Svolgimento di quiz e domande dell'esame di Analisi Matematica II del 22/02/2024 ore 14

Versione: V1

Quiz 1. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^{10} + y^{10} \leq 2, \ y \geq x \geq 0\}$. L'integrale $\int_\Omega 2xy^9 \, dx \, dy$ vale

$\boxed{A}$ $\frac{1}{3}$.

$\boxed{B}$ $\frac{1}{6}$.

$\boxed{C}$ $\frac{1}{2}$.

$\boxed{D}$ 3.

$\boxed{E}$ 6.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è y-semplice. Infatti

$$x^{10} + y^{10} \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt[10]{2 - x^{10}} \leq y \leq \sqrt[10]{2 - x^{10}} \quad \text{con } |x| \leq \sqrt[10]{2}$$

e quindi dovendo essere $y \geq x \geq 0$ si ha che $0 \leq x \leq y \leq \sqrt[10]{2 - x^{10}}$ che implica

$$0 \leq x \leq \sqrt[10]{2 - x^{10}} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ x \leq y \leq \sqrt[10]{2 - x^{10}}\right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi y-semplici, si ha che

$$\int_\Omega 2xy^9 \, dx \, dy = 2\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt[10]{2-x^{10}}} xy^9 \, dy\right) dx = 2\int_0^1 x \left[\frac{1}{10} y^{10}\right]_x^{\sqrt[10]{2-x^{10}}} dx =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 x\left(2 - 2x^{10}\right) dx = \frac{2}{5}\int_0^1 \left(x - x^{11}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^{12}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 2. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(x\left(x^2 + z - 4\right), \ y\left(4 - z - y^2\right), \ 3\right)$ e la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 4 - x^2 - y^2, \ z \geq 0, \ y \geq 0\}$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z vale

$\boxed{A}$ 6π.

$\boxed{B}$ 3π.

$\boxed{C}$ 0.

$\boxed{D}$ 12π.

$\boxed{E}$ 24π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, dove

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ \ y \geq 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = \left(x,\, y,\, 4 - x^2 - y^2\right)$. Ne segue che

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \; dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y),\, -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y),\, 1\right) = (2x,\, 2y,\, 1)\,.$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Quindi

$$N(x, y) = N_\sigma(x, y) = (2x,\, 2y,\, 1)\,.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F\left(x,\, y,\, 4 - x^2 - y^2\right) \cdot (2x,\, 2y,\, 1) = \\ &= \left(-xy^2,\, x^2y,\, 3\right) \cdot (2x,\, 2y,\, 1) = 3. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \; dx \, dy = \int_K 3 \; dx \, dy = 3\, m(K) = 6\pi,$$

dove $m(K)$ è la misura, ovvero l'area, di K. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. Siano $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2)$, tale che $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G = (f_2, f_1)$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Per ogni curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dP = \int_\gamma \nabla f \cdot dP$.

$\boxed{B}$ Esiste almeno una curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ tale che $\displaystyle\int_\gamma G \cdot dP \neq \int_\gamma \nabla f \cdot dP$.

$\boxed{C}$ Per ogni curva parametrica regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

$\boxed{D}$ Per ogni curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma G \cdot dP = \int_\gamma \nabla f \cdot dP$.

$\boxed{E}$ Per ogni curva parametrica regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma G \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale G è anch'esso di classe C^1. Posto $G = (g_1, g_2)$, si ha che $g_1 = f_2$ e $g_2 = f_1$. Ne segue che

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)$$

e quindi essendo per ipotesi $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)$ risulta che

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y),$$

ossia G verifica la condizione necessaria per i campi conservativi di classe C^1. Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, si deduce che G è conservativo. Inoltre anche il campo vettoriale ∇f è conservativo, per definizione. Ne segue che gli integrali di linea di G e ∇f lungo una qualunque curva parametrica chiusa e regolare avente sostegno in $\mathbb{R}^2$ sono nulli, e quindi sono uguali. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 4. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{e}{3}\right)^n$

$\boxed{A}$ è indeterminata.

$\boxed{B}$ converge a $\dfrac{3}{3+e}$.

$\boxed{C}$ diverge positivamente.

$\boxed{D}$ converge a $\dfrac{e^2}{3(3+e)}$.

$\boxed{E}$ converge a $\dfrac{e}{3+e}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{e}{3}\right)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{e}{3}\right)^n.$$

Quindi è una serie geometrica con la ragione $a=-\dfrac{e}{3}$. Poiché

$$|a|=\left|-\frac{e}{3}\right|=\frac{e}{3}<1.$$

questa serie converge. Poiché per $|a|<1$ si ha che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a}$, ne segue che

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{e}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{e}{3}\right)^n-\left(1-\frac{e}{3}\right)=\frac{1}{1+\frac{e}{3}}-\left(1-\frac{e}{3}\right)=\frac{\frac{e^2}{9}}{1+\frac{e}{3}}=\frac{e^2}{3(3+e)}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 5. Siano $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se F è irrotazionale e Ω è semplicemente connesso, allora F ammette potenziale vettore.

$\boxed{B}$ Se F non ammette potenziale vettore, allora F non è indivergente.

$\boxed{C}$ Se F è indivergente e Ω è semplicemente connesso, allora F ammette potenziale vettore.

$\boxed{D}$ Se F è indivergente e Ω è stellato, allora F ammette potenziale vettore.

$\boxed{E}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

SVOLGIMENTO

Per la condizione sufficiente per i campi che ammettono potenziale vettore, se F è indivergente e Ω è stellato, allora F ammette potenziale vettore. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 6. Il campo vettoriale $F(x,y)=\left(3x^2\left|8-y^3\right|+4xy^2,\ -4y\left|x^2-y\right|-3x^3y^2\right)$ è conservativo sull'insieme

$\boxed{A}$ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y>x^2\}$.

