underbrace{\text{div} F(x, y, z)}_{=0} \, dx \, dy \, dz = 0$$

da cui segue che

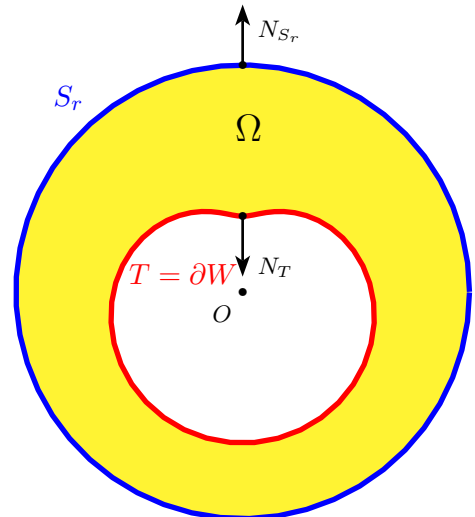
$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = - \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma,$$

ed essendo

$$\int_{T^+} F \cdot n \, d\sigma = - \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma,$$

si ottiene che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_{T^+} F \cdot n \, d\sigma,$$



dove S_r^- indica S_r orientata secondo il verso entrante, S_r^+ indica S_r orientata secondo il verso uscente, T^- indica T orientata secondo il verso entrante, T^+ indica T orientata secondo il verso uscente.

Poiché il flusso uscente di F da $T = \partial W$ non è zero, si ha che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma \neq 0.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento fatto sopra per S_r e T , prima con S al posto di T e poi con Σ al posto di T , si ottiene che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_S F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma \neq 0.$$

Concludiamo osservando che un campo vettoriale F avente le caratteristiche indicate esiste. Ad esempio

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Quiz 2. Siano (a_n) una successione tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ A Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, 1)$.
- ☐ B Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$.
- ☐ C Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in (1, +\infty) \cup \{+\infty\}$.
- ☐ D Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora $a_n \sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$.
- ☐ E Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$.

SVOLGIMENTO

Per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$. La risposta corretta è ☒ E.

Osserviamo che le altre risposte sono certamente errate. Infatti, la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge e $\frac{1}{n^{1/2}} \not\sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$, e quindi la risposta ☐ D è errata.

Inoltre la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge anche se $\lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, e quindi la risposta ☐ A è errata. Similmente la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge anche se $\lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$, e quindi la risposta ☐ C è errata.

Infine, se consideriamo la successione (a_n) definita da

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n = 2^k \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } n \neq 2^k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$

si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge perché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (si vedano i dettagli a piè pagina)², ed entrambe le serie a destra della disuguaglianza convergono. Però $a_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$, essendo

$$na_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 2^k \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \neq 2^k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\lim_n \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_n na_n \quad \text{non esiste.}$$

Ne segue che anche la risposta **B** è errata.

Quiz 3. Un potenziale del campo vettoriale $F(x, y) = \left(\frac{10xy^2 - 4y}{1 + x^2y^2}, \frac{10x^2y - 4x}{1 + x^2y^2} \right)$ è

A $f(x, y) = \log(1 + x^2y^2) - 4 \arctan(xy) + 2.$

B $f(x, y) = 5 \log(1 + x^2y^2) - \arctan(xy) - 3.$

C $f(x, y) = 5 \log(1 + x^2y^2) - 4 \arctan(xy) - 2.$

D $f(x, y) = 5 \log(1 + x^2y^2) + 4 \arctan(xy) - 4.$

E $f(x, y) = \log(1 + x^2y^2) - \arctan(xy) + 3.$

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{(20xy - 4)(1 + x^2y^2) - 2x^2y(10xy^2 - 4y)}{(1 + x^2y^2)^2} = \frac{20xy - 4 + 4x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = \frac{10xy^2 - 4y}{1 + x^2y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = \frac{10x^2y - 4x}{1 + x^2y^2}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \frac{10xy^2 - 4y}{1 + x^2y^2} dx = \int \left(5 \frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} - 4 \frac{y}{1 + x^2y^2} \right) dx = 5 \log(1 + x^2y^2) - 4 \arctan(xy) + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{10x^2y - 4x}{1 + x^2y^2} + c'(y) = \frac{10x^2y - 4x}{1 + x^2y^2} \implies c'(y) = 0 \implies c(y) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

²Se per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si pone $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, si osserva che $S_{2^m} \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k^2}$, per ogni $m \in \mathbb{N}$. Se ora si considera un

qualunque $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, esiste almeno un $m \in \mathbb{N}$ tale che $2^{m-1} \leq n \leq 2^m$. Di conseguenza si ha che $S_n \leq S_{2^m} \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k^2}$.

Poiché le serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convergono, per il Primo teorema del confronto sui limiti esiste in $\mathbb{R}$ il limite della successione (S_n) e

quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e, sempre, per il Primo teorema del confronto sui limiti, vale la disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 5 \log(1 + x^2 y^2) - 4 \arctan(xy) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La risposta corretta è ☒ C ☐ .

Quiz 4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \pi^2 x - 5x^3$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, siano b_n i coefficienti di Fourier di f . La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

☒ A converge a $\frac{80}{21}\pi^6$.

☐ B diverge.

☐ C converge a $\frac{20}{21}\pi^6$.

☐ D converge a π^6 .

☐ E converge a $\frac{40}{21}\pi^6$.

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Poiché g è dispari anche f è dispari e quindi i coefficienti a_n della serie di Fourier di f sono zero, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che l'identità di Parseval diventa

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

da cui si ricava che

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Essendo $|f|^2$ pari si ha che

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 x - 5x^3)^2 dx = 2 \int_0^{\pi} (\pi^2 x - x^3)^2 dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\pi^4 x^2 - 10\pi^2 x^4 + 25x^6) dx = 2 \left[\frac{1}{3} \pi^4 x^3 - 2\pi^2 x^5 + \frac{25}{7} x^7 \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^7 - 4\pi^7 + \frac{50}{7} \pi^7 = \frac{80}{21} \pi^7. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{80}{21} \pi^6.$$

La risposta corretta è ☒ A ☐ .

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, x + y - z, z - x - y)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (7t + t^2, 6t^2, 6t^2)$ vale

☒ A 8. ☐ B 64. ☐ C 16. ☐ D 32. ☐ E 0.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (7 + 2t, 12t, 12t)$ per ogni $t \in [0, 1]$ e

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, 1] : \quad F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= F(7t + t^2, 6t^2, 6t^2) \cdot (7 + 2t, 12t, 12t) = \\ &= (7t + t^2, 7t + t^2, -7t - t^2) \cdot (7 + 2t, 12t, 12t) = (7t + t^2)(7 + 2t)\end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_0^1 (7t + t^2)(7 + 2t) dt = \left[\frac{1}{2} (7t + t^2)^2 \right]_0^1 = 32.$$

La risposta corretta è D.

Quiz 6. Si consideri la funzione $f(x, y) = (25 - x^2) \log(e^2 + 1 - y^2)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha né punti di massimo locale né punti di sella.
B La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha né punti di minimo locale né punti di sella.
C La funzione f ha un punto di minimo locale e ha quattro punti di sella.
D La funzione f ha un punto di massimo locale e ha quattro punti di sella.
E La funzione f ha due punti di minimo locale, due punti di massimo locale e un punto di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < \sqrt{e^2 + 1}\}$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x \log(e^2 + 1 - y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2y(25 - x^2)}{e^2 + 1 - y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x \log(e^2 + 1 - y^2) = 0 \\ 2y(25 - x^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, & y = \pm e \\ y = 0, & x = \pm 5. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono: $(0, 0)$, $(\pm 5, \pm e)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 \log(e^2 + 1 - y^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2(25 - x^2) \frac{e^2 + 1 + y^2}{(e^2 + 1 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{4xy}{e^2 + 1 - y^2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}H_f(0, 0) &= \begin{pmatrix} -2 \log(e^2 + 1) & 0 \\ 0 & -\frac{50}{e^2 + 1} \end{pmatrix}, \quad H_f(5, e) = H_f(-5, -e) = \begin{pmatrix} 0 & 20e \\ 20e & 0 \end{pmatrix}, \\ H_f(5, -e) &= H_f(-5, e) = \begin{pmatrix} 0 & -20e \\ -20e & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di massimo locale per f , $(\pm 5, \pm e)$ sono quattro punti di sella per f .

