Svolgimento di quiz e domande dell'esame di Analisi Matematica II del 17/06/2024 ore 14

Versione: V1

Quiz 1. Si consideri la funzione $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^2 - x^2 - 2y^2 + 1$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, due punti di minimo locale e due punti di sella.

$\boxed{B}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{C}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.

$\boxed{D}$ La funzione f ha due punti di massimo locale, due punti di minimo locale e un punto di sella.

$\boxed{E}$ La funzione f ha un punto di minimo locale, due punti di massimo locale e due punti di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\mathrm{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x\left(x^2+y^2\right) - 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y\left(x^2+y^2\right) - 4y.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x\left(2x^2+2y^2-1\right) = 0 \\ \\ 4y\left(x^2+y^2-1\right) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \quad x^2+y^2 = \frac{1}{2} \\ \\ y = 0, \quad x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono: $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 4y^2 - 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4x^2 + 12y^2 - 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8xy.$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad H_f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di massimo locale per f, $(0,\pm 1)$ sono due punti di minimo locale per f, mentre $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ sono due punti di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 2. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo e $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ $f - g$ è un potenziale di F su Ω.

$\boxed{B}$ Se Ω è connesso per archi, allora $f - g$ è costante.

$\boxed{C}$ $f - g$ è costante.

$\boxed{D}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{E}$ Se Ω non è semplicemente connesso, allora $f - g$ non è costante.

SVOLGIMENTO

Per la proprietà dei potenziali di un campo vettoriale conservativo, se Ω è connesso per archi, allora $f - g$ è costante. La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(\frac{6x}{x^2+y^2+2} - 4y^2 + 3\log 2,\ \frac{6y}{x^2+y^2+2} - 8xy\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : \left[0, \sqrt{e^2-3}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{e^2-3},\ t\left(t^2 - e^2 + 4\right)\right)$ vale

$\boxed{A}$ $-2e^2$.

$\boxed{B}$ $-4e^2$.

$\boxed{C}$ $9 - 2e^2$.

$\boxed{D}$ 0.

$\boxed{E}$ $18 - 4e^2$.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{12xy}{(x^2+y^2+2)^2} - 8y = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \dfrac{6x}{x^2+y^2+2} - 4y^2 + 3\log 2, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \dfrac{6y}{x^2+y^2+2} - 8xy. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(\frac{6x}{x^2+y^2+2} - 4y^2 + 3\log 2\right) dx = 3\log\left(x^2+y^2+2\right) - 4xy^2 + 3x\log 2 + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{6y}{x^2+y^2+2} - 8xy + c'(y) = \frac{6y}{x^2+y^2+2} - 8xy \quad \Longrightarrow \quad c'(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c(y) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x,y) = 3\log\left(x^2+y^2+2\right) - 4xy^2 + 3x\log 2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f\left(\gamma\left(\sqrt{e^2-3}\right)\right) - f(\gamma(0)) = f\left(1, \sqrt{e^2-3}\right) - f(0,0) = 18 - 4e^2.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 4. Sia $p \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^p - \log^3 n}{n^2}$ converge se e solo se

$\boxed{A}$ $p > 1$.

$\boxed{B}$ $p < 1$.

$\boxed{C}$ $p > 2$.

$\boxed{D}$ $0 < p < 1$.

$\boxed{E}$ $p < 2$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che:

- $p \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad n^p \leq \log^3 n, \ \forall\, n \geq 3 \quad \Longrightarrow \quad$ la serie è a termini negativi;
- $p > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log^3 n = o(n^p),\ n \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad$ la serie è a termini positivi.

Se $p \leq 0$ consideriamo quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log^3 n - n^p}{n^2}$ che è a termini positivi. Poiché $\log^3 n = o(n^q)$ per $n \to +\infty$ per ogni $q > 0$, si ha che

$$\frac{\log^3 n - n^p}{n^2} \sim \frac{\log^3 n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{2-q}}\right),\ n \to +\infty, \text{ per ogni } q > 0.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{2-q}}$ converge se $2 - q > 1$, cioè $0 < q < 1$, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log^3 n - n^p}{n^2}$ converge per ogni $p \leq 0$ e di conseguenza la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^p - \log^3 n}{n^2}$ converge per ogni $p \leq 0$.

Se $p > 0$, poiché $\log^3 n = o(n^p)$ per $n \to +\infty$ si ha che

$$\frac{n^p - \log^3 n}{n^2} \sim \frac{n^p}{n^2} = \frac{1}{n^{2-p}},\ n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{2-p}}$ converge se $2 - p > 1$, cioè $0 < p < 1$, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^p - \log^3 n}{n^2}$ converge per ogni $0 < p < 1$.

In conclusione la serie data converge se e solo se $p < 1$. La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 5. Siano $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = \varphi\left(\|(x, y)\|\right)$, dove $\|(x, y)\|$ è la norma di (x, y) in $\mathbb{R}^2$.

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la derivata $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ è uguale a

$\boxed{A}$ $\varphi''\left(\|(x, y)\|\right) \dfrac{x^2}{\|(x, y)\|^2}$.

$\boxed{B}$ $\varphi''\left(\|(x, y)\|\right) \dfrac{x^2}{\|(x, y)\|^2} + \varphi'\left(\|(x, y)\|\right) \dfrac{x^2}{\|(x, y)\|^3}$.

$\boxed{C}$ $\varphi''\left(\|(x, y)\|\right)$.

$\boxed{D}$ $\varphi''\left(\|(x, y)\|\right) \|(x, y)\|^2 x^2$.

$\boxed{E}$ $\varphi''\left(\|(x, y)\|\right) \dfrac{x^2}{\|(x, y)\|^2} + \varphi'\left(\|(x, y)\|\right) \dfrac{y^2}{\|(x, y)\|^3}$.

SVOLGIMENTO

Poiché la funzione norma $\|\cdot\|$ è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, per composizione anche f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e quindi per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ esiste la derivata $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$.

Poiché $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, la derivata parziale di $\|\cdot\|$ rispetto a x in ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ è

$$\frac{\partial \|\cdot\|}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\|(x, y)\|}.$$

Essendo $f = \varphi \circ \|\cdot\|$, per la regola della catena si ha che per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi'(\|(x, y)\|) \frac{\partial \|\cdot\|}{\partial x}(x, y) = \varphi'(\|(x, y)\|) \frac{x}{\|(x, y)\|}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \varphi''(\|(x,y)\|)\,\frac{x^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|)\,\frac{\|(x,y)\| - \frac{x^2}{\|(x,y)\|}}{\|(x,y)\|^2} =$$

$$= \varphi''(\|(x,y)\|)\,\frac{x^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|)\,\frac{\|(x,y)\|^2 - x^2}{\|(x,y)\|^3} =$$

$$= \varphi''(\|(x,y)\|)\,\frac{x^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|)\,\frac{y^2}{\|(x,y)\|^3}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ \pi^{3/2}\sqrt{x} & \text{se } 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

e siano a_n, b_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, i coefficienti di Fourier di f. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a $\frac{9}{20}\pi^4$.