$\boxed{B}$ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y<x^2\}$.

$\boxed{C}$ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y>2\}$.

$\boxed{D}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < 2\}$.

$\boxed{E}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 < y < 2\}$.

SVOLGIMENTO

Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 3x^2\left(8 - y^3\right) + 4xy^2 & \text{se } y < 2 \\ 3x^2\left(y^3 - 8\right) + 4xy^2 & \text{se } y > 2, \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} -4y\left(x^2 - y\right) - 3x^3y^2 & \text{se } x^2 > y \\ 4y\left(x^2 - y\right) - 3x^3y^2 & \text{se } x^2 < y. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 8xy - 9x^2y^2 & \text{se } y < 2 \\ 8xy + 9x^2y^2 & \text{se } y > 2, \end{cases} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -8xy - 9x^2y^2 & \text{se } x^2 > y \\ 8xy - 9x^2y^2 & \text{se } x^2 < y. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \quad \iff \quad x^2 < y < 2.$$

Poiché l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 < y < 2\}$ è semplicemente connesso e il campo F è di classe C^1 su questo insieme, si ha che F è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(9x^2z - 4xy, \ 2y^2 + e^x, \ \dfrac{3z^2}{4+\sqrt{x^2+y^2}} - 9xz^2\right)$ e l'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4\right\}$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3$ e F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : \ z \in \mathbb{R}\}$. Poiché $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : \ z \in \mathbb{R}\}$, per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\mathrm{div}F(x,y,z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$.

Quindi $\mathrm{div}F(x,y,z) = \dfrac{6z}{4+\sqrt{x^2+y^2}}$ e

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_\Omega \frac{6z}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z. Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \rho \ge 0, \ 0 \le \vartheta \le 2\pi, \ z \in \mathbb{R}, \qquad |\mathrm{det} J_\Phi(\rho,\vartheta,z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 6\int_\Omega \frac{z}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz = 6\int_{\Omega'} \frac{z\rho}{4+\rho}\, d\rho\, d\vartheta\, dz,$$

dove $\Omega' = \{(\rho,\vartheta,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2 \le \rho \le 4, \ 0 \le \vartheta \le 2\pi, \ \rho \le z \le 4\}$.

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = 6\int_{\Omega'} \frac{z\rho}{4+\rho}\, d\rho\, d\vartheta\, dz = 12\pi \int_2^4 \frac{\rho}{4+\rho}\left(\int_\rho^4 z\, dz\right) d\rho =$$

$$= 12\pi \int_2^4 \frac{\rho}{4+\rho}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_\rho^4 d\rho = 6\pi \int_2^4 \frac{\rho}{4+\rho}\left(16 - \rho^2\right) d\rho =$$

$$= 6\pi \int_2^4 \rho\,(4-\rho)\ d\rho = 6\pi \int_2^4 \left(4\rho-\rho^2\right)\ d\rho = 6\pi \left[2\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3\right]_2^4 = 32\pi.$$

La risposta corretta è 32π.

Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(-\dfrac{6y}{x^2+y^2} - yz,\ \dfrac{6x}{x^2+y^2} + xz,\ z^2 - \log\left(x^2+y^2\right)\right)$ e la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ z = 10 - x^2 - y^2,\ \ z \geq 1\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

SVOLGIMENTO

Il dominio del campo vettoriale F è $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ x^2+y^2=0\}$. Poiché $\Sigma \not\subseteq \mathrm{dom}\,(F)$ non si può applicare il Teorema di Stokes (o del rotore).

Si ha che

$$\partial\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ z = 1,\ \ x^2+y^2 = 9\right\}.$$

Una parametrizzazione di $\partial\Sigma$ che induce su di esso un verso di percorrenza positivo (ovvero antiorario) rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z è $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (3\cos t,\, 3\sin t,\, 1).$$

Quindi si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F\cdot dP = \int_\gamma F\cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

essendo

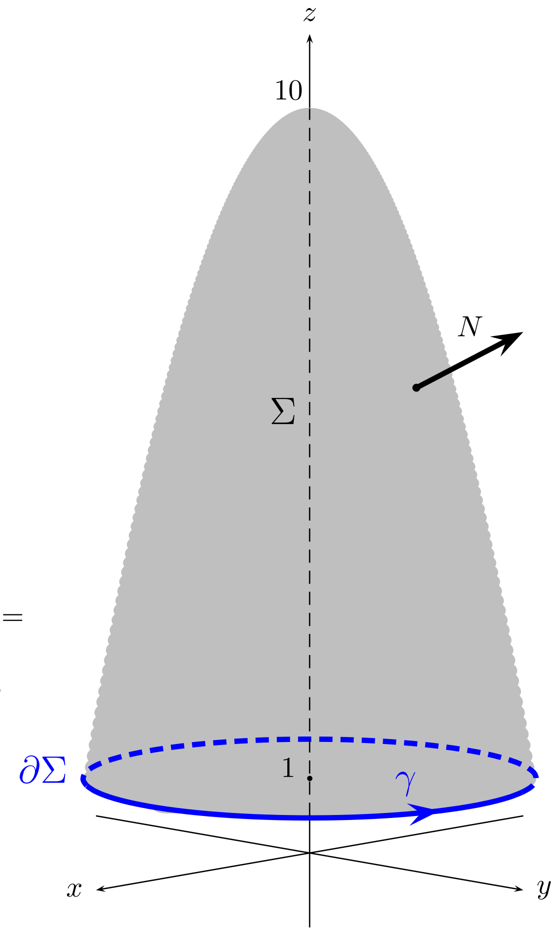
$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = F(3\cos t,\, 3\sin t,\, 1)\cdot(-3\sin t,\, 3\cos t,\, 0) =$$

$$= (-5\sin t,\ 5\cos t,\ 1 - \log 9)\cdot(-3\sin t,\, 3\cos t,\, 0) = 15,$$

si ottiene

$$= \int_0^{2\pi} 15\,dt = 30\pi.$$

La risposta corretta è 30π.