La risposta corretta è D.

Domanda 7. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{e^3 - 1}, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Quanto vale l'integrale $\int_{\Omega} \frac{8z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz$?

SVOLGIMENTO

Passiamo in coordinate polari centrate in $(0, 0, 0)$ con la colatitudine misurata dall'asse z , ovvero consideriamo

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, \varphi)| = \rho^2 \sin \vartheta.$$

Si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{8z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz = 8 \int_{\Omega'} \frac{\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho^4 + 1} d\rho d\vartheta d\varphi,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ è tale che $\Phi(\Omega') = \Omega$. Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{e^3 - 1} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^2 \leq \sqrt{e^3 - 1} \\ 0 \leq \rho \cos \vartheta \leq \rho \sin \vartheta \\ \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt[4]{e^3 - 1} \\ \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = [0, \sqrt[4]{e^3 - 1}] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{8z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz &= 8 \int_{\Omega'} \frac{\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho^4 + 1} d\rho d\vartheta d\varphi = \\ &= 16\pi \left(\int_0^{\sqrt[4]{e^3 - 1}} \frac{\rho^3}{\rho^4 + 1} d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = \\ &= 16\pi \left[\frac{1}{4} \log(\rho^4 + 1) \right]_0^{\sqrt[4]{e^3 - 1}} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è 3π .

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 13, z \geq 2, x^2 + y^2 \geq 4\}$ e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\log(1 + x^2) + \frac{\sqrt{13}yz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos(y^2 + 1) - \frac{\sqrt{13}xz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, e^z \sin z \right).$$

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\text{dom}(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\} : x^2 + y^2 \neq 0\}$, ovvero su tutto $\mathbb{R}^3$ escluso l'asse z . Osserviamo che $\Sigma \subseteq \text{dom}(F)$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \text{rot} F(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) & f_2(x, y, z) & f_3(x, y, z) \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z), \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{13}x}{x^2 + y^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{\sqrt{13}y}{x^2 + y^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}, \right. \\ &\quad -\sqrt{13}z \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x \left[2x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{x(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]}{(x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2 + z^2)} + \\ &\quad \left. -\sqrt{13}z \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - y \left[2y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]}{(x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2 + z^2)} \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{13}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{\sqrt{13}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{\sqrt{13}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 13 \\ z \geq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{13 - x^2 - y^2} \\ z \geq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{13 - x^2 - y^2} \\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = \sqrt{13 - x^2 - y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{13 - x^2 - y^2})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{13 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{13 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{13 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{13 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \text{rot} F \left(x, y, \sqrt{13 - x^2 - y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{13 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{13 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \left(\frac{1}{13}x, \frac{1}{13}y, \frac{1}{13}\sqrt{13 - x^2 - y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{13 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{13 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \frac{x^2}{13\sqrt{13 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{13\sqrt{13 - x^2 - y^2}} + \frac{1}{13}\sqrt{13 - x^2 - y^2} = \frac{1}{\sqrt{13 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K \frac{1}{\sqrt{13 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_K \frac{1}{\sqrt{13 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = \int_{K'} \frac{\rho}{\sqrt{13 - \rho^2}} \, d\rho \, d\vartheta =$$

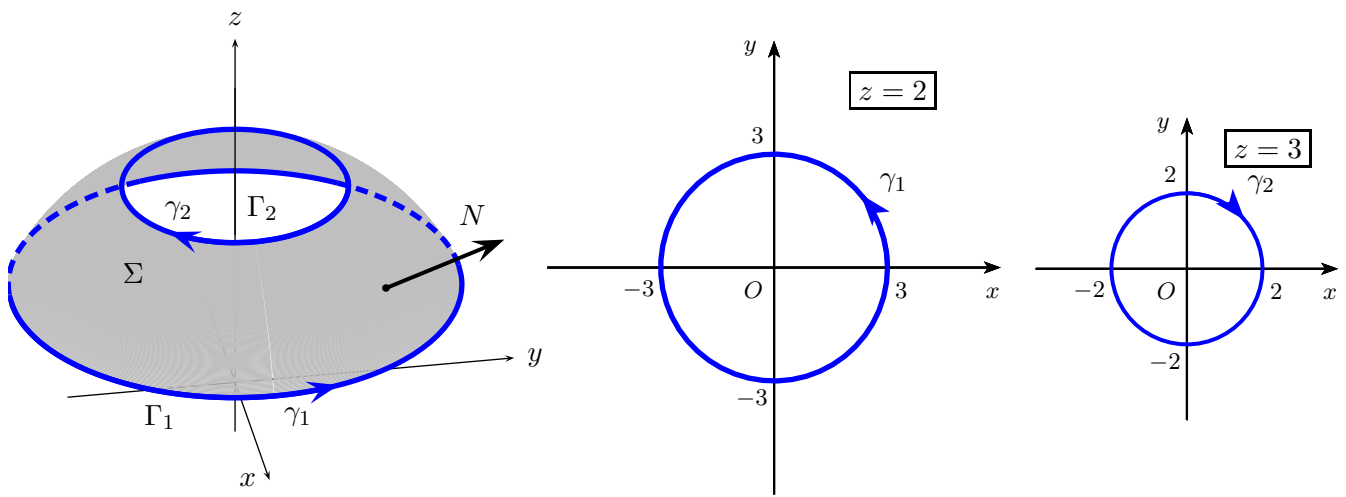
dove $K' = [2, 3] \times [0, 2\pi]$ e quindi si ottiene

$$= 2\pi \int_2^3 \rho (13 - \rho^2)^{-1/2} \, d\rho = 2\pi \left[- (13 - \rho^2)^{1/2} \right]_2^3 = 2\pi.$$

La risposta corretta è 2π .

Osservazione. Si può procedere anche calcolando direttamente l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ che è costituito dall'unione di due circonferenze. Infatti, si ha che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, x^2 + y^2 = 9\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3, x^2 + y^2 = 4\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP.$$

Si ha che $\Gamma_1 = \text{im}(\gamma_1)$, dove $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva parametrica $\gamma_1(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 2)$ e $\Gamma_2 = \text{im}(\gamma_2)$, dove $\gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva parametrica $\gamma_2(t) = (2 \cos t, -2 \sin t, 3)$.