$\boxed{B}$ converge a $\frac{2}{5}\pi^4$.

$\boxed{C}$ converge a $\frac{9}{10}\pi^4$.

$\boxed{D}$ diverge.

$\boxed{E}$ converge a $\frac{1}{5}\pi^4$.

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{0} x^4\,dx + \int_0^{\pi} \pi^3 x\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-\pi}^{0} + \pi^3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \frac{7}{10}\pi^5,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x^2\,dx + \int_0^{\pi} \pi^{3/2}\sqrt{x}\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{0} + \pi^{3/2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx - 2a_0^2 = \frac{7}{10}\pi^4 - \frac{1}{2}\pi^4 = \frac{1}{5}\pi^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

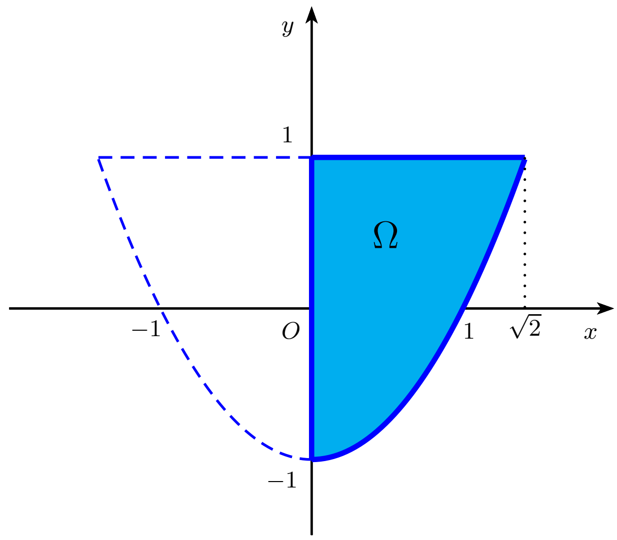
Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y) = \left(12xy\left(x^2-1\right) - \log\left(1+x^2\right),\ 6x^2y + e^{y^2-1}\right)$ e l'insieme $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 1 \le y \le 1,\ x \ge 0\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}\,(F) = \mathbb{R}^2$ e F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_\Omega \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right] dx\, dy = \int_\Omega 12x\left(y - x^2 + 1\right)\, dx\, dy.$$



L'insieme Ω è y-semplice. Infatti

$$x^2 - 1 \le y \le 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| \le \sqrt{2}$$

e quindi si ha che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le \sqrt{2}, \; x^2 - 1 \le y \le 1\right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi y-semplici, si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_\Omega 12x\left(y - x^2 + 1\right)\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2-1}^{1} 12x\left(y - x^2 + 1\right)\, dy\right) dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} 12x\left[\frac{1}{2}\left(y - x^2 + 1\right)^2\right]_{x^2-1}^{1} dx = 6\int_0^{\sqrt{2}} x\left(2 - x^2\right)^2\, dx = 6\left[-\frac{1}{6}\left(2 - x^2\right)^3\right]_0^{\sqrt{2}} = 8.$$

La risposta corretta è 8.

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 9 - x^2 - y^2, \; z \ge 0, \; x \ge 0\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(x + z + x^2\log\left(1 + z^2\right), \; y + z + z^2\log\left(1 + x^2\right), \; z - 9 + y\left(e^{xz} - 1\right)\right)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

SVOLGIMENTO

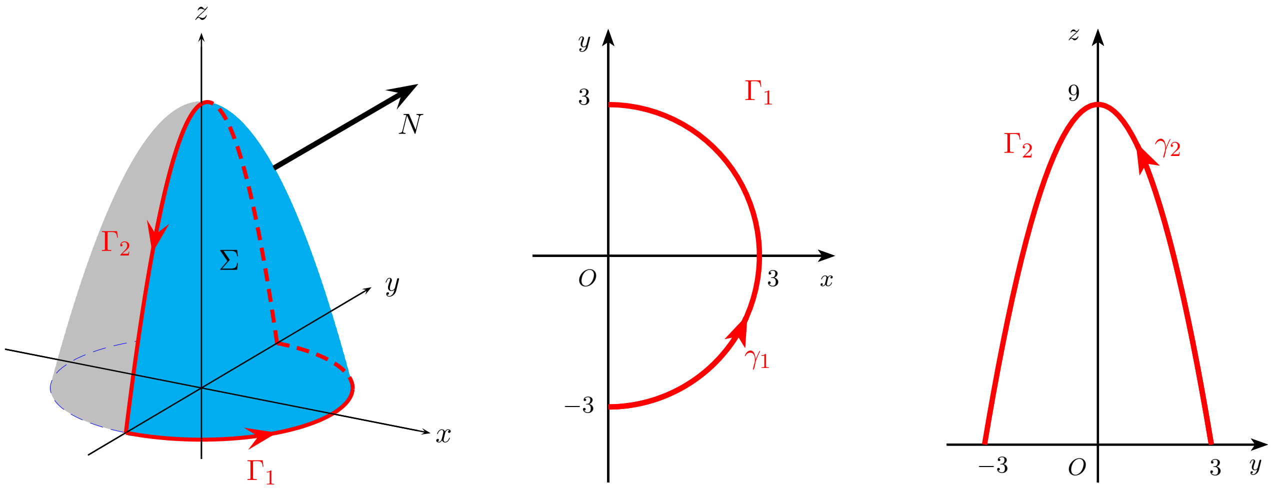
Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_\Sigma \text{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP,$$

dove il bordo di Σ è orientato in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Si ha che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 9, \; z = 0, \; x \ge 0\right\}, \qquad \Gamma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 9 - y^2, \; x = 0, \; z \ge 0\right\}.$$



Quindi

$$\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP,$$

dove Γ_1 e Γ_2 sono orientate come in figura.

Una curva parametrica γ_1 che parametrizza Γ_1 inducendo tale verso di percorrenza è ad esempio $\gamma_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma_1(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0).$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt.$$

Per ogni $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha che

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(3\cos t, 3\sin t, 0) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0) =$$

$$= (3\cos t,\ 3\sin t, -9) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0) =$$

$$= -9\cos t \sin t + 9\cos t \sin t = 0.$$

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = 0.$$

Una curva parametrica γ_2 che parametrizza Γ_2 inducendo tale verso di percorrenza è ad esempio $\gamma_2 : [-3, 3] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma_2(t) = (0, -t, 9 - t^2).$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-3}^{3} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, dt.$$

Per ogni $t \in [-3, 3]$ si ha che

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F(0, -t, 9 - t^2) \cdot (0, -1, -2t) =$$

$$= \left(9 - t^2,\ -t + 9 - t^2,\ -t^2\right) \cdot (0, -1, -2t) =$$

$$= t - 9 + t^2 + 2t^3.$$

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-3}^{3} \left(t - 9 + t^2 + 2t^3\right) \, dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - 9t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4\right]_{-3}^{3} = -36.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = -36.$$

La risposta corretta è -36.

Versione V2

Quiz 1. Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2 - \left(x^2+y^2\right)^2$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.

$\boxed{B}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, due punti di minimo locale e due punti di sella.