Versione V2

Quiz 1. Siano $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1, $G=(g_1,g_2)$, tale che $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $F=(g_2,g_1)$ e sia $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Per ogni curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma F\cdot dP=\int_\gamma \nabla g\cdot dP$.

$\boxed{B}$ Esiste almeno una curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ tale che $\displaystyle\int_\gamma F\cdot dP\neq\int_\gamma \nabla g\cdot dP$.

$\boxed{C}$ Per ogni curva parametrica regolare $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma F\cdot dP=g(\gamma(b))-g(\gamma(a))$.

$\boxed{D}$ Per ogni curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma G\cdot dP=\int_\gamma \nabla g\cdot dP$.

$\boxed{E}$ Per ogni curva parametrica regolare $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma G\cdot dP=g(\gamma(b))-g(\gamma(a))$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è anch'esso di classe C^1. Posto $F=(f_1,f_2)$, si ha che $f_1=g_2$ e $f_2=g_1$. Ne segue che

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y),\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)$$

e quindi essendo per ipotesi $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)$ risulta che

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y),$$

ossia F verifica la condizione necessaria per i campi conservativi di classe C^1. Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, si deduce che F è conservativo. Inoltre anche il campo vettoriale ∇g è conservativo, per definizione. Ne segue che gli integrali di linea di F e ∇g lungo una qualunque curva parametrica chiusa e regolare avente sostegno in $\mathbb{R}^2$ sono nulli, e quindi sono uguali. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 2. Siano $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se F ammette un potenziale vettore di classe C^1 in Ω, allora F è indivergente.

$\boxed{B}$ Se F non ammette potenziale vettore, allora F non è indivergente.

$\boxed{C}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{D}$ Se F è irrotazionale e Ω è semplicemente connesso, allora F ammette potenziale vettore.

$\boxed{E}$ Se F è indivergente e Ω è semplicemente connesso, allora F ammette potenziale vettore.

SVOLGIMENTO

Per la condizione necessaria per i campi che ammettono potenziale vettore, se F ammette un potenziale vettore di classe C^1 in Ω, allora F è indivergente. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. Il campo vettoriale $F(x,y)=\Big(-3x\,|x+y^2|+4x^2y^3,\ 4y^2\,|x^3+1|+3x^2y\Big)$ è conservativo sull'insieme

$\boxed{A}$ $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<-1\big\}$.

$\boxed{B}$ $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>-y^2\big\}$.

$\boxed{C}$ $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<-y^2\big\}$.

$\boxed{D}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < -y^2\}$.

$\boxed{E}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > -1\}$.

SVOLGIMENTO

Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$f_1(x,y) = \begin{cases} -3x\left(x+y^2\right) + 4x^2y^3 & \text{se } x > -y^2 \\ 3x\left(x+y^2\right) + 4x^2y^3 & \text{se } x < -y^2, \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} 4y^2\left(x^3+1\right) + 3x^2y & \text{se } x > -1 \\ -4y^2\left(x^3+1\right) + 3x^2y & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 12x^2y^2 - 6xy & \text{se } x > -y^2 \\ 12x^2y^2 + 6xy & \text{se } x < -y^2, \end{cases} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 12x^2y^2 + 6xy & \text{se } x > -1 \\ 6xy - 12x^2y^2 & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \quad \iff \quad -1 < x < -y^2.$$

Poiché l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < -y^2\}$ è semplicemente connesso e il campo F è di classe C^1 su questo insieme, si ha che F è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 4. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-\pi}{2}\right)^n$

$\boxed{A}$ converge a $\dfrac{(\pi-1)^2}{2(3-\pi)}$.

$\boxed{B}$ converge a $\dfrac{\pi-1}{3-\pi}$.

$\boxed{C}$ è indeterminata.

$\boxed{D}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ converge a $\dfrac{2}{3-\pi}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-\pi}{2}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\pi-1}{2}\right)^n.$$

Quindi è una serie geometrica con la ragione $a = \dfrac{\pi-1}{2}$. Poiché

$$|a| = \left|\frac{\pi-1}{2}\right| = \frac{\pi-1}{2} > 1.$$

questa serie diverge positivamente. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 5. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \Big(-x\left(x^2+z-9\right), \ -y\left(9-z-y^2\right), \ 4\Big)$ e la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 9 - x^2 - y^2, \ z \geq 0, \ x \geq 0\}$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z vale

$\boxed{A}$ 18π.

$\boxed{B}$ 36π.

$\boxed{C}$ 9π.

$\boxed{D}$ 0.

$\boxed{E}$ 3π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, dove

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 \leq 9, \ \ x \geq 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = \big(x,\ y,\ 9 - x^2 - y^2\big)$. Ne segue che

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \ dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y),\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y),\ 1\right) = (2x,\ 2y,\ 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Quindi

$$N(x, y) = N_\sigma(x, y) = (2x,\ 2y,\ 1).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F\left(x,\ y,\ 9 - x^2 - y^2\right) \cdot (2x,\ 2y,\ 1) = \\ &= \left(xy^2,\ -x^2 y,\ 4\right) \cdot (2x,\ 2y,\ 1) = 4. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \ dx \, dy = \int_K 4 \ dx \, dy = 4\, m(K) = 18\pi,$$

dove $m(K)$ è la misura, ovvero l'area, di K. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 6. Sia $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^{12} + y^{12} \leq 2, \ \ x \geq y \geq 0\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega 7x^{11} y \, dx \, dy$ vale

$\boxed{A}$ 4.

$\boxed{B}$ 2.

$\boxed{C}$ $\frac{1}{4}$.

$\boxed{D}$ $\frac{1}{8}$.