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) &= F(3 \cos t, 3 \sin t, 2) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) = \\ &= \left(\log(1 + 9 \cos^2 t) + \frac{2}{3} \sin t, \cos(9 \sin^2 t + 1) - \frac{2}{3} \cos t, e^2 \sin 2 \right) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) = \\ &= -3 \sin t \log(1 + 9 \cos^2 t) + 3 \cos t \cos(9 \sin^2 t + 1) - 2 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} [-3 \sin t \log(1 + 9 \cos^2 t) + 3 \cos t \cos(9 \sin^2 t + 1) - 2] dt = \\ &= -4\pi + \int_0^{2\pi} [-3 \sin t \log(1 + 9 \cos^2 t) + 3 \cos t \cos(9 \sin^2 t + 1)] dt = -4\pi \end{aligned}$$

perché questo integrale di destra è zero. Infatti,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [-3 \sin t \log(1 + 9 \cos^2 t) + 3 \cos t \cos(9 \sin^2 t + 1)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-3 \sin t \log(1 + 9 \cos^2 t)] dt + \int_0^{2\pi} 3 \cos t \cos(9 \sin^2 t + 1) dt = \end{aligned}$$

essendo entrambe le funzioni periodiche di periodo 2π si ottiene

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [-3 \sin t \log(1 + 9 \cos^2 t)] dt + \int_{-\pi}^{\pi} 3 \cos t \cos(9 \sin^2 t + 1) dt =$$

ed essendo la funzione integranda del primo integrale dispari, questo integrale è zero, mentre nel secondo la funzione è pari e quindi si ottiene

$$= 2 \int_0^{\pi} 3 \cos t \cos(9 \sin^2 t + 1) dt =$$

essendo $\cos t = \sin(\pi/2 - t)$ e $\sin t = \cos(\pi/2 - t)$

$$= 2 \int_0^{\pi} 3 \sin(\pi/2 - t) \cos(9 \cos^2(\pi/2 - t) + 1) dt =$$

posto $u = \pi/2 - t$ si ha

$$= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \sin u \cos(9 \cos^2 u + 1) du = 0$$

perché la funzione integranda è dispari.

Similmente

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(2 \cos t, -2 \sin t, 3) \cdot (-2 \sin t, -2 \cos t, 0) = \\ &= \left(\log(1 + 4 \cos^2 t) - \frac{3}{2} \sin t, \cos(4 \sin^2 t + 1) - \frac{3}{2} \cos t, e^2 \sin 2 \right) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) = \\ &= 3 - 2 \sin t \log(1 + 4 \cos^2 t) - 2 \cos t \cos(4 \sin^2 t + 1) \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} [3 - 2 \sin t \log(1 + 4 \cos^2 t) - 2 \cos t \cos(4 \sin^2 t + 1)] dt = \\ &= 6\pi + \int_0^{2\pi} [-2 \sin t \log(1 + 4 \cos^2 t) - 2 \cos t \cos(4 \sin^2 t + 1)] dt = 6\pi \end{aligned}$$

perché questo integrale di destra è zero. Infatti,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [-2 \sin t \log(1 + 4 \cos^2 t) - 2 \cos t \cos(4 \sin^2 t + 1)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-2 \sin t \log(1 + 4 \cos^2 t)] dt + \int_0^{2\pi} [-2 \cos t \cos(4 \sin^2 t + 1)] dt = \end{aligned}$$

essendo entrambe le funzioni periodiche di periodo 2π si ottiene

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [-2 \sin t \log(1 + 4 \cos^2 t)] dt - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cos(4 \sin^2 t + 1) dt =$$

ed essendo la funzione integranda del primo integrale dispari, questo integrale è zero, mentre nel secondo la funzione è pari e quindi si ottiene

$$= -4 \int_0^{\pi} \cos t \cos(4 \sin^2 t + 1) dt =$$

essendo $\cos t = \sin(\pi/2 - t)$ e $\sin t = \cos(\pi/2 - t)$

$$= 2 \int_0^{\pi} 3 \sin(\pi/2 - t) \cos(4 \cos^2(\pi/2 - t) + 1) dt =$$

posto $u = \pi/2 - t$ si ha

$$= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \sin u \cos(4 \cos^2 u + 1) du = 0$$

perché la funzione integranda è dispari.

In conclusione

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = -4\pi + 6\pi = 2\pi.$$

Versione V3

Quiz 1. Si consideri la funzione $f(x, y) = (y^2 - 16) \log(e^2 + 1 - x^2)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** La funzione f ha un punto di massimo locale e ha quattro punti di sella.
- ☐ **B** La funzione f ha un punto di minimo locale e ha quattro punti di sella.
- ☐ **C** La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha né punti di massimo locale né punti di sella.
- ☐ **D** La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha né punti di minimo locale né punti di sella.
- ☐ **E** La funzione f ha due punti di minimo locale, due punti di massimo locale e un punto di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \sqrt{e^2 + 1}\}$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2x(y^2 - 16)}{e^2 + 1 - x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \log(e^2 + 1 - x^2).$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x(y^2 - 16) = 0 \\ 2y \log(e^2 + 1 - x^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, & y = \pm 4 \\ y = 0, & x = \pm e. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono: $(0, 0)$, $(\pm e, \pm 4)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2(y^2 - 16) \frac{e^2 + 1 + x^2}{(e^2 + 1 - x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \log(e^2 + 1 - x^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{4xy}{e^2 + 1 - x^2}.$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{32}{e^2 + 1} & 0 \\ 0 & 2 \log(e^2 + 1) \end{pmatrix}, \quad H_f(e, 4) = H_f(-e, -4) = \begin{pmatrix} 0 & -16e \\ -16e & 0 \end{pmatrix},$$
$$H_f(e, -4) = H_f(-e, 4) = \begin{pmatrix} 0 & 16e \\ 16e & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di minimo locale per f , $(\pm e, \pm 4)$ sono quattro punti di sella per f .

La risposta corretta è ☒ **B**.

Quiz 2. Siano (a_n) una successione tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, 1)$.
- ☐ **B** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$.
- ☐ **C** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$.
- ☐ **D** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora $a_n \sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$.
- ☐ **E** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in (1, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

SVOLGIMENTO

Per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$. La risposta corretta è **B**.

Osserviamo che le altre risposte sono certamente errate. Infatti, la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge e $\frac{1}{n^{1/2}} \not\sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$, e quindi la risposta **D** è errata.

Inoltre la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge anche se $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, e quindi la risposta **A** è errata. Similmente la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge anche se $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, e quindi la risposta **E** è errata.

Infine, se consideriamo la successione (a_n) definita da

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n = 2^k \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } n \neq 2^k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$

si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge perché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (si vedano i dettagli a piè pagina)³, ed entrambe le serie a destra della disuguaglianza convergono. Però $a_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$, essendo

$$na_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 2^k \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \neq 2^k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\lim_n \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_n na_n \quad \text{non esiste.}$$

Ne segue che anche la risposta **C** è errata.

Quiz 3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \pi^2 x - x^3$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, siano b_n i coefficienti di Fourier di f . La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

A converge a $\frac{32}{105}\pi^6$.

B diverge.

C converge a $\frac{16}{105}\pi^6$.

D converge a π^6 .

E converge a $\frac{8}{105}\pi^6$.

³Se per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si pone $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, si osserva che $S_{2^m} \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k^2}$, per ogni $m \in \mathbb{N}$. Se ora si considera un qualunque $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, esiste almeno un $m \in \mathbb{N}$ tale che $2^{m-1} \leq n \leq 2^m$. Di conseguenza si ha che $S_n \leq S_{2^m} \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k^2}$. Poiché le serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convergono, per il Primo teorema del confronto sui limiti esiste in $\mathbb{R}$ il limite della successione (S_n) e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e, sempre, per il Primo teorema del confronto sui limiti, vale la disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Poiché g è dispari anche f è dispari e quindi i coefficienti a_n della serie di Fourier di f sono zero, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che l'identità di Parseval diventa

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

da cui si ricava che

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Essendo $|f|^2$ pari si ha che

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 x - x^3)^2 dx = 2 \int_0^{\pi} (\pi^2 x - x^3)^2 dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\pi^4 x^2 - 2\pi^2 x^4 + x^6) dx = 2 \left[\frac{1}{3} \pi^4 x^3 - \frac{2}{5} \pi^2 x^5 + \frac{1}{7} x^7 \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^7 - \frac{4}{5} \pi^7 + \frac{2}{7} \pi^7 = \frac{16}{105} \pi^7. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{16}{105} \pi^6.$$

La risposta corretta è C.