$\boxed{C}$ La funzione f ha un punto di minimo locale, due punti di massimo locale e due punti di sella.

$\boxed{D}$ La funzione f ha due punti di massimo locale, due punti di minimo locale e un punto di sella.

$\boxed{E}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\mathrm{dom}\,(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 4x\left(x^2+y^2\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - 4y\left(x^2+y^2\right).$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \iff \quad \begin{cases} 2x\left(1-2x^2-2y^2\right) = 0 \\ \\ 4y\left(1-x^2-y^2\right) = 0 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x=0, \quad x^2+y^2 = \frac{1}{2} \\ \\ y=0, \quad x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono: $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - 12x^2 - 4y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 - 4x^2 - 12y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -8xy.$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \qquad H_f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di minimo locale per f, $(0,\pm 1)$ sono due punti di massimo locale per f, mentre $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ sono due punti di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 2. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(\dfrac{14x}{x^2+y^2+3} + 4xy,\ \dfrac{14y}{x^2+y^2+3} + 2x^2 + 7\log 3\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : \left[0, \sqrt{e^2-4}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t\left(t^2-e^2+5\right),\ \dfrac{t^2}{e^2-4}\right)$ vale

$\boxed{A}$ $6 + 2e^2$.

$\boxed{B}$ $2e^2$.

$\boxed{C}$ 0.

$\boxed{D}$ e^2.

$\boxed{E}$ $3 + e^2$.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{28xy}{\left(x^2+y^2+3\right)^2} + 4x = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \dfrac{14x}{x^2+y^2+3} + 4xy, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \dfrac{14y}{x^2+y^2+3} + 2x^2 + 7\log 3. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(\frac{14x}{x^2+y^2+3} + 4xy \right) dx = 7\log\left(x^2+y^2+3\right) + 2x^2y + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{14y}{x^2+y^2+3} + 2x^2 + c'(y) = \frac{14y}{x^2+y^2+3} + 2x^2 + 7\log 3 \quad \Longrightarrow$$

$$c'(y) = 7\log 3 \quad \Longrightarrow \quad c(y) = 7y\log 3 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x,y) = 7\log\left(x^2+y^2+3\right) + 2x^2y + 7y\log 3 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f\left(\gamma\left(\sqrt{e^2-4}\right)\right) - f(\gamma(0)) = f\left(\sqrt{e^2-4}, 1\right) - f(0,0) = 6 + 2e^2.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e conservativo, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$\boxed{A}$ $f(\gamma(b)) + g(\gamma(b)) = f(\gamma(a)) + g(\gamma(a))$.

$\boxed{B}$ $f(\gamma(b)) + g(\gamma(a)) = f(\gamma(a)) + g(\gamma(b))$.

$\boxed{C}$ $f(\gamma(b)) + g(\gamma(a)) = f(\gamma(a)) - g(\gamma(b))$.

$\boxed{D}$ $f(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = f(\gamma(a)) + g(\gamma(b))$.

$\boxed{E}$ $f(\gamma(b)) - g(\gamma(b)) = g(\gamma(a)) - f(\gamma(a))$.

SVOLGIMENTO

Per la proprietà dell'integrale di linea di un campo vettoriale conservativo si ha che l'integrale di linea di F lungo γ è uguale a

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)),$$

da cui segue che

$$f(\gamma(b)) + g(\gamma(a)) = f(\gamma(a)) + g(\gamma(b)).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ -\pi^{3/2}\sqrt{x} & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e siano a_n, b_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, i coefficienti di Fourier di f. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a $\dfrac{2}{5}\pi^4$.

$\boxed{B}$ converge a $\dfrac{9}{20}\pi^4$.

$\boxed{C}$ converge a $\dfrac{1}{5}\pi^4$.

$\boxed{D}$ diverge.

$\boxed{E}$ converge a $\dfrac{9}{10}\pi^4$.

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{0} x^4\,dx + \int_0^{\pi} \pi^3 x\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-\pi}^{0} + \pi^3 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \frac{7}{10}\pi^5,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \left(-x^2\right)\,dx + \int_0^{\pi} \left(-\pi^{3/2}\sqrt{x}\right)\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{0} - \pi^{3/2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{\pi}\right) = -\frac{1}{2}\pi^2.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx - 2a_0^2 = \frac{7}{10}\pi^4 - \frac{1}{2}\pi^4 = \frac{1}{5}\pi^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 5. Siano $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = \varphi\left(\|(x,y)\|\right)$, dove $\|(x,y)\|$ è la norma di (x,y) in $\mathbb{R}^2$.

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la derivata $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ è uguale a

$\boxed{A}$ $\varphi''\left(\|(x,y)\|\right)$.

$\boxed{B}$ $\varphi''\left(\|(x,y)\|\right)\,\|(x,y)\|^2\,y^2$.

$\boxed{C}$ $\varphi''\left(\|(x,y)\|\right)\,\dfrac{y^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'\left(\|(x,y)\|\right)\,\dfrac{x^2}{\|(x,y)\|^3}$.

$\boxed{D}$ $\varphi''\left(\|(x,y)\|\right)\,\dfrac{y^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'\left(\|(x,y)\|\right)\,\dfrac{y^2}{\|(x,y)\|^3}$.

$\boxed{E}$ $\varphi''\left(\|(x,y)\|\right)\,\dfrac{y^2}{\|(x,y)\|^2}$.

SVOLGIMENTO

Poiché la funzione norma $\|\cdot\|$ è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, per composizione anche f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e quindi per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ esiste la derivata $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

Poiché $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, la derivata parziale di $\|\cdot\|$ rispetto a y in ogni $(x,y) \neq (0,0)$ è

$$\frac{\partial \|\cdot\|}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\|(x,y)\|}.$$

Essendo $f = \varphi \circ \|\cdot\|$, per la regola della catena si ha che per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi'(\|(x,y)\|)\frac{\partial\|\cdot\|}{\partial y}(x,y) = \varphi'(\|(x,y)\|)\,\frac{y}{\|(x,y)\|}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \varphi''(\|(x,y)\|)\,\frac{y^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|)\,\frac{\|(x,y)\| - \frac{y^2}{\|(x,y)\|}}{\|(x,y)\|^2} =$$

$$= \varphi''(\|(x,y)\|)\,\frac{y^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|)\,\frac{\|(x,y)\|^2 - y^2}{\|(x,y)\|^3} =$$

$$= \varphi''(\|(x,y)\|)\,\frac{y^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|)\,\frac{x^2}{\|(x,y)\|^3}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 6. Sia $p \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^p - \log^4 n}{n^5}$ converge se e solo se

$\boxed{A}$ $p > 4$.

$\boxed{B}$ $p < 4$.

$\boxed{C}$ $p > 5$.

$\boxed{D}$ $0 < p < 4$.

$\boxed{E}$ $p < 5$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che:

- $p \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad n^p \leq \log^4 n,\ \forall\, n \geq 3 \quad \Longrightarrow \quad$ la serie è a termini negativi;
- $p > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log^4 n = o(n^p),\ n \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad$ la serie è a termini positivi.