$\boxed{E}$ $\frac{1}{2}$.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è x-semplice. Infatti

$$x^{12} + y^{12} \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt[12]{2 - y^{12}} \leq x \leq \sqrt[12]{2 - y^{12}} \quad \text{con } |y| \leq \sqrt[12]{2}$$

e quindi dovendo essere $x \geq y \geq 0$ si ha che $0 \leq y \leq x \leq \sqrt[12]{2 - y^{12}}$ che implica

$$0 \leq y \leq \sqrt[12]{2 - y^{12}} \quad \Longrightarrow \quad y \leq 1.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ 0 \leq y \leq 1, \ \ y \leq x \leq \sqrt[12]{2 - y^{12}}\right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi x-semplici, si ha che

$$\int_\Omega 7x^{11} y \, dx \, dy = 7 \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt[12]{2-y^{12}}} x^{11} y \, dx\right) dy = 7 \int_0^1 y \left[\frac{1}{12} x^{12}\right]_y^{\sqrt[12]{2-y^{12}}} dy =$$

$$= \frac{7}{12}\int_0^1 y\left(2-2y^{12}\right)\,dy = \frac{7}{6}\int_0^1 \left(y-y^{13}\right)\,dy =$$

$$= \frac{7}{6}\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{14}y^{14}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(6xy - 5x^2z,\ \sin x - 3y^2,\ \dfrac{z^2}{6+\sqrt{x^2+y^2}} + 5xz^2\right)$ e l'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ 3 \le \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6\right\}$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\operatorname{dom}(F) = \mathbb{R}^3$ e F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z):\ \ z\in\mathbb{R}\}$. Poiché $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z):\ \ z\in\mathbb{R}\}$, per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\,d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

dove, posto $F=(f_1,f_2,f_3)$, si ha che $\operatorname{div}F(x,y,z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$.

Quindi $\operatorname{div}F(x,y,z) = \dfrac{2z}{6+\sqrt{x^2+y^2}}$ e

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\,d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_\Omega \frac{2z}{6+\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z. Si ha che

$$\Phi:\quad \begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta \\ z=z \end{cases} \qquad \rho\ge 0,\ 0\le\vartheta\le 2\pi,\ z\in\mathbb{R}, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta,z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\,d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 2\int_\Omega \frac{z}{6+\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz = 2\int_{\Omega'}\frac{z\rho}{6+\rho}\,d\rho\,d\vartheta\,dz,$$

dove $\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ 3\le\rho\le 6,\ \ 0\le\vartheta\le 2\pi,\ \ \rho\le z\le 6\right\}$.

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\,d\sigma = 2\int_{\Omega'}\frac{z\rho}{6+\rho}\,d\rho\,d\vartheta\,dz = 4\pi\int_3^6 \frac{\rho}{6+\rho}\left(\int_\rho^6 z\,dz\right)\,d\rho =$$

$$= 4\pi\int_3^6 \frac{\rho}{6+\rho}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_\rho^6\,d\rho = 2\pi\int_3^6\frac{\rho}{6+\rho}\left(36-\rho^2\right)\,d\rho =$$

$$= 2\pi\int_3^6 \rho\,(6-\rho)\,d\rho = 2\pi\int_3^6\left(6\rho-\rho^2\right)\,d\rho =$$

$$= 2\pi\left[3\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3\right]_3^6 = 36\pi.$$

La risposta corretta è 36π.

Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\dfrac{4y}{x^2+y^2} + yz,\ -\dfrac{4x}{x^2+y^2} - xz,\ z^4 + \log\left(x^2+y^2\right)\right)$ e la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ z = 6-x^2-y^2,\ \ z\ge 2\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

Si ha che

$$\partial\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ z = 2, \ \ x^2 + y^2 = 4\right\}.$$

Una parametrizzazione di $\partial\Sigma$ che induce su di esso un verso di percorrenza positivo (ovvero antiorario) rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z è $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (2\cos t, \, 2\sin t, \, 2).$$

Quindi si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt =$$

essendo

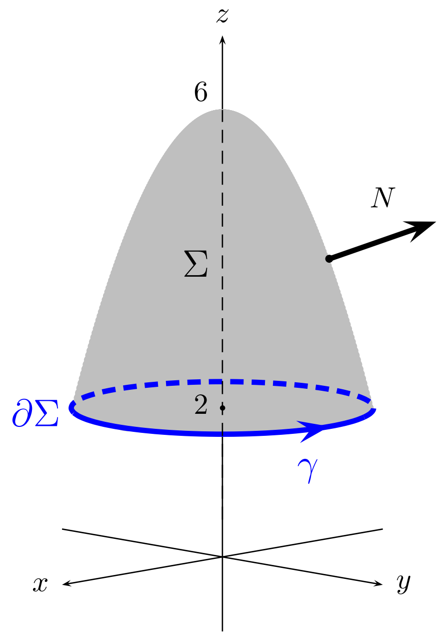
$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(2\cos t, \, 2\sin t, \, 2) \cdot (-2\sin t, \, 2\cos t, \, 0) =$$

$$= (6\sin t, \ -6\cos t, \ 16 + \log 4) \cdot (-2\sin t, \, 2\cos t, \, 0) = -12,$$

si ottiene

$$= \int_0^{2\pi} (-12) \, dt = -24\pi.$$

La risposta corretta è -24π.



SVOLGIMENTO

Il dominio del campo vettoriale F è $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x^2 + y^2 = 0\}$. Poiché $\Sigma \not\subseteq \mathrm{dom}\,(F)$ non si può applicare il Teorema di Stokes (o del rotore).

Versione V3

Quiz 1. Siano $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1, $F=(f_1,f_2)$, tale che $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G=(f_2,f_1)$ e sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Per ogni curva parametrica regolare $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma F\cdot dP=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$.