Quiz 4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 2, 3)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 indivergente ma non solenoidale, e siano Σ e S due superfici chiuse e diverse che sono i bordi rispettivamente di due aperti con bordo D e V di $\mathbb{R}^3$ che contengono il punto $(1, 2, 3)$.

Indicati con I_{Σ} e I_S i flussi uscenti di F rispettivamente dal bordo di D e dal bordo di V , quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A $I_{\Sigma} = I_S = 0$.
- B $0 = I_{\Sigma} \neq I_S$.
- C $I_{\Sigma} = I_S \neq 0$.
- D $I_{\Sigma} \neq I_S = 0$.
- E $I_{\Sigma} \neq I_S$ con $I_{\Sigma} \neq 0$ e $I_S \neq 0$.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è C.

Senza perdita di generalità possiamo supporre che il punto $(1, 2, 3)$ sia il punto $(0, 0, 0)$. Il campo F è indivergente ma non solenoidale e il suo dominio non è stellato (altrimenti F avrebbe potenziale vettore e quindi sarebbe solenoidale dato che per ipotesi è indivergente). Quindi esiste almeno una superficie chiusa $T \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tale che il flusso di F attraverso T non è zero. Evidentemente T deve essere il bordo di un aperto con bordo W che contiene $(0, 0, 0)$, perché, se non contenesse $(0, 0, 0)$, allora T sarebbe contenuta in un sottoinsieme stellato di $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e quindi F ristretto a questo insieme avrebbe potenziale vettore e quindi sarebbe solenoidale e di conseguenza il flusso di F attraverso T sarebbe zero.

Consideriamo il flusso uscente di F da $T = \partial W$ (analogamente si procede nell'altro caso).

Proviamo che esiste una palla di centro $(0, 0, 0)$ e raggio r tale che il flusso uscente di F dal bordo di questa palla coincide con quello uscente di F da $T = \partial W$.

Poiché $\overline{W} = W \cup \partial W$ è un insieme limitato, esiste $r > 0$ tale che $\overline{W} \subseteq B_r(0, 0, 0)$. Denotiamo con S_r la superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio r , ovvero $S_r = \partial B_r(0, 0, 0)$.

Sia $\Omega = B_r(0, 0, 0) \setminus W$. Evidentemente $\partial\Omega = S_r \cup T$ e $(0, 0, 0) \notin \Omega$. Quindi $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} = \text{dom}(F)$.

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza) il flusso uscente di F dal bordo di Ω , che è l'unione di S_r orientata secondo il verso uscente da $B_r(0, 0, 0)$ e di T orientata secondo il verso entrante in W , è

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma + \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \underbrace{\text{div} F(x, y, z)}_{=0} \, dx \, dy \, dz = 0$$

da cui segue che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = - \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma,$$

ed essendo

$$\int_{T^+} F \cdot n \, d\sigma = - \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma,$$

si ottiene che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_{T^+} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove S_r^- indica S_r orientata secondo il verso entrante, S_r^+ indica S_r orientata secondo il verso uscente, T^- indica T orientata secondo il verso entrante, T^+ indica T orientata secondo il verso uscente.

Poiché il flusso uscente di F da $T = \partial W$ non è zero, si ha che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma \neq 0.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento fatto sopra per S_r e T , prima con S al posto di T e poi con Σ al posto di T , si ottiene che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_S F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma \neq 0.$$

Concludiamo osservando che un campo vettoriale F avente le caratteristiche indicate esiste. Ad esempio

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

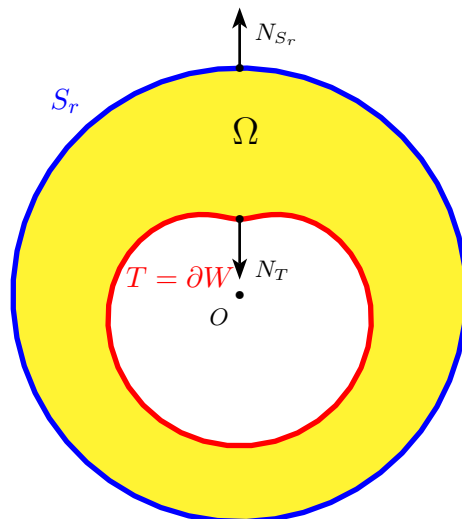
Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x - y - z, y, z - x + y)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (4t^2, 5t + t^2, 4t^2)$ vale

- ☐ A 0. ☐ B 9. ☐ C 36. ☐ D 3. ☐ E 18.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt =$$



essendo $\gamma'(t) = (8t, 5 + 2t, 8t)$ per ogni $t \in [0, 1]$ e

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, 1] : \quad F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= F(4t^2, 5t + t^2, 4t^2) \cdot (8t, 5 + 2t, 8t) = \\ &= (-5t - t^2, 5t + t^2, 5t + t^2) \cdot (8t, 5 + 2t, 8t) = (5t + t^2)(5 + 2t)\end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_0^1 (5t + t^2)(5 + 2t) dt = \left[\frac{1}{2} (5t + t^2)^2 \right]_0^1 = 18.$$

La risposta corretta è **E**.

Quiz 6. Un potenziale del campo vettoriale $F(x, y) = \left(\frac{4xy^2 + 3y}{1 + x^2y^2}, \frac{4x^2y + 3x}{1 + x^2y^2} \right)$ è

A $f(x, y) = 2 \log(1 + x^2y^2) + 3 \arctan(xy) + 1.$

B $f(x, y) = 2 \log(1 + x^2y^2) - 3 \arctan(xy) + 3.$

C $f(x, y) = \log(1 + x^2y^2) + 3 \arctan(xy) - 1.$

D $f(x, y) = \log(1 + x^2y^2) + \arctan(xy) - 2.$

E $f(x, y) = 2 \log(1 + x^2y^2) + \arctan(xy) + 2.$

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{(8xy + 3)(1 + x^2y^2) - 2x^2y(4xy^2 + 3y)}{(1 + x^2y^2)^2} = \frac{8xy + 3 - 3x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = \frac{4xy^2 + 3y}{1 + x^2y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = \frac{4x^2y + 3x}{1 + x^2y^2}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \frac{4xy^2 + 3y}{1 + x^2y^2} dx = \int \left(2 \frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} + 3 \frac{y}{1 + x^2y^2} \right) dx = 2 \log(1 + x^2y^2) + 3 \arctan(xy) + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{4x^2y + 3x}{1 + x^2y^2} + c'(y) = \frac{4x^2y + 3x}{1 + x^2y^2} \implies c'(y) = 0 \implies c(y) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 2 \log(1 + x^2y^2) + 3 \arctan(xy) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La risposta corretta è **A**.

Domanda 7. Sia $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{e-1}, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$.

Quanto vale l'integrale $\int_{\Omega} \frac{32z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz$?

SVOLGIMENTO

Passiamo in coordinate polari centrate in $(0,0,0)$ con la colatitudine misurata dall'asse z , ovvero consideriamo

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta, \varphi)| = \rho^2 \sin \vartheta.$$

Si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{32z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz = 32 \int_{\Omega'} \frac{\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho^4 + 1} d\rho d\vartheta d\varphi,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ è tale che $\Phi(\Omega') = \Omega$. Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{e-1} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^2 \leq \sqrt{e-1} \\ 0 \leq \rho \cos \vartheta \leq \rho \sin \vartheta \\ \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt[4]{e-1} \\ \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = [0, \sqrt[4]{e-1}] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{32z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz &= 32 \int_{\Omega'} \frac{\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho^4 + 1} d\rho d\vartheta d\varphi = \\ &= 64\pi \left(\int_0^{\sqrt[4]{e-1}} \frac{\rho^3}{\rho^4 + 1} d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = \\ &= 64\pi \left[\frac{1}{4} \log(\rho^4 + 1) \right]_0^{\sqrt[4]{e-1}} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è 4π .