Se $p \leq 0$ consideriamo quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log^4 n - n^p}{n^5}$ che è a termini positivi. Poiché $\log^3 n = o(n^q)$ per $n \to +\infty$ per ogni $q > 0$, si ha che

$$\frac{\log^4 n - n^p}{n^5} \sim \frac{\log^4 n}{n^5} = o\left(\frac{1}{n^{5-q}}\right),\ n \to +\infty, \text{ per ogni } q > 0.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{5-q}}$ converge se $5 - q > 1$, cioè $0 < q < 4$, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log^4 n - n^p}{n^5}$ converge per ogni $p \leq 0$ e di conseguenza la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^p - \log^4 n}{n^6}$ converge per ogni $p \leq 0$.

Se $p > 0$, poiché $\log^4 n = o(n^p)$ per $n \to +\infty$ si ha che

$$\frac{n^p - \log^4 n}{n^5} \sim \frac{n^p}{n^5} = \frac{1}{n^{5-p}},\ n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{5-p}}$ converge se $5 - p > 1$, cioè $0 < p < 4$, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p - \log^4 n}{n^5}$ converge per ogni $0 < p < 4$.

In conclusione la serie data converge se e solo se $p < 4$. La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

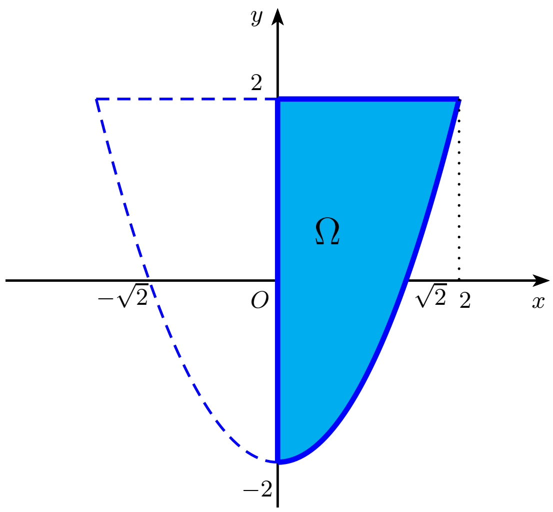
Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y) = \left(3xy\left(x^2-2\right) - \log\left(4+x^2\right),\ \frac{3}{2}x^2y - e^{y^2+1}\right)$ e l'insieme $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ x^2-2 \le y \le 2,\ x \ge 0\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^2$ e F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right] dx\, dy = \int_{\Omega} 3x\left(y - x^2 + 2\right)\, dx\, dy =$$



L'insieme Ω è y-semplice. Infatti

$$x^2 - 2 \le y \le 2 \quad \Longrightarrow \quad |x| \le 2$$

e quindi si ha che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 0 \le x \le 2,\ \ x^2-2 \le y \le 2\right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi y-semplici, si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} 3x\left(y - x^2 + 2\right)\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2-2}^{2} 3x\left(y - x^2 + 2\right)\, dy\right) dx =$$

$$= \int_0^2 3x\left[\frac{1}{2}\left(y - x^2 + 2\right)^2\right]_{x^2-2}^{2} dx = \frac{3}{2}\int_0^2 x\left(4 - x^2\right)^2\, dx = \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{6}\left(4-x^2\right)^3\right]_0^2 = 16.$$

La risposta corretta è 16.

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ z = 4 - x^2 - y^2,\ \ z \ge 0,\ \ y \ge 0\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(3x + 3z + z^2\log\left(1+y^2\right),\ 3y + z + y^2\log\left(1+z^2\right),\ z - 4 + x\left(e^{yz}-1\right)\right)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

SVOLGIMENTO

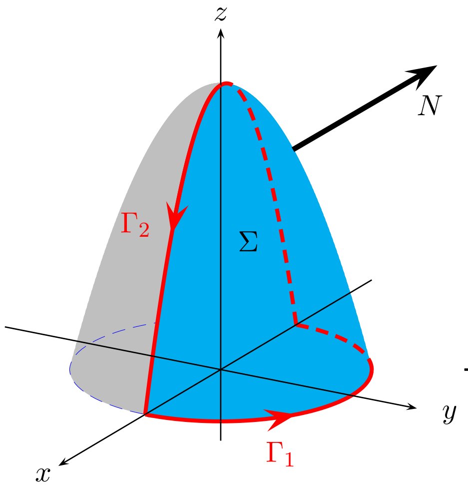
Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

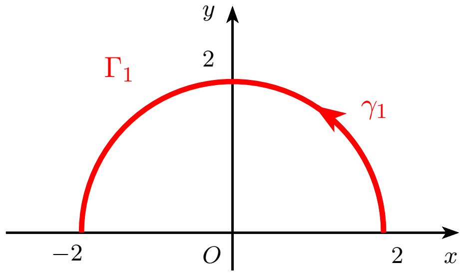
$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP,$$

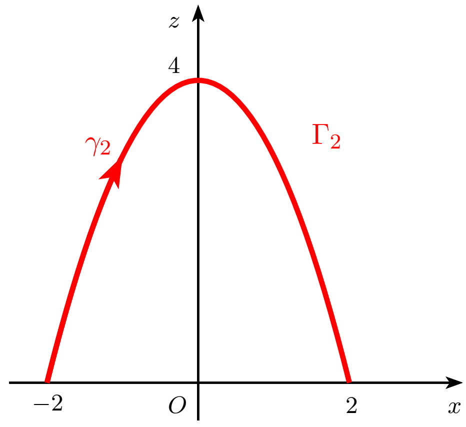
dove il bordo di Σ è orientato in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Si ha che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ x^2+y^2 = 4,\ \ z = 0,\ \ y \ge 0\right\}, \qquad \Gamma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ z = 4 - x^2,\ \ y = 0,\ \ z \ge 0\right\}.$$







Quindi

$$\int_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP,$$

dove Γ_1 e Γ_2 sono orientate come in figura.

Una curva parametrica γ_1 che parametrizza Γ_1 inducendo tale verso di percorrenza è ad esempio $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma_1(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0).$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt.$$

Per ogni $t \in [0, \pi]$ si ha che

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(2\cos t, 2\sin t, 0) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 0) =$$

$$= (6\cos t,\ 6\sin t, -4) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 0) =$$

$$= -12\cos t \sin t + 12\cos t \sin t = 0.$$

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = 0.$$

Una curva parametrica γ_2 che parametrizza Γ_2 inducendo tale verso di percorrenza è ad esempio $\gamma_2 : [-2, 2] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma_2(t) = (t, 0, 4 - t^2).$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-2}^2 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, dt.$$

Per ogni $t \in [-2, 2]$ si ha che

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F(t, 0, 4 - t^2) \cdot (1, 0, -2t) =$$

$$= \left(3t + 12 - 3t^2,\ 4 - t^2,\ -t^2\right) \cdot (1, 0, -2t) =$$

$$= 3t + 12 - 3t^2 + 2t^3.$$

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-2}^2 \left(3t + 12 - 3t^2 + 2t^3\right) \, dt = \left[\frac{3}{2}t^2 + 12t - t^3 + \frac{1}{2}t^4\right]_{-2}^2 = 32.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = 32.$$

La risposta corretta è 32.