$\boxed{B}$ Per ogni curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma G\cdot dP=\int_\gamma \nabla f\cdot dP$.

$\boxed{C}$ Per ogni curva parametrica regolare $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma G\cdot dP=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$.

$\boxed{D}$ Esiste almeno una curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ tale che $\displaystyle\int_\gamma G\cdot dP\neq\int_\gamma \nabla f\cdot dP$.

$\boxed{E}$ Per ogni curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma F\cdot dP=\int_\gamma \nabla f\cdot dP$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale G è anch'esso di classe C^1. Posto $G=(g_1,g_2)$, si ha che $g_1=f_2$ e $g_2=f_1$. Ne segue che

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y),\qquad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)$$

e quindi essendo per ipotesi $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$ risulta che

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y),$$

ossia G verifica la condizione necessaria per i campi conservativi di classe C^1. Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, si deduce che G è conservativo. Inoltre anche il campo vettoriale ∇f è conservativo, per definizione. Ne segue che gli integrali di linea di G e ∇f lungo una qualunque curva parametrica chiusa e regolare avente sostegno in $\mathbb{R}^2$ sono nulli, e quindi sono uguali. La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 2. Il campo vettoriale $F(x,y)=\left(4x^2\left|27-y^3\right|+5xy^2,\ -5y\left|x^2-y\right|-4x^3y^2\right)$ è conservativo sull'insieme

$\boxed{A}$ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2<y<3\right\}$.

$\boxed{B}$ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y>3\right\}$.

$\boxed{C}$ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y<3\right\}$.

$\boxed{D}$ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y>x^2\right\}$.

$\boxed{E}$ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y<x^2\right\}$.

SVOLGIMENTO

Posto $F=(f_1,f_2)$ si ha che

$$f_1(x,y)=\begin{cases}4x^2\left(27-y^3\right)+5xy^2 & \text{se } y<3\\ 4x^2\left(y^3-27\right)+5xy^2 & \text{se } y>3,\end{cases}\qquad f_2(x,y)=\begin{cases}-5y\left(x^2-y\right)-4x^3y^2 & \text{se } x^2>y\\ 5y\left(x^2-y\right)-4x^3y^2 & \text{se } x^2<y.\end{cases}$$

Quindi

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}10xy-12x^2y^2 & \text{se } y<3\\ 12x^2y^2+10xy & \text{se } y>3,\end{cases}\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}-10xy-12x^2y^2 & \text{se } x^2>y\\ 10xy-12x^2y^2 & \text{se } x^2<y.\end{cases}$$

Ne segue che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \quad \iff \quad x^2 < y < 3.$$

Poiché l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 < y < 3\}$ è semplicemente connesso e il campo F è di classe C^1 su questo insieme, si ha che F è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^{14} + y^{14} \leq 2, \ \ y \geq x \geq 0\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega 4xy^{13}\, dx\, dy$ vale

$\boxed{A}$ $\frac{1}{4}$.

$\boxed{B}$ $\frac{1}{2}$.

$\boxed{C}$ 2.

$\boxed{D}$ $\frac{1}{8}$.

$\boxed{E}$ 4.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è y-semplice. Infatti

$$x^{14} + y^{14} \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt[14]{2 - x^{14}} \leq y \leq \sqrt[14]{2 - x^{14}} \quad \text{con } |x| \leq \sqrt[14]{2}$$

e quindi dovendo essere $y \geq x \geq 0$ si ha che $0 \leq x \leq y \leq \sqrt[14]{2 - x^{14}}$ che implica

$$0 \leq x \leq \sqrt[4]{2 - x^{14}} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ \ x \leq y \leq \sqrt[14]{2 - x^{14}}\right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi y-semplici, si ha che

$$\int_\Omega 4xy^{13}\, dx\, dy = 4\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt[14]{2-x^{14}}} xy^{13}\, dy\right) dx = 4\int_0^1 x\left[\frac{1}{14}y^{14}\right]_x^{\sqrt[14]{2-x^{14}}} dx =$$

$$= \frac{2}{7}\int_0^1 x\left(2 - 2x^{14}\right) dx = \frac{4}{7}\int_0^1 \left(x - x^{15}\right) dx =$$

$$= \frac{4}{7}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{16}x^{16}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 4. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{\pi}\right)^n$

$\boxed{A}$ converge a $\frac{\pi}{\pi+3}$.

$\boxed{B}$ è indeterminata.

$\boxed{C}$ diverge positivamente.

$\boxed{D}$ converge a $\frac{3}{\pi+3}$.

$\boxed{E}$ converge a $\frac{9}{\pi(\pi+3)}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{\pi}\right)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{3}{\pi}\right)^n.$$
Quindi è una serie geometrica con la ragione $a=-\frac{3}{\pi}$. Poiché
$$|a|=\left|-\frac{3}{\pi}\right|=\frac{3}{\pi}<1.$$
questa serie converge. Poiché per $|a|<1$ si ha che $\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a}$, ne segue che
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{3}{\pi}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{\pi}\right)^n-\left(1-\frac{3}{\pi}\right)=\frac{1}{1+\frac{3}{\pi}}-\left(1-\frac{3}{\pi}\right)=\frac{\frac{9}{\pi^2}}{1+\frac{3}{\pi}}=\frac{9}{\pi(\pi+3)}.$$
La risposta corretta è $\boxed{\mathrm{E}}$.

Quiz 5. Siano $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se F non ammette potenziale vettore, allora F non è indivergente.

$\boxed{B}$ Se F è indivergente e Ω è semplicemente connesso, allora F ammette potenziale vettore.

$\boxed{C}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{D}$ Se F è indivergente e Ω è stellato, allora F ammette potenziale vettore.

$\boxed{E}$ Se F è irrotazionale e Ω è semplicemente connesso, allora F ammette potenziale vettore.