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 26, z \geq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$ e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{26}yz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + e^x \cos x, \log(1 + y^4) - \frac{\sqrt{26}xz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \sin(z^2 + 4) \right).$$

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\text{dom}(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\} : x^2 + y^2 \neq 0\}$, ovvero su tutto $\mathbb{R}^3$ escluso l'asse z . Osserviamo che $\Sigma \subseteq \text{dom}(F)$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \text{rot} F(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) & f_2(x, y, z) & f_3(x, y, z) \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z), \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{26}x}{x^2 + y^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{\sqrt{26}y}{x^2 + y^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}, \right. \\ &\quad \left. -\sqrt{26}z \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x \left[2x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{x(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]}{(x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2 + z^2)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{26}z \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - y \left[2y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]}{(x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2 + z^2)} \Bigg) = \\
& = \left(\frac{\sqrt{26}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{\sqrt{26}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{\sqrt{26}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).
\end{aligned}$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 26 \\ z \geq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{26 - x^2 - y^2} \\ z \geq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{26 - x^2 - y^2} \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = \sqrt{26 - x^2 - y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{26 - x^2 - y^2})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned}
\text{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \text{rot}F \left(x, y, \sqrt{26 - x^2 - y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\
&= \left(\frac{1}{26}x, \frac{1}{26}y, \frac{1}{26}\sqrt{26 - x^2 - y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\
&= \frac{x^2}{26\sqrt{26 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{26\sqrt{26 - x^2 - y^2}} + \frac{1}{26}\sqrt{26 - x^2 - y^2} = \frac{1}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}}.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K \frac{1}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_K \frac{1}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = \int_{K'} \frac{\rho}{\sqrt{26 - \rho^2}} \, d\rho \, d\vartheta =$$

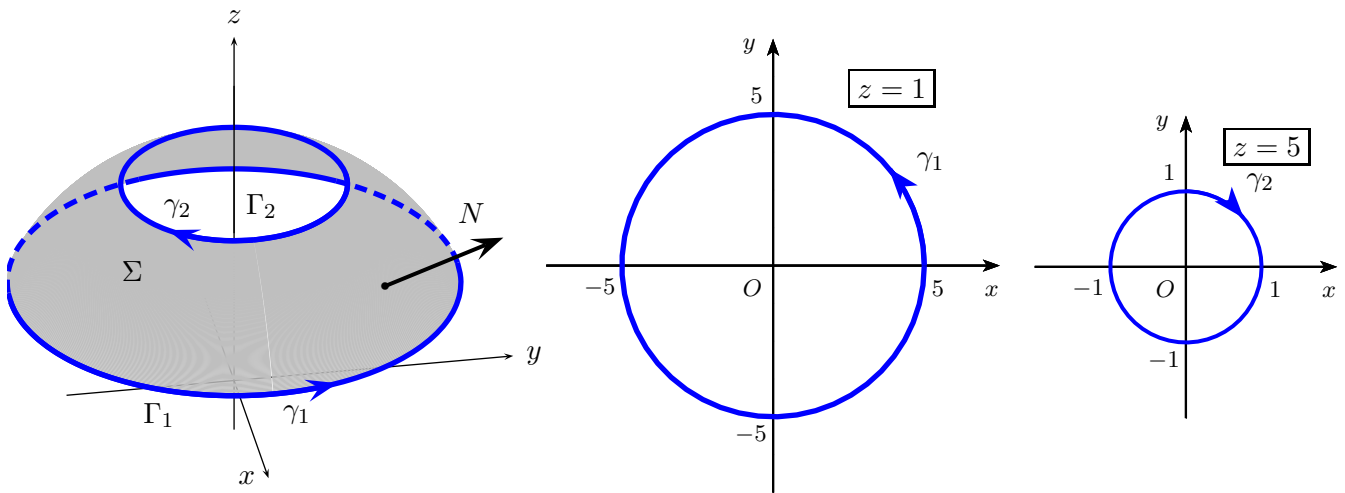
dove $K' = [1, 5] \times [0, 2\pi]$ e quindi si ottiene

$$= 2\pi \int_1^5 \rho (26 - \rho^2)^{-1/2} \, d\rho = 2\pi \left[- (26 - \rho^2)^{1/2} \right]_1^5 = 8\pi.$$

La risposta corretta è 8π .

Osservazione. Si può procedere anche calcolando direttamente l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ che è costituito dall'unione di due circonferenze. Infatti, si ha che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + y^2 = 25\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5, x^2 + y^2 = 1\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP.$$

Si ha che $\Gamma_1 = \text{im}(\gamma_1)$, dove $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva parametrica $\gamma_1(t) = (5 \cos t, 5 \sin t, 1)$ e $\Gamma_2 = \text{im}(\gamma_2)$, dove $\gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva parametrica $\gamma_2(t) = (\cos t, -\sin t, 5)$.

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) &= F(5 \cos t, 5 \sin t, 1) \cdot (-5 \sin t, 5 \cos t, 0) = \\ &= \left(\frac{1}{5} \sin t + e^{5 \cos t} \cos(5 \cos t), \log(1 + 5^4 \sin^4 t) - \frac{1}{5} \cos t, \sin 5 \right) \cdot (-5 \sin t, 5 \cos t, 0) = \\ &= -5 \sin t e^{5 \cos t} \cos(5 \cos t) + 5 \cos t \log(1 + 5^4 \sin^4 t) - 1 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} [-5 \sin t e^{5 \cos t} \cos(5 \cos t) + 5 \cos t \log(1 + 5^4 \sin^4 t) - 1] dt = \\ &= -2\pi + \int_0^{2\pi} [-5 \sin t e^{5 \cos t} \cos(5 \cos t) + 5 \cos t \log(1 + 5^4 \sin^4 t)] dt = -2\pi \end{aligned}$$

perché questo integrale di destra è zero. Infatti,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [-5 \sin t e^{5 \cos t} \cos(5 \cos t) + 5 \cos t \log(1 + 5^4 \sin^4 t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-5 \sin t e^{5 \cos t} \cos(5 \cos t)] dt + \int_0^{2\pi} 5 \cos t \log(1 + 5^4 \sin^4 t) dt = \end{aligned}$$

essendo entrambe le funzioni periodiche di periodo 2π si ottiene

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [-5 \sin t e^{5 \cos t} \cos(5 \cos t)] dt + \int_{-\pi}^{\pi} 5 \cos t \log(1 + 5^4 \sin^4 t) dt =$$

ed essendo la funzione integranda del primo integrale dispari, questo integrale è zero, mentre nel secondo la funzione è pari e quindi si ottiene

$$= 2 \int_0^{\pi} 5 \cos t \log(1 + 5^4 \sin^4 t) dt =$$

essendo $\cos t = \sin(\pi/2 - t)$ e $\sin t = \cos(\pi/2 - t)$

$$= 2 \int_0^\pi 5 \sin(\pi/2 - t) \log(1 + 5^4 \cos^4(\pi/2 - t)) dt =$$

posto $u = \pi/2 - t$ si ha

$$= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 5 \sin u \log(1 + 5^4 \cos^4 u) du = 0$$

perché la funzione integranda è dispari.