Versione V3

Quiz 1. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo e $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se Ω è connesso per archi, allora $f - g$ è costante.

$\boxed{B}$ Se Ω non è semplicemente connesso, allora $f - g$ non è costante.

$\boxed{C}$ $f - g$ è un potenziale di F su Ω.

$\boxed{D}$ $f - g$ è costante.

$\boxed{E}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

SVOLGIMENTO

Per la proprietà dei potenziali di un campo vettoriale conservativo, se Ω è connesso per archi, allora $f - g$ è costante. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ 2\pi^{3/2}\sqrt{x} & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e siano a_n, b_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, i coefficienti di Fourier di f. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a $\frac{8}{5}\pi^4$.

$\boxed{B}$ converge a $\frac{9}{2}\pi^4$.

$\boxed{C}$ diverge.

$\boxed{D}$ converge a $\frac{9}{5}\pi^4$.

$\boxed{E}$ converge a $\frac{4}{5}\pi^4$.

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\pi}^{0} 4x^4\, dx + \int_{0}^{\pi} 4\pi^3 x\, dx = \left[\frac{4}{5}x^5\right]_{-\pi}^{0} + \pi^3 \left[2x^2\right]_0^{\pi} = \frac{14}{5}\pi^5,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} 2x^2\, dx + \int_{0}^{\pi} 2\pi^{3/2}\sqrt{x}\, dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-\pi}^{0} + \pi^{3/2} \left[\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_0^{\pi} \right) = \pi^2.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx - 2a_0^2 = \frac{14}{5}\pi^4 - 2\pi^4 = \frac{4}{5}\pi^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 3. Si consideri la funzione $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^2 - 2x^2 - y^2 + 3$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.

$\boxed{B}$ La funzione f ha due punti di massimo locale, due punti di minimo locale e un punto di sella.

$\boxed{C}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, due punti di minimo locale e due punti di sella.

$\boxed{D}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{E}$ La funzione f ha un punto di minimo locale, due punti di massimo locale e due punti di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x\left(x^2+y^2\right) - 4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y\left(x^2+y^2\right) - 2y.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 4x\left(x^2+y^2-1\right) = 0 \\ \\ 4y\left(2x^2+2y^2-1\right) = 0 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x = 0, \quad x^2+y^2 = 1 \\ \\ y = 0, \quad x^2+y^2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono: $(0,0)$, $\left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(\pm 1, 0)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 4y^2 - 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4x^2 + 12y^2 - 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8xy.$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad H_f\left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di massimo locale per f, $\left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sono due punti di minimo locale per f, mentre $(\pm 1, 0)$ sono due punti di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 4. Sia $p \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log^5 n - n^p}{n^3}$ converge se e solo se

$\boxed{A}$ $p < 3$.

$\boxed{B}$ $p > 3$.

$\boxed{C}$ $p < 2$.

$\boxed{D}$ $0 < p < 2$.

$\boxed{E}$ $p > 2$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che:

- $p \leq 0 \quad\Longrightarrow\quad \log^5 n \geq n^p, \ \forall n \geq 3 \quad\Longrightarrow\quad$ la serie è a termini positivi;
- $p > 0 \quad\Longrightarrow\quad \log^5 n = o(n^p), \ n \to +\infty \quad\Longrightarrow\quad$ la serie è a termini negativi.

Se $p > 0$ consideriamo quindi la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^p - \log^5 n}{n^3}$ che è a termini positivi. Poiché $\log^5 n = o(n^p)$ per $n \to +\infty$ si ha che

$$\frac{n^p - \log^5 n}{n^3} \sim \frac{1}{n^{3-p}}, \ n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}}$ converge se $3-p > 1$, cioè $0 < p < 2$, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^p - \log^5 n}{n^3}$ converge per ogni $0 < p < 2$ e di conseguenza la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log^5 n - n^p}{n^3}$ converge per ogni $0 < p < 2$.

Se $p \leq 0$, poiché $\log^5 n = o(n^q)$ per $n \to +\infty$ per ogni $q > 0$, si ha che

$$\frac{\log^5 n - n^p}{n^3} \sim \frac{\log^5 n}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^{3-q}}\right), \ n \to +\infty, \text{per ogni } q > 0.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{3-q}}$ converge se $3-q > 1$, cioè $0 < q < 2$, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log^5 n - n^p}{n^3}$ converge per ogni $p \leq 0$.

In conclusione la serie data converge se e solo se $p < 2$. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(\frac{10x}{x^2+y^2+2} - 2y^2 + 5\log 2, \ \frac{10y}{x^2+y^2+2} - 4xy\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : \left[0, \sqrt{e^2-3}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{e^2-3}, \ t\left(t^2 - e^2 + 4\right)\right)$ vale

$\boxed{A}$ $16 - 2e^2$.

$\boxed{B}$ $-e^2$.

$\boxed{C}$ 0.

$\boxed{D}$ $-2e^2$.

$\boxed{E}$ $8 - e^2$.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{20xy}{(x^2+y^2+2)^2} - 4y = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \frac{10x}{x^2+y^2+2} - 2y^2 + 5\log 2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \frac{10y}{x^2+y^2+2} - 4xy. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(\frac{10x}{x^2+y^2+2} - 2y^2 + 5\log 2\right) dx = 5\log\left(x^2+y^2+2\right) - 2xy^2 + 5x\log 2 + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{10y}{x^2+y^2+2} - 4xy + c'(y) = \frac{10y}{x^2+y^2+2} - 4xy \quad \Longrightarrow \quad c'(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c(y) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x,y) = 5\log\left(x^2+y^2+2\right) - 2xy^2 + 5x\log 2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f\left(\gamma\left(\sqrt{e^2-3}\right)\right) - f(\gamma(0)) = f\left(1, \sqrt{e^2-3}\right) - f(0,0) = 16 - 2e^2.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 6. Siano $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = \varphi\left(\|(x,y)\|\right)$, dove $\|(x,y)\|$ è la norma di (x,y) in $\mathbb{R}^2$.

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la derivata $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ è uguale a

$\boxed{A}$ $\varphi''\left(\|(x,y)\|\right) \dfrac{x^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'\left(\|(x,y)\|\right) \dfrac{y^2}{\|(x,y)\|^3}$.

$\boxed{B}$ $\varphi''\left(\|(x,y)\|\right)$.

$\boxed{C}$ $\varphi''\left(\|(x,y)\|\right) \dfrac{x^2}{\|(x,y)\|^2}$.

$\boxed{D}$ $\varphi''\left(\|(x,y)\|\right) \dfrac{x^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'\left(\|(x,y)\|\right) \dfrac{x^2}{\|(x,y)\|^3}$.

$\boxed{E}$ $\varphi''\left(\|(x,y)\|\right) \|(x,y)\|^2 x^2$.

SVOLGIMENTO

Poiché la funzione norma $\|\cdot\|$ è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, per composizione anche f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e quindi per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ esiste la derivata $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$.