SVOLGIMENTO

Per la condizione sufficiente per i campi che ammettono potenziale vettore, se F è indivergente e Ω è stellato, allora F ammette potenziale vettore. La risposta corretta è $\boxed{\mathrm{D}}$.

Quiz 6. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z)=\left(x\left(16-x^2-z\right),\ y\left(z+y^2-16\right),\ 2\right)$ e la superficie $\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ z=16-x^2-y^2,\ \ z\geq 0,\ \ y\leq 0\right\}$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z vale

$\boxed{A}$ 32π.

$\boxed{B}$ 8π.

$\boxed{C}$ 4π.

$\boxed{D}$ 0.

$\boxed{E}$ 16π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g:K\to\mathbb{R}$ definita da $g(x,y)=16-x^2-y^2$, dove
$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^2+y^2\leq 16,\ \ y\leq 0\right\}.$$
Quindi $\Sigma=\sigma(K)$, dove $\sigma(x,y)=\left(x,\ y,\ 16-x^2-y^2\right)$. Ne segue che
$$\int_{\Sigma}F\cdot n\,d\sigma=\int_K F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y)\ dx\,dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\ 1\right) = (2x,\ 2y,\ 1)\,.$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Quindi

$$N(x,y) = N_\sigma(x,y) = (2x,\ 2y,\ 1)\,.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) &= F\left(x,\ y,\ 16 - x^2 - y^2\right) \cdot (2x,\ 2y,\ 1) = \\ &= \left(xy^2,\ -x^2y,\ 2\right) \cdot (2x,\ 2y,\ 1) = 2. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\ dx\, dy = \int_K 2\ dx\, dy = 2\, m(K) = 16\pi,$$

dove $m(K)$ è la misura, ovvero l'area, di K. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(2x^2 + e^y,\ 7y^2z - 4xy,\ \dfrac{6z^2}{4+\sqrt{x^2+y^2}} - 7yz^2\right)$ e l'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4\right\}$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3$ e F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) :\ z \in \mathbb{R}\}$. Poiché $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) :\ z \in \mathbb{R}\}$, per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \text{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div}F(x,y,z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$.

Quindi $\text{div}F(x,y,z) = \dfrac{12z}{4+\sqrt{x^2+y^2}}$ e

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \text{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_\Omega \frac{12z}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z. Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \rho \ge 0,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi,\ z \in \mathbb{R}, \qquad |\text{det}J_\Phi(\rho,\vartheta,z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \text{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 12\int_\Omega \frac{z}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz = 12\int_{\Omega'} \frac{z\rho}{4+\rho}\, d\rho\, d\vartheta\, dz,$$

dove $\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2 \le \rho \le 4,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi,\ \rho \le z \le 4\right\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma &= 12\int_{\Omega'} \frac{z\rho}{4+\rho}\, d\rho\, d\vartheta\, dz = 24\pi \int_2^4 \frac{\rho}{4+\rho}\left(\int_\rho^4 z\, dz\right) d\rho = \\ &= 24\pi \int_2^4 \frac{\rho}{4+\rho}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_\rho^4 d\rho = 12\pi \int_2^4 \frac{\rho}{4+\rho}\left(16 - \rho^2\right)\, d\rho = \\ &= 12\pi \int_2^4 \rho\,(4-\rho)\, d\rho = 12\pi \int_2^4 \left(4\rho - \rho^2\right)\, d\rho = \end{aligned}$$

$$= 12\pi \left[2\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3\right]_2^4 = 64\pi.$$

La risposta corretta è 64π.

Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(-\frac{5y}{x^2+y^2} - yz,\ \frac{5x}{x^2+y^2} + xz,\ z^3 - \log\left(x^2+y^2\right)\right)$ e la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 10 - x^2 - y^2,\ z \geq 1\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

SVOLGIMENTO

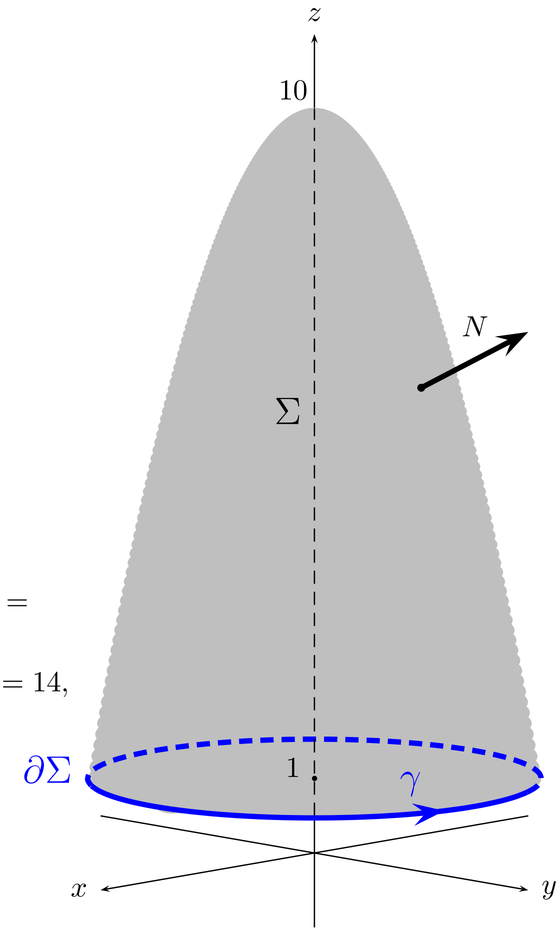
Il dominio del campo vettoriale F è $\operatorname{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 0\}$. Poiché $\Sigma \not\subseteq \operatorname{dom}(F)$ non si può applicare il Teorema di Stokes (o del rotore).

