

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V1	A	B	E	B	E	E	8	-36

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Sia $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{4 - y^2 - z^2} \leq x \leq \frac{3}{2} \sqrt{4 - y^2 - z^2} \right\}$.

Calcolare l'integrale $\int_{\Omega} \frac{6x}{2 + \sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 4, \sqrt{4 - y^2 - z^2} \leq x \leq \frac{3}{2} \sqrt{4 - y^2 - z^2} \right\}.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse x si ottiene

$$\int_{\Omega} \frac{6x}{2 + \sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz = \int_{\Omega'} \frac{6x\rho}{2 + \rho} d\rho d\vartheta dx,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \sqrt{4 - \rho^2} \leq x \leq \frac{3}{2} \sqrt{4 - \rho^2} \right\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{6x}{2 + \sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz &= \int_{\Omega'} \frac{6x\rho}{2 + \rho} d\rho d\vartheta dx = 12\pi \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{4-\rho^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-\rho^2}} \frac{x\rho}{2 + \rho} dx \right) d\rho = \\ &= 12\pi \int_0^2 \frac{\rho}{2 + \rho} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\sqrt{4-\rho^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = \frac{15}{2} \pi \int_0^2 \frac{\rho}{2 + \rho} (4 - \rho^2) d\rho = \\ &= \frac{15}{2} \pi \int_0^2 (2\rho - \rho^2) d\rho = \frac{15}{2} \pi \left[\rho^2 - \frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^2 = 10\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V2	C	A	B	C	C	B	16	32

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Sia $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{2}{3} \sqrt{4 - x^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2 - z^2} \right\}$.

Calcolare l'integrale $\int_{\Omega} \frac{27y}{2 + \sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 4, \frac{2}{3} \sqrt{4 - x^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2 - z^2} \right\}.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse y si ottiene

$$\int_{\Omega} \frac{27y}{2 + \sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz = \int_{\Omega'} \frac{27y\rho}{2 + \rho} d\rho d\vartheta dy,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \frac{2}{3} \sqrt{4 - \rho^2} \leq y \leq \sqrt{4 - \rho^2} \right\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{27y}{2 + \sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz &= \int_{\Omega'} \frac{27y\rho}{2 + \rho} d\rho d\vartheta dy = 54\pi \int_0^2 \left(\int_{\frac{2}{3}\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \frac{y\rho}{2 + \rho} dy \right) d\rho = \\ &= 54\pi \int_0^2 \frac{\rho}{2 + \rho} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\frac{2}{3}\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = 15\pi \int_0^2 \frac{\rho}{2 + \rho} (4 - \rho^2) d\rho = \\ &= 15\pi \int_0^2 (2\rho - \rho^2) d\rho = 15\pi \left[\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^2 = 20\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V3	A	E	C	C	A	A	-8	36

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Sia $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{16 - y^2 - z^2} \leq x \leq \frac{5}{4} \sqrt{16 - y^2 - z^2} \right\}$.

Calcolare l'integrale $\int_{\Omega} \frac{6x}{4 + \sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 16, \sqrt{16 - y^2 - z^2} \leq x \leq \frac{5}{4} \sqrt{16 - y^2 - z^2} \right\}.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse x si ottiene

$$\int_{\Omega} \frac{6x}{4 + \sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz = \int_{\Omega'} \frac{6x\rho}{4 + \rho} d\rho d\vartheta dx,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \sqrt{16 - \rho^2} \leq x \leq \frac{5}{4} \sqrt{16 - \rho^2} \right\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{6x}{4 + \sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz &= \int_{\Omega'} \frac{6x\rho}{4 + \rho} d\rho d\vartheta dx = 12\pi \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{16-\rho^2}}^{\frac{5}{4}\sqrt{16-\rho^2}} \frac{x\rho}{4 + \rho} dx \right) d\rho = \\ &= 12\pi \int_0^4 \frac{\rho}{4 + \rho} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\sqrt{16-\rho^2}}^{\frac{5}{4}\sqrt{16-\rho^2}} d\rho = \frac{27}{8}\pi \int_0^4 \frac{\rho}{4 + \rho} (16 - \rho^2) d\rho = \\ &= \frac{27}{8}\pi \int_0^4 (4\rho - \rho^2) d\rho = \frac{27}{8}\pi \left[2\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^4 = 36\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V4	D	A	A	B	C	E	-16	-32

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Sia $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{4}{5} \sqrt{16 - x^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{16 - x^2 - z^2} \right\}$.

Calcolare l'integrale $\int_{\Omega} \frac{25y}{4 + \sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 16, \frac{4}{5} \sqrt{16 - x^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{16 - x^2 - z^2} \right\}.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse y si ottiene

$$\int_{\Omega} \frac{25y}{4 + \sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz = \int_{\Omega'} \frac{25y\rho}{4 + \rho} d\rho d\vartheta dy,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \frac{4}{5} \sqrt{16 - \rho^2} \leq y \leq \sqrt{16 - \rho^2} \right\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{25y}{4 + \sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz &= \int_{\Omega'} \frac{25y\rho}{4 + \rho} d\rho d\vartheta dy = 50\pi \int_0^4 \left(\int_{\frac{4}{5}\sqrt{16-\rho^2}}^{\sqrt{16-\rho^2}} \frac{y\rho}{4 + \rho} dy \right) d\rho = \\ &= 50\pi \int_0^4 \frac{\rho}{4 + \rho} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\frac{4}{5}\sqrt{16-\rho^2}}^{\sqrt{16-\rho^2}} d\rho = 9\pi \int_0^4 \frac{\rho}{4 + \rho} (16 - \rho^2) d\rho = \\ &= 9\pi \int_0^4 (4\rho - \rho^2) d\rho = 9\pi \left[2\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^4 = 96\pi. \end{aligned}$$