Poiché $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, la derivata parziale di $\|\cdot\|$ rispetto a x in ogni $(x,y) \neq (0,0)$ è

$$\frac{\partial \|\cdot\|}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\|(x,y)\|}.$$

Essendo $f = \varphi \circ \|\cdot\|$, per la regola della catena si ha che per ogni $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi'(\|(x,y)\|)\frac{\partial \|\cdot\|}{\partial x}(x,y) = \varphi'(\|(x,y)\|) \frac{x}{\|(x,y)\|}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \varphi''(\|(x,y)\|) \frac{x^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|) \frac{\|(x,y)\| - \frac{x^2}{\|(x,y)\|}}{\|(x,y)\|^2} =$$

$$= \varphi''(\|(x,y)\|) \frac{x^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|) \frac{\|(x,y)\|^2 - x^2}{\|(x,y)\|^3} =$$

$$= \varphi''(\|(x,y)\|) \frac{x^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|) \frac{y^2}{\|(x,y)\|^3}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y) = \left(\log\left(1+x^2\right) - 12xy\left(x^2-1\right),\ e^{y^2-1} + 6x^2y\right)$ e l'insieme $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \le y \le 1 - x^2,\ x \ge 0\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

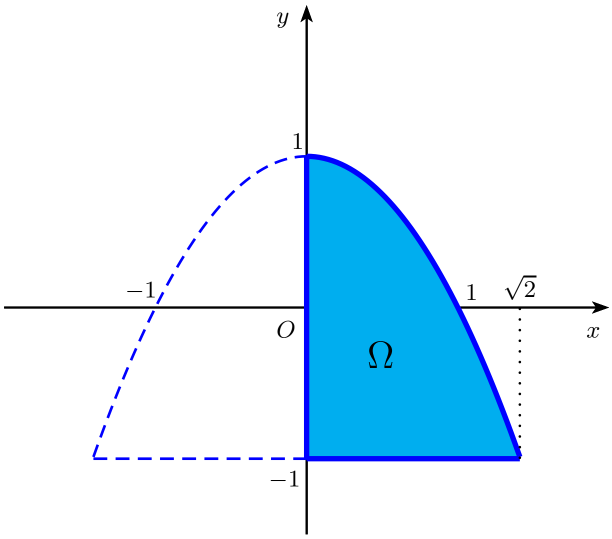
SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è y-semplice. Infatti

$$-1 \leq y \leq 1 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad |x| \leq \sqrt{2}$$

e quindi si ha che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \ -1 \leq y \leq 1 - x^2\right\}.$$



Si ha che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^2$ e F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right] dx\,dy = \int_{\Omega} 12x\left(y + x^2 - 1\right)\,dx\,dy =$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi y-semplici, si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} 12x\left(y + x^2 - 1\right)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-1}^{1-x^2} 12x\left(y + x^2 - 1\right)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} 12x\left[\frac{1}{2}\left(y + x^2 - 1\right)^2\right]_{-1}^{1-x^2} dx = -6\int_0^{\sqrt{2}} x\left(x^2 - 2\right)^2\,dx = -6\left[\frac{1}{6}\left(x^2 - 2\right)^3\right]_0^{\sqrt{2}} = -8.$$

La risposta corretta è -8.

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 9 - x^2 - y^2, \ z \geq 0, \ x \leq 0\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(x + z + x^2\log\left(1 + z^2\right), \ y + z + z^2\log\left(1 + x^2\right), \ z - 9 + y\left(e^{xz} - 1\right)\right)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

SVOLGIMENTO

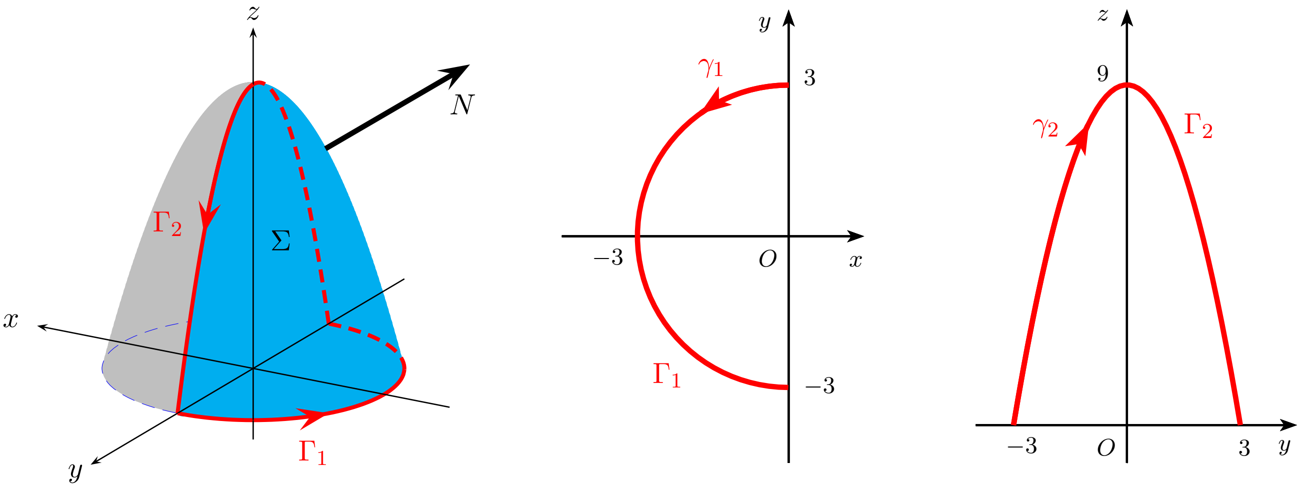
Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP,$$

dove il bordo di Σ è orientato in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Si ha che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 9, \ z = 0, \ x \leq 0\right\}, \qquad \Gamma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 9 - y^2, \ x = 0, \ z \geq 0\right\}.$$



Quindi

$$\int_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP,$$

dove Γ_1 e Γ_2 sono orientate come in figura.

Una curva parametrica γ_1 che parametrizza Γ_1 inducendo tale verso di percorrenza è ad esempio $\gamma_1 : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma_1(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0).$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt.$$

Per ogni $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ si ha che

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(3\cos t, 3\sin t, 0) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0) =$$

$$= (3\cos t,\ 3\sin t, -9) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0) =$$

$$= -9\cos t \sin t + 9\cos t \sin t = 0.$$

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = 0.$$

Una curva parametrica γ_2 che parametrizza Γ_2 inducendo tale verso di percorrenza è ad esempio $\gamma_2 : [-3, 3] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma_2(t) = (0, t, 9 - t^2).$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-3}^{3} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, dt.$$

Per ogni $t \in [-3, 3]$ si ha che

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F(0, t, 9 - t^2) \cdot (0, 1, -2t) =$$

$$= \left(9 - t^2,\ t + 9 - t^2,\ -t^2\right) \cdot (0, 1, -2t) =$$

$$= t + 9 - t^2 + 2t^3.$$

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-3}^{3} \left(t + 9 - t^2 + 2t^3\right) \, dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + 9t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4\right]_{-3}^{3} = 36.$$

In conclusione si ha che

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = 36.$$

La risposta corretta è 36.