Si ha che

$$\partial\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 1,\ x^2+y^2 = 9\right\}.$$

Una parametrizzazione di $\partial\Sigma$ che induce su di esso un verso di percorrenza positivo (ovvero antiorario) rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z è $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (3\cos t,\ 3\sin t,\ 1).$$



Quindi si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F\cdot dP = \int_\gamma F\cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = F(3\cos t,\ 3\sin t,\ 1)\cdot(-3\sin t,\ 3\cos t,\ 0) =$$

$$= \left(-\frac{14}{3}\sin t,\ \frac{14}{3}\cos t,\ 1 - \log 9\right)\cdot(-3\sin t,\ 3\cos t,\ 0) = 14,$$

si ottiene

$$= \int_0^{2\pi} 14\,dt = 28\pi.$$

La risposta corretta è 28π.

Versione V4

Quiz 1. Siano $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1, $G = (g_1, g_2)$, tale che $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $F = (g_2, g_1)$ e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Per ogni curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dP = \int_\gamma \nabla g \cdot dP$.

$\boxed{B}$ Esiste almeno una curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ tale che $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dP \neq \int_\gamma \nabla g \cdot dP$.

$\boxed{C}$ Per ogni curva parametrica γ chiusa e regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma G \cdot dP = \int_\gamma \nabla g \cdot dP$.

$\boxed{D}$ Per ogni curva parametrica regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma G \cdot dP = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$.

$\boxed{E}$ Per ogni curva parametrica regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dP = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è anch'esso di classe C^1. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che $f_1 = g_2$ e $f_2 = g_1$. Ne segue che

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y)$$

e quindi essendo per ipotesi $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x, y)$ risulta che

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y),$$

ossia F verifica la condizione necessaria per i campi conservativi di classe C^1. Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, si deduce che F è conservativo. Inoltre anche il campo vettoriale ∇g è conservativo, per definizione. Ne segue che gli integrali di linea di F e ∇g lungo una qualunque curva parametrica chiusa e regolare avente sostegno in $\mathbb{R}^2$ sono nulli, e quindi sono uguali. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 2. Il campo vettoriale $F(x, y) = \Big(-4x \left| x + y^2 \right| + 5x^2 y^3,\ 5y^2 \left| x^3 + 8 \right| + 4x^2 y \Big)$ è conservativo sull'insieme

$\boxed{A}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > -2\}$.

$\boxed{B}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > -y^2\}$.

$\boxed{C}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ -2 < x < -y^2\}$.

$\boxed{D}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x < -2\}$.

$\boxed{E}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x < -y^2\}$.

SVOLGIMENTO

Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$f_1(x, y) = \begin{cases} -4x\left(x + y^2\right) + 5x^2y^3 & \text{se } x > -y^2 \\ 4x\left(x + y^2\right) + 5x^2y^3 & \text{se } x < -y^2, \end{cases} \qquad f_2(x, y) = \begin{cases} 5y^2\left(x^3 + 8\right) + 4x^2y & \text{se } x > -2 \\ -5y^2\left(x^3 + 8\right) + 4x^2y & \text{se } x < -2. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 15x^2y^2 - 8xy & \text{se } x > -y^2 \\ 15x^2y^2 + 8xy & \text{se } x < -y^2, \end{cases} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 15x^2y^2 + 8xy & \text{se } x > -2 \\ 8xy - 15x^2y^2 & \text{se } x < -2. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \quad \iff \quad -2 < x < -y^2.$$

Poiché l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2 < x < -y^2\}$ è semplicemente connesso e il campo F è di classe C^1 su questo insieme, si ha che F è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^{16} + y^{16} \leq 2, \ x \geq y \geq 0\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega 6x^{15}y \, dx \, dy$ vale

$\boxed{A}$ 6.

$\boxed{B}$ $\frac{1}{2}$.

$\boxed{C}$ 3.

$\boxed{D}$ $\frac{1}{6}$.

$\boxed{E}$ $\frac{1}{3}$.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è x-semplice. Infatti

$$x^{16} + y^{16} \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt[16]{2-y^{16}} \leq x \leq \sqrt[16]{2-y^{16}} \quad \text{con } |y| \leq \sqrt[16]{2}$$

e quindi dovendo essere $x \geq y \geq 0$ si ha che $0 \leq y \leq x \leq \sqrt[16]{2-y^{16}}$ che implica

$$0 \leq y \leq \sqrt[16]{2-y^{16}} \quad \Longrightarrow \quad y \leq 1.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 1, \ y \leq x \leq \sqrt[16]{2-y^{16}}\right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi x-semplici, si ha che

$$\int_\Omega 6x^{15}y \, dx \, dy = 6\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt[16]{2-y^{16}}} x^{15}y \, dx \right) dy = 6\int_0^1 y \left[\frac{1}{16}x^{16} \right]_y^{\sqrt[16]{2-y^{16}}} dy =$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 y\left(2 - 2y^{16}\right) dy = \frac{3}{4}\int_0^1 \left(y - y^{17}\right) dy =$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{18}y^{18}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 4. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{1-\pi}\right)^n$

$\boxed{A}$ diverge positivamente.

$\boxed{B}$ converge a $\dfrac{3}{\pi-4}$.

$\boxed{C}$ converge a $\dfrac{\pi-1}{\pi-4}$.

$\boxed{D}$ converge a $\dfrac{9}{(\pi-1)(\pi-4)}$.

$\boxed{E}$ è indeterminata.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{1-\pi}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi-1}\right)^n.$$

Quindi è una serie geometrica con la ragione $a = \dfrac{3}{\pi-1}$. Poiché

$$|a| = \left|\frac{3}{\pi-1}\right| = \frac{3}{\pi-1} > 1.$$

questa serie diverge positivamente. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 5. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se F è indivergente e Ω è semplicemente connesso, allora F ammette potenziale vettore.