Similmente

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(\cos t, -\sin t, 5) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) = \\ &= (-5 \sin t + e^{\cos t} \cos(\cos t), \log(1 + \sin^4 t) - 5 \cos t, \sin 29) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) = \\ &= -\sin t e^{\cos t} \cos(\cos t) - \cos t \log(1 + \sin^4 t) + 5 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} [5 - \sin t e^{\cos t} \cos(\cos t) - \cos t \log(1 + \sin^4 t)] dt = \\ &= 10\pi + \int_0^{2\pi} [-\sin t e^{\cos t} \cos(\cos t) - \cos t \log(1 + \sin^4 t)] dt = 10\pi \end{aligned}$$

perché questo integrale di destra è zero. Infatti,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [-\sin t e^{\cos t} \cos(\cos t) - \cos t \log(1 + \sin^4 t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-\sin t e^{\cos t} \cos(\cos t)] dt - \int_0^{2\pi} \cos t \log(1 + \sin^4 t) dt = \end{aligned}$$

essendo entrambe le funzioni periodiche di periodo 2π si ottiene

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [-\sin t e^{\cos t} \cos(\cos t)] dt - \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \log(1 + \sin^4 t) dt =$$

ed essendo la funzione integranda del primo integrale dispari, questo integrale è zero, mentre nel secondo la funzione è pari e quindi si ottiene

$$= -2 \int_0^\pi \cos t \log(1 + \sin^4 t) dt =$$

essendo $\cos t = \sin(\pi/2 - t)$ e $\sin t = \cos(\pi/2 - t)$

$$= -2 \int_0^\pi \sin(\pi/2 - t) \log(1 + \cos^4(\pi/2 - t)) dt =$$

posto $u = \pi/2 - t$ si ha

$$= -2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin u \log(1 + \cos^4 u) du = 0$$

perché la funzione integranda è dispari.

In conclusione

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = -2\pi + 10\pi = 8\pi.$$

Quiz 1. Siano (a_n) una successione tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora $a_n \sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$.
- ☐ **B** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$.
- ☐ **C** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$.
- ☐ **D** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in (1, +\infty) \cup \{+\infty\}$.
- ☐ **E** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, 1)$.

SVOLGIMENTO

Per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$. La risposta corretta è ☐ **B**.

Osserviamo che le altre risposte sono certamente errate. Infatti, la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge e $\frac{1}{n^{1/2}} \not\sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$, e quindi la risposta ☐ **A** è errata.

Inoltre la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge anche se $\lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, e quindi la risposta ☐ **E** è errata. Similmente la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge anche se $\lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$, e quindi la risposta ☐ **D** è errata.

Infine, se consideriamo la successione (a_n) definita da

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n = 2^k \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } n \neq 2^k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$

si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge perché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (si vedano i dettagli a piè pagina)⁴, ed entrambe le serie a destra della disuguaglianza convergono. Però $a_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$, essendo

$$na_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 2^k \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \neq 2^k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N} \quad \implies \quad \lim_n \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_n na_n \quad \text{non esiste.}$$

Ne segue che anche la risposta ☐ **C** è errata.

⁴Se per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si pone $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, si osserva che $S_{2^m} \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k^2}$, per ogni $m \in \mathbb{N}$. Se ora si considera un

qualunque $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, esiste almeno un $m \in \mathbb{N}$ tale che $2^{m-1} \leq n \leq 2^m$. Di conseguenza si ha che $S_n \leq S_{2^m} \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k^2}$.

Poiché le serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convergono, per il Primo teorema del confronto sui limiti esiste in $\mathbb{R}$ il limite della successione (S_n) e

Quiz 2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(-1, -2, -3)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 indivergente ma non solenoidale, e siano Σ e S due superfici chiuse e diverse che sono i bordi rispettivamente di due aperti con bordo D e V di $\mathbb{R}^3$ che contengono il punto $(-1, -2, -3)$.

Indicati con I_Σ e I_S i flussi uscenti di F rispettivamente dal bordo di D e dal bordo di V , quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** $I_\Sigma \neq I_S = 0$.
- ☐ **B** $I_\Sigma = I_S \neq 0$.
- ☐ **C** $I_\Sigma = I_S = 0$.
- ☐ **D** $0 = I_\Sigma \neq I_S$.
- ☐ **E** $I_\Sigma \neq I_S$ con $I_\Sigma \neq 0$ e $I_S \neq 0$.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è **B**.

Senza perdita di generalità possiamo supporre che il punto $(-1, -2, -3)$ sia il punto $(0, 0, 0)$. Il campo F è indivergente ma non solenoidale e il suo dominio non è stellato (altrimenti F avrebbe potenziale vettore e quindi sarebbe solenoidale dato che per ipotesi è indivergente). Quindi esiste almeno una superficie chiusa $T \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tale che il flusso di F attraverso T non è zero. Evidentemente T deve essere il bordo di un aperto con bordo W che contiene $(0, 0, 0)$, perché, se non contenesse $(0, 0, 0)$, allora T sarebbe contenuta in un sottoinsieme stellato di $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e quindi F ristretto a questo insieme avrebbe potenziale vettore e quindi sarebbe solenoidale e di conseguenza il flusso di F attraverso T sarebbe zero.

Consideriamo il flusso uscente di F da $T = \partial W$ (analogamente si procede nell'altro caso).

Proviamo che esiste una palla di centro $(0, 0, 0)$ e raggio r tale che il flusso uscente di F dal bordo di questa palla coincide con quello uscente di F da $T = \partial W$.

Poiché $\overline{W} = W \cup \partial W$ è un insieme limitato, esiste $r > 0$ tale che $\overline{W} \subseteq B_r(0, 0, 0)$. Denotiamo con S_r la superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio r , ovvero $S_r = \partial B_r(0, 0, 0)$.

Sia $\Omega = B_r(0, 0, 0) \setminus W$. Evidentemente $\partial\Omega = S_r \cup T$ e $(0, 0, 0) \notin \Omega$. Quindi $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} = \text{dom}(F)$.

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza) il flusso uscente di F dal bordo di Ω , che è l'unione di S_r orientata secondo il verso uscente da $B_r(0, 0, 0)$ e di T orientata secondo il verso entrante in W , è

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma + \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \underbrace{\text{div} F(x, y, z)}_{=0} \, dx \, dy \, dz = 0$$

da cui segue che

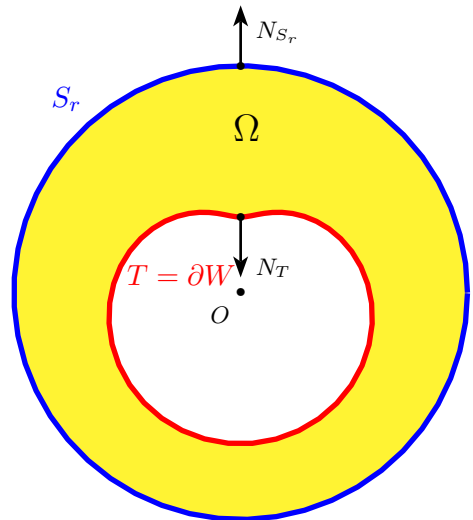
$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = - \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma,$$

ed essendo

$$\int_{T^+} F \cdot n \, d\sigma = - \int_{T^-} F \cdot n \, d\sigma,$$

quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e, sempre, per il Primo teorema del confronto sui limiti, vale la disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$



si ottiene che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_{T^+} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove S_r^- indica S_r orientata secondo il verso entrante, S_r^+ indica S_r orientata secondo il verso uscente, T^- indica T orientata secondo il verso entrante, T^+ indica T orientata secondo il verso uscente.