Versione V4

Quiz 1. Sia $p \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log^6 n - n^p}{n^4}$ converge se e solo se

$\boxed{A}$ $p > 4$.

$\boxed{B}$ $0 < p < 3$.

$\boxed{C}$ $p > 3$.

$\boxed{D}$ $p < 3$.

$\boxed{E}$ $p < 4$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che:

- $p \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad n^p \leq \log^6 n, \ \forall\, n \geq 3 \quad \Longrightarrow \quad$ la serie è a termini positivi;
- $p > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log^6 n = o(n^p), \ n \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad$ la serie è a termini negativi.

Se $p > 0$ consideriamo quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^p - \log^6 n}{n^4}$ che è a termini positivi. Poiché $\log^6 n = o(n^p)$ per $n \to +\infty$ si ha che

$$\frac{n^p - \log^6 n}{n^4} \sim \frac{1}{n^{4-p}}, \ n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{4-p}}$ converge se $4 - p > 1$, cioè $0 < p < 3$, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^p - \log^6 n}{n^6}$ converge per ogni $0 < p < 3$ e di conseguenza la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log^6 n - n^p}{n^4}$ converge per ogni $0 < p < 3$.

Se $p \leq 0$, poiché $\log^6 n = o(n^q)$ per $n \to +\infty$ per ogni $q > 0$, si ha che

$$\frac{\log^6 n - n^p}{n^4} \sim \frac{\log^6 n}{n^4} = o\left(\frac{1}{n^{4-q}}\right), \ n \to +\infty, \text{per ogni } q > 0.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{4-q}}$ converge se $4 - q > 1$, cioè $0 < q < 3$, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log^6 n - n^p}{n^4}$ converge per ogni $p \leq 0$.

In conclusione la serie data converge se e solo se $p < 3$. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 2. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e conservativo, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$\boxed{A}$ $f(\gamma(b)) + g(\gamma(a)) = f(\gamma(a)) + g(\gamma(b))$.

$\boxed{B}$ $f(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = f(\gamma(a)) + g(\gamma(b))$.

$\boxed{C}$ $f(\gamma(b)) + g(\gamma(b)) = f(\gamma(a)) + g(\gamma(a))$.

$\boxed{D}$ $f(\gamma(b)) - g(\gamma(b)) = g(\gamma(a)) - f(\gamma(a))$.

$\boxed{E}$ $f(\gamma(b)) + g(\gamma(a)) = f(\gamma(a)) - g(\gamma(b))$.

SVOLGIMENTO

Per la proprietà dell'integrale di linea di un campo vettoriale conservativo si ha che l'integrale di linea di F lungo γ è uguale a

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)),$$

da cui segue che

$$f(\gamma(b)) + g(\gamma(a)) = f(\gamma(a)) + g(\gamma(b)).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(\frac{18x}{x^2 + y^2 + 3} + 8xy, \frac{18y}{x^2 + y^2 + 3} + 4x^2 + 9 \log 3 \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : \left[0, \sqrt{e^2 - 4}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t\left(t^2 - e^2 + 5\right), \frac{t^2}{e^2 - 4} \right)$ vale

$\boxed{A}$ $2 + 4e^2$.

$\boxed{B}$ $2e^2$.

$\boxed{C}$ $1 + 2e^2$.

$\boxed{D}$ 0.

$\boxed{E}$ $4e^2$.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{36xy}{(x^2 + y^2 + 3)^2} + 8x = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = \frac{18x}{x^2 + y^2 + 3} + 8xy, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = \frac{18y}{x^2 + y^2 + 3} + 4x^2 + 9 \log 3. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x, y) = \int \left(\frac{18x}{x^2 + y^2 + 3} + 8xy \right) dx = 9 \log \left(x^2 + y^2 + 3\right) + 4x^2 y + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{18y}{x^2 + y^2 + 3} + 4x^2 + c'(y) = \frac{18y}{x^2 + y^2 + 3} + 4x^2 + 9 \log 3 \quad \Longrightarrow$$

$$c'(y) = 9 \log 3 \quad \Longrightarrow \quad c(y) = 9y \log 3 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 9 \log \left(x^2 + y^2 + 3\right) + 4x^2 y + 9y \log 3 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f\left(\gamma\left(\sqrt{e^2 - 4}\right)\right) - f(\gamma(0)) = f\left(\sqrt{e^2 - 4}, 1\right) - f(0, 0) = 2 + 4e^2.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 4. Siano $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = \varphi(\|(x, y)\|)$, dove $\|(x, y)\|$ è la norma di (x, y) in $\mathbb{R}^2$. Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la derivata $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ è uguale a

$\boxed{A}$ $\varphi''(\|(x,y)\|)\ \|(x,y)\|^2\, y^2$.

$\boxed{B}$ $\varphi''(\|(x,y)\|)\ \dfrac{y^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|)\ \dfrac{x^2}{\|(x,y)\|^3}$.

$\boxed{C}$ $\varphi''(\|(x,y)\|)$.

$\boxed{D}$ $\varphi''(\|(x,y)\|)\ \dfrac{y^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|)\ \dfrac{y^2}{\|(x,y)\|^3}$.

$\boxed{E}$ $\varphi''(\|(x,y)\|)\ \dfrac{y^2}{\|(x,y)\|^2}$.

SVOLGIMENTO

Poiché la funzione norma $\|\cdot\|$ è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, per composizione anche f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e quindi per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ esiste la derivata $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

Poiché $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, la derivata parziale di $\|\cdot\|$ rispetto a y in ogni $(x,y) \neq (0,0)$ è

$$\frac{\partial\|\cdot\|}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\|(x,y)\|}.$$

Essendo $f = \varphi \circ \|\cdot\|$, per la regola della catena si ha che per ogni $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi'(\|(x,y)\|)\frac{\partial\|\cdot\|}{\partial y}(x,y) = \varphi'(\|(x,y)\|)\ \frac{y}{\|(x,y)\|}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \varphi''(\|(x,y)\|)\ \frac{y^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|)\ \frac{\|(x,y)\| - \frac{y^2}{\|(x,y)\|}}{\|(x,y)\|^2} = \\ &= \varphi''(\|(x,y)\|)\ \frac{y^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|)\ \frac{\|(x,y)\|^2 - y^2}{\|(x,y)\|^3} = \\ &= \varphi''(\|(x,y)\|)\ \frac{y^2}{\|(x,y)\|^2} + \varphi'(\|(x,y)\|)\ \frac{x^2}{\|(x,y)\|^3}.\end{aligned}$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ -2\pi^{3/2}\sqrt{x} & \text{se } 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

e siano a_n, b_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, i coefficienti di Fourier di f. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a $\dfrac{8}{5}\pi^4$.

$\boxed{B}$ diverge.

$\boxed{C}$ converge a $\dfrac{4}{5}\pi^4$.

$\boxed{D}$ converge a $\dfrac{9}{2}\pi^4$.

$\boxed{E}$ converge a $\dfrac{9}{5}\pi^4$.