$\boxed{B}$ Se F è irrotazionale e Ω è semplicemente connesso, allora F ammette potenziale vettore.

$\boxed{C}$ Se F ammette un potenziale vettore di classe C^1 in Ω, allora F è indivergente.

$\boxed{D}$ Se F non ammette potenziale vettore, allora F non è indivergente.

$\boxed{E}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

SVOLGIMENTO

Per la condizione necessaria per i campi che ammettono potenziale vettore, se F ammette un potenziale vettore di classe C^1 in Ω, allora F è indivergente. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 6. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \big(-x\left(36-x^2-z\right),\ -y\left(z+y^2-36\right),\ 2\big)$ e la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 36 - x^2 - y^2,\ z \geq 0,\ x \leq 0\right\}$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z vale

$\boxed{A}$ 72π.

$\boxed{B}$ 9π.

$\boxed{C}$ 36π.

$\boxed{D}$ 0.

$\boxed{E}$ 18π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = 36 - x^2 - y^2$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 36,\ x \geq 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x,y) = \left(x,\ y,\ 36 - x^2 - y^2\right)$. Ne segue che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K} F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\ dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\ 1\right) = (2x,\ 2y,\ 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Quindi

$$N(x,y) = N_{\sigma}(x,y) = (2x,\ 2y,\ 1).$$

Si ha che

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = F\left(x,\, y,\, 36 - x^2 - y^2\right) \cdot (2x,\, 2y,\, 1) =$$
$$= \left(-xy^2,\, x^2y,\, 2\right) \cdot (2x,\, 2y,\, 1) = 2.$$

Ne segue che

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\; dx\, dy = \int_K 2\; dx\, dy = 2\, m(K) = 36\pi,$$

dove $m(K)$ è la misura, ovvero l'area, di K. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\cos y - 3x^2,\ 6xy - 8y^2 z,\ \dfrac{2z^2}{6 + \sqrt{x^2+y^2}} + 8yz^2\right)$ e l'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ 3 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6\right\}$.

Quanto vale il flusso uscente di F dal bordo di Ω?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3$ e F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) :\ \ z \in \mathbb{R}\}$. Poiché $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) :\ \ z \in \mathbb{R}\}$, per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\mathrm{div} F(x,y,z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$.

Quindi $\mathrm{div} F(x,y,z) = \dfrac{4z}{6 + \sqrt{x^2+y^2}}$ e

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_\Omega \frac{4z}{6 + \sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z. Si ha che

$$\Phi :\quad \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,\ \ z \in \mathbb{R}, \qquad |\mathrm{det} J_\Phi(\rho,\vartheta,z)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 4\int_\Omega \frac{z}{6 + \sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz = 4\int_{\Omega'} \frac{z\rho}{6+\rho}\, d\rho\, d\vartheta\, dz,$$

dove $\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ 3 \leq \rho \leq 6,\ \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,\ \ \rho \leq z \leq 6\right\}$.

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = 4\int_{\Omega'} \frac{z\rho}{6+\rho}\, d\rho\, d\vartheta\, dz = 8\pi \int_3^6 \frac{\rho}{6+\rho} \left(\int_\rho^6 z\, dz\right)\, d\rho =$$
$$= 8\pi \int_3^6 \frac{\rho}{6+\rho} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_\rho^6 d\rho = 4\pi \int_3^6 \frac{\rho}{6+\rho}\left(36 - \rho^2\right)\, d\rho =$$
$$= 4\pi \int_3^6 \rho\,(6-\rho)\; d\rho = 4\pi \int_3^6 \left(6\rho - \rho^2\right)\, d\rho =$$
$$= 4\pi \left[3\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3\right]_3^6 = 72\pi.$$

La risposta corretta è 72π.

Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{3y}{x^2 + y^2} + yz,\ -\frac{3x}{x^2 + y^2} - xz,\ z^5 + \log\left(x^2 + y^2\right)\right)$ e la superficie $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ z = 6 - x^2 - y^2,\ \ z \geq 2\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

SVOLGIMENTO

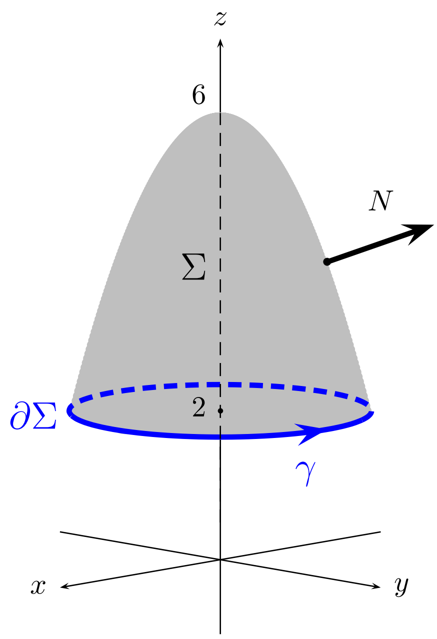
Il dominio del campo vettoriale F è $\operatorname{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ x^2 + y^2 = 0\}$. Poiché $\Sigma \not\subseteq \operatorname{dom}(F)$ non si può applicare il Teorema di Stokes (o del rotore).

Si ha che

$\partial\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ z = 2,\ \ x^2 + y^2 = 4\right\}.$

Una parametrizzazione di $\partial\Sigma$ che induce su di esso un verso di percorrenza positivo (ovvero antiorario) rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z è $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 2).$$



Quindi si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F\cdot dP = \int_{\gamma} F\cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = F(2\cos t,\ 2\sin t,\ 2)\cdot(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0) =$$

$$= \left(\frac{11}{2}\sin t,\ -\frac{11}{2}\cos t,\ 32 + \log 4\right)\cdot(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0) = -11,$$

si ottiene

$$= \int_0^{2\pi} (-11)\, dt = -22\pi.$$

La risposta corretta è -22π.