Poiché il flusso uscente di F da $T = \partial W$ non è zero, si ha che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma \neq 0.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento fatto sopra per S_r e T , prima con S al posto di T e poi con Σ al posto di T , si ottiene che

$$\int_{S_r^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_S F \cdot n \, d\sigma = \int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma \neq 0.$$

Concludiamo osservando che un campo vettoriale F avente le caratteristiche indicate esiste. Ad esempio

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, z - x - y, z + x - y)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (9t + t^2, 8t^2, 8t^2)$ vale

- ☐ A 50. ☐ B 0. ☐ C 25. ☐ D 5. ☐ E 100.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (9 + 2t, 16t, 16t)$ per ogni $t \in [0, 1]$ e

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1] : \quad F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= F(9t + t^2, 8t^2, 8t^2) \cdot (9 + 2t, 16t, 16t) = \\ &= (9t + t^2, -9t - t^2, 9t + t^2) \cdot (7 + 2t, 12t, 12t) = (9t + t^2)(9 + 2t) \end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_0^1 (9t + t^2)(9 + 2t) \, dt = \left[\frac{1}{2} (9t + t^2)^2 \right]_0^1 = 50.$$

La risposta corretta è ☒ A.

Quiz 4. Un potenziale del campo vettoriale $F(x, y) = \left(\frac{8xy^2 - 5y}{1 + x^2y^2}, \frac{8x^2y - 5x}{1 + x^2y^2} \right)$ è

- ☐ A $f(x, y) = 4 \log(1 + x^2y^2) - 5 \arctan(xy) + 2$.
☐ B $f(x, y) = 4 \log(1 + x^2y^2) + 5 \arctan(xy) + 4$.
☐ C $f(x, y) = 4 \log(1 + x^2y^2) - \arctan(xy) + 3$.
☐ D $f(x, y) = \log(1 + x^2y^2) - \arctan(xy) - 3$.
☐ E $f(x, y) = \log(1 + x^2y^2) - 5 \arctan(xy) - 2$.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{(16xy - 5)(1 + x^2y^2) - 2x^2y(8xy^2 - 5y)}{(1 + x^2y^2)^2} = \frac{16xy - 5 + 5x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = \frac{8xy^2 - 5y}{1 + x^2y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = \frac{8x^2y - 5x}{1 + x^2y^2}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \frac{8xy^2 - 5y}{1 + x^2y^2} dx = \int \left(4 \frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} - 5 \frac{y}{1 + x^2y^2} \right) dx = 4 \log(1 + x^2y^2) - 5 \arctan(xy) + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y . Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{8x^2y - 5x}{1 + x^2y^2} + c'(y) = \frac{8x^2y - 5x}{1 + x^2y^2} \implies c'(y) = 0 \implies c(y) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 4 \log(1 + x^2y^2) - 5 \arctan(xy) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La risposta corretta è A.

Quiz 5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 5x^3 - \pi^2x$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, siano b_n i coefficienti di Fourier di f . La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

A converge a $\frac{40}{21}\pi^6$.

B converge a $\frac{80}{21}\pi^6$.

C converge a $\frac{20}{21}\pi^6$.

D converge a π^6 .

E diverge.

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Poiché g è dispari anche f è dispari e quindi i coefficienti a_n della serie di Fourier di f sono zero, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che l'identità di Parseval diventa

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

da cui si ricava che

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Essendo $|f|^2$ pari si ha che

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (5x^3 - \pi^2x)^2 dx = 2 \int_0^{\pi} (5x^3 - \pi^2x)^2 dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi} (25x^6 - 10\pi^2x^4 + \pi^4x^2) dx = 2 \left[\frac{25}{7}x^7 - 2\pi^2x^5 + \frac{1}{3}\pi^4x^3 \right]_0^{\pi} = \frac{50}{7}\pi^7 - 4\pi^7 + \frac{2}{3}\pi^7 = \frac{80}{21}\pi^7. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{80}{21} \pi^6.$$

La risposta corretta è **B**.

Quiz 6. Si consideri la funzione $f(x, y) = (36 - y^2) \log(e^2 + 1 - x^2)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A La funzione f ha un punto di minimo locale e ha quattro punti di sella.

B La funzione f ha due punti di minimo locale, due punti di massimo locale e un punto di sella.

C La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha né punti di minimo locale né punti di sella.

D La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha né punti di massimo locale né punti di sella.

E La funzione f ha un punto di massimo locale e ha quattro punti di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \sqrt{e^2 + 1}\}$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2x(36 - y^2)}{e^2 + 1 - x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \log(e^2 + 1 - x^2).$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x(36 - y^2) = 0 \\ 2y \log(e^2 + 1 - x^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, & y = \pm 6 \\ y = 0, & x = \pm e. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono: $(0, 0)$, $(\pm e, \pm 6)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2(36 - y^2) \frac{e^2 + 1 + x^2}{(e^2 + 1 - x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2 \log(e^2 + 1 - x^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{4xy}{e^2 + 1 - x^2}.$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{72}{e^2 + 1} & 0 \\ 0 & -2 \log(e^2 + 1) \end{pmatrix}, \quad H_f(e, 6) = H_f(-e, -6) = \begin{pmatrix} 0 & 24e \\ 24e & 0 \end{pmatrix}, \\ H_f(e, -6) = H_f(-e, 6) = \begin{pmatrix} 0 & -24e \\ -24e & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di massimo locale per f , $(\pm e, \pm 6)$ sono quattro punti di sella per f .

La risposta corretta è **E**.

Domanda 7. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{e^3 - 1}, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Quanto vale l'integrale $\int_{\Omega} \frac{16z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz$?

SVOLGIMENTO

Passiamo in coordinate polari centrate in $(0, 0, 0)$ con la colatitudine misurata dall'asse z , ovvero consideriamo

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, \varphi)| = \rho^2 \sin \vartheta.$$

Si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{16z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz = 16 \int_{\Omega'} \frac{\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho^4 + 1} d\rho d\vartheta d\varphi,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ è tale che $\Phi(\Omega') = \Omega$. Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{e^3 - 1} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^2 \leq \sqrt{e^3 - 1} \\ 0 \leq \rho \cos \vartheta \leq \rho \sin \vartheta \\ \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt[4]{e^3 - 1} \\ \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = [0, \sqrt[4]{e^3 - 1}] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{16z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy dz &= 16 \int_{\Omega'} \frac{\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho^4 + 1} d\rho d\vartheta d\varphi = \\ &= 32\pi \left(\int_0^{\sqrt[4]{e^3 - 1}} \frac{\rho^3}{\rho^4 + 1} d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = \\ &= 32\pi \left[\frac{1}{4} \log(\rho^4 + 1) \right]_0^{\sqrt[4]{e^3 - 1}} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è 6π .

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 20, z \geq 2, x^2 + y^2 \geq 4\}$ e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\log(1 + x^4) + \frac{\sqrt{20}yz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \sin(y^4 + 1) - \frac{\sqrt{20}xz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, e^z \cos z \right).$$

Quanto vale l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z ?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\text{dom}(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\} : x^2 + y^2 \neq 0\}$, ovvero su tutto $\mathbb{R}^3$ escluso l'asse z . Osserviamo che $\Sigma \subseteq \text{dom}(F)$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \text{rot} F(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) & f_2(x, y, z) & f_3(x, y, z) \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z), \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{20}x}{x^2 + y^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{\sqrt{20}y}{x^2 + y^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}, \right. \\ &\quad -\sqrt{20}z \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x \left[2x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{x(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]}{(x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2 + z^2)} + \\ &\quad \left. -\sqrt{20}z \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - y \left[2y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]}{(x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2 + z^2)} \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{20}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{\sqrt{20}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{\sqrt{20}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20 \\ z \geq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{20 - x^2 - y^2} \\ z \geq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 16 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \sqrt{20 - x^2 - y^2} \\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{20 - x^2 - y^2})$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F \left(x, y, \sqrt{20 - x^2 - y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \left(\frac{1}{20}x, \frac{1}{20}y, \frac{1}{20}\sqrt{20 - x^2 - y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \frac{x^2}{20\sqrt{20 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{20\sqrt{20 - x^2 - y^2}} + \frac{1}{20}\sqrt{20 - x^2 - y^2} = \frac{1}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K \frac{1}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_K \frac{1}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = \int_{K'} \frac{\rho}{\sqrt{20 - \rho^2}} \, d\rho \, d\vartheta =$$

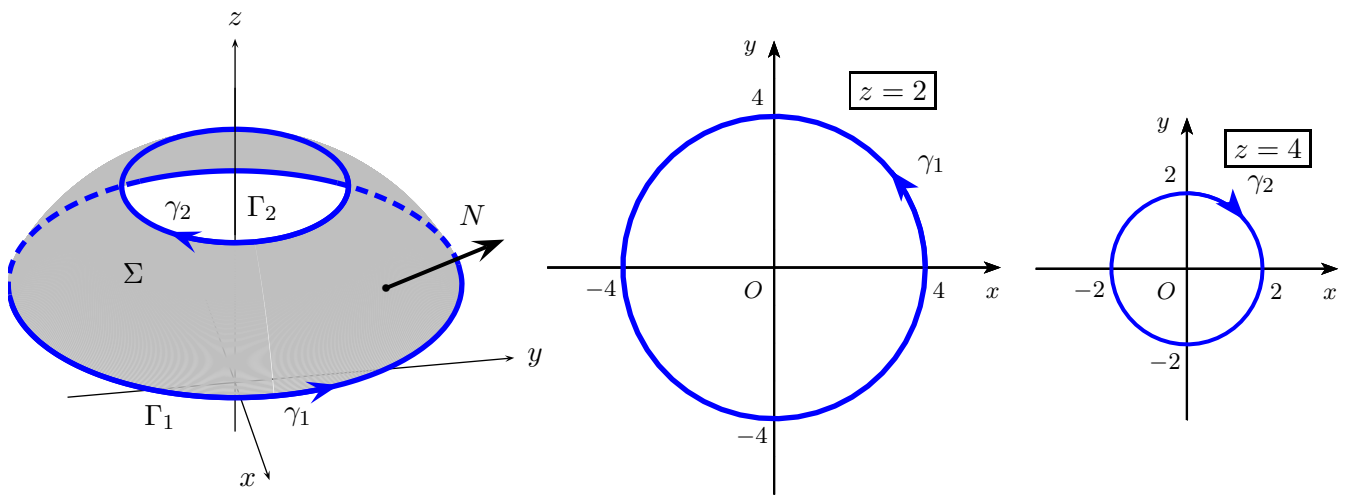
dove $K' = [2, 4] \times [0, 2\pi]$ e quindi si ottiene

$$= 2\pi \int_2^4 \rho (20 - \rho^2)^{-1/2} \, d\rho = 2\pi \left[-(20 - \rho^2)^{1/2} \right]_2^4 = 4\pi.$$

La risposta corretta è 4π .

Osservazione. Si può procedere anche calcolando direttamente l'integrale di linea di F lungo il bordo di Σ che è costituito dall'unione di due circonferenze. Infatti, si ha che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, x^2 + y^2 = 16\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4, x^2 + y^2 = 4\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP.$$

Si ha che $\Gamma_1 = \text{im}(\gamma_1)$, dove $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva parametrica $\gamma_1(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 2)$ e $\Gamma_2 = \text{im}(\gamma_2)$, dove $\gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva parametrica $\gamma_2(t) = (2 \cos t, -2 \sin t, 4)$.

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) &= F(4 \cos t, 4 \sin t, 2) \cdot (-4 \sin t, 4 \cos t, 0) = \\ &= \left(\log(1 + 4^4 \cos^4 t) + \frac{1}{2} \sin t, \sin(4^4 \sin^4 t + 1) - \frac{1}{2} \cos t, e^2 \sin 2 \right) \cdot (-4 \sin t, 4 \cos t, 0) = \\ &= -4 \sin t \log(1 + 4^4 \cos^4 t) + 4 \cos t \sin(4^4 \sin^4 t + 1) - 2 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} [-4 \sin t \log(1 + 4^4 \cos^4 t) + 4 \cos t \sin(4^4 \sin^4 t + 1) - 2] dt = \\ &= -4\pi + \int_0^{2\pi} [-4 \sin t \log(1 + 4^4 \cos^4 t) + 4 \cos t \sin(4^4 \sin^4 t + 1)] dt = -4\pi \end{aligned}$$

perché questo integrale di destra è zero. Infatti,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [-4 \sin t \log(1 + 4^4 \cos^4 t) + 4 \cos t \sin(4^4 \sin^4 t + 1)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-4 \sin t \log(1 + 4^4 \cos^4 t)] dt + \int_0^{2\pi} 4 \cos t \sin(4^4 \sin^4 t + 1) dt = \end{aligned}$$

essendo entrambe le funzioni periodiche di periodo 2π si ottiene

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [-4 \sin t \log(1 + 4^4 \cos^4 t)] dt + \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos t \sin(4^4 \sin^4 t + 1) dt =$$

ed essendo la funzione integranda del primo integrale dispari, questo integrale è zero, mentre nel secondo la funzione è pari e quindi si ottiene

$$= 2 \int_0^{\pi} 4 \cos t \sin(4^4 \sin^4 t + 1) dt =$$

essendo $\cos t = \sin(\pi/2 - t)$ e $\sin t = \cos(\pi/2 - t)$

$$= 2 \int_0^{\pi} 4 \sin(\pi/2 - t) \sin(4^4 \cos^4(\pi/2 - t) + 1) dt =$$

posto $u = \pi/2 - t$ si ha

$$= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \sin u \sin(4^4 \cos^4 u + 1) du = 0$$

perché la funzione integranda è dispari.

Similmente

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(2 \cos t, -2 \sin t, 4) \cdot (-2 \sin t, -2 \cos t, 0) = \\ &= (\log(1 + 16 \cos^4 t) + 2 \sin t, \sin(16 \sin^4 t + 1) - 2 \cos t, e^4 \sin 4) \cdot (-2 \sin t, -2 \cos t, 0) = \\ &= -2 \sin t \log(1 + 16 \cos^4 t) - 2 \cos t \sin(16 \sin^4 t + 1) + 4 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} [-2 \sin t \log(1 + 16 \cos^4 t) - 2 \cos t \sin(16 \sin^4 t + 1) + 4] dt = \\ &= 8\pi + \int_0^{2\pi} [-2 \sin t \log(1 + 16 \cos^4 t) - 2 \cos t \sin(16 \sin^4 t + 1)] dt = 8\pi \end{aligned}$$

perché questo integrale di destra è zero. Infatti,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [-2 \sin t \log(1 + 16 \cos^4 t) - 2 \cos t \sin(16 \sin^4 t + 1)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-2 \sin t \log(1 + 16 \cos^4 t)] dt + \int_0^{2\pi} [-2 \cos t \sin(16 \sin^4 t + 1)] dt = \end{aligned}$$

essendo entrambe le funzioni periodiche di periodo 2π si ottiene

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [-2 \sin t \log(1 + 16 \cos^4 t)] dt + \int_{-\pi}^{\pi} [-2 \cos t \sin(16 \sin^4 t + 1)] dt =$$

ed essendo la funzione integranda del primo integrale dispari, questo integrale è zero, mentre nel secondo la funzione è pari e quindi si ottiene

$$= -4 \int_0^{\pi} \cos t \sin(16 \sin^4 t + 1) dt =$$

essendo $\cos t = \sin(\pi/2 - t)$ e $\sin t = \cos(\pi/2 - t)$

$$= -4 \int_0^{\pi} \sin(\pi/2 - t) \sin(16 \cos^4(\pi/2 - t) + 1) dt =$$

posto $u = \pi/2 - t$ si ha

$$= -4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin u \sin(16 \cos^4 u + 1) du = 0$$

perché la funzione integranda è dispari.

In conclusione

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = -4\pi + 8\pi = 4\pi.$$