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx-2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\pi}^{0}4x^4\,dx+\int_{0}^{\pi}4\pi^3x\,dx=\left[\frac{4}{5}x^5\right]_{-\pi}^{0}+4\pi^3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\pi}=\frac{14}{5}\pi^5,$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(-2x^2\right)\,dx+\int_{0}^{\pi}\left(-2\pi^{3/2}\sqrt{x}\right)\,dx\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{2}{3}x^3\right]_{-\pi}^{0}-2\pi^{3/2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{0}^{\pi}\right)=-\pi^2.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx-2a_0^2=\frac{14}{5}\pi^4-2\pi^4=\frac{4}{5}\pi^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 6. Si consideri la funzione $f(x,y)=2x^2+y^2+4-\left(x^2+y^2\right)^2$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, due punti di minimo locale e due punti di sella.

$\boxed{B}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.

$\boxed{C}$ La funzione f ha due punti di massimo locale, due punti di minimo locale e un punto di sella.

$\boxed{D}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{E}$ La funzione f ha un punto di minimo locale, due punti di massimo locale e due punti di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(f)=\mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\mathrm{dom}\,(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x-4x\left(x^2+y^2\right),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-4y\left(x^2+y^2\right).$$

Quindi

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}4x\left(1-x^2-y^2\right)=0\\[2ex]2y\left(1-2x^2-2y^2\right)=0\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x=0,\quad x^2+y^2=1\\[2ex]y=0,\quad x^2+y^2=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono: $(0,0)$, $(\pm 1,0)$, $\left(0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 5 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=4-12x^2-4y^2,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2-4x^2-12y^2,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-8xy.$$

Quindi

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix},\qquad H_f(\pm 1,0)=\begin{pmatrix}-8&0\\0&-2\end{pmatrix},\qquad H_f\left(0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-4\end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di minimo locale per f, $(\pm 1,0)$ sono due punti di massimo locale per f, mentre $\left(0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sono due punti di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

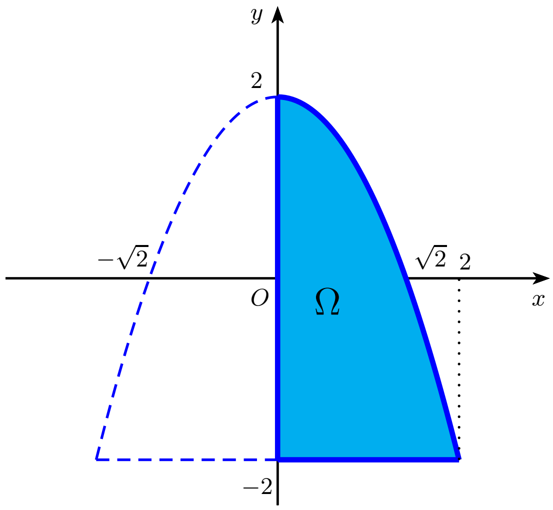
Domanda 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y)=\left(\log\left(4+x^2\right)-3xy\left(x^2-2\right),\ e^{y^2+1}+\frac{3}{2}x^2y\right)$ e l'insieme $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -2\le y\le 2-x^2,\ x\ge 0\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Ω percorso in verso antiorario?

SVOLGIMENTO

Si ha che $\operatorname{dom}(F) = \mathbb{R}^2$ e F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_\Omega \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right] dx\, dy = \int_\Omega 3x\left(y + x^2 - 2\right)\, dx\, dy =$$



L'insieme Ω è y-semplice. Infatti

$$-2 \le y \le 2 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad |x| \le 2$$

e quindi si ha che

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 2, \ -2 \le y \le 2 - x^2 \right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi y-semplici, si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_\Omega 3x\left(y + x^2 - 2\right)\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_{-2}^{2-x^2} 3x\left(y + x^2 - 2\right)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 3x \left[\frac{1}{2}\left(y + x^2 - 2\right)^2 \right]_{-2}^{2-x^2} dx = -\frac{3}{2}\int_0^2 x\left(x^2 - 4\right)^2 dx = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\left(x^2 - 4\right)^3 \right]_0^2 = -16.$$

La risposta corretta è -16.

Domanda 8. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 4 - x^2 - y^2, \ z \ge 0, \ y \le 0 \right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(3x + 3z + z^2 \log\left(1 + y^2\right), \ 3y + z + y^2 \log\left(1 + z^2\right), \ z - 4 + x\left(e^{yz} - 1\right) \right)$.

Quanto vale il flusso del rotore di F attraverso Σ orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

SVOLGIMENTO

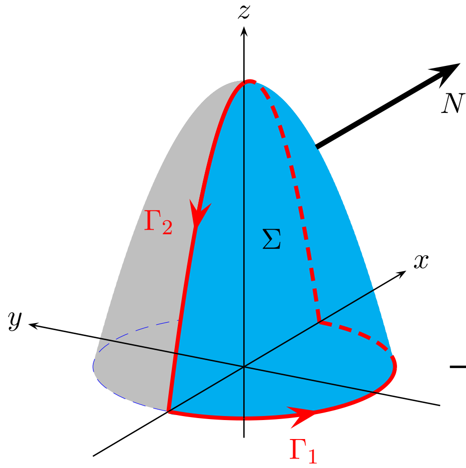
Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

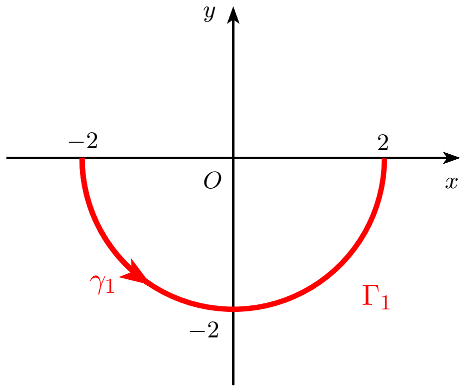
$$\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP,$$

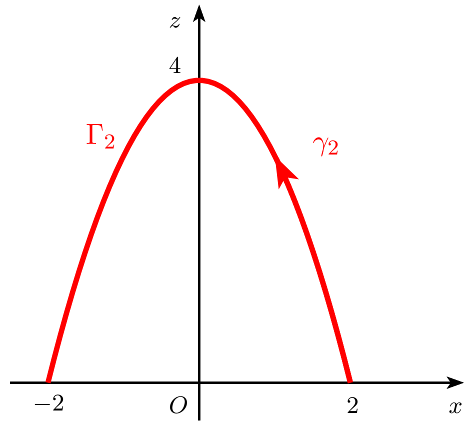
dove il bordo di Σ è orientato in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Si ha che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 4, \ z = 0, \ y \le 0 \right\}, \qquad \Gamma_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 4 - x^2, \ y = 0, \ z \ge 0 \right\}.$$







Quindi

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP,$$

dove Γ_1 e Γ_2 sono orientate come in figura.

Una curva parametrica γ_1 che parametrizza Γ_1 inducendo tale verso di percorrenza è ad esempio $\gamma_1 : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma_1(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0).$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\pi}^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt.$$

Per ogni $t \in [\pi, 2\pi]$ si ha che

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(2\cos t, 2\sin t, 0) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 0) =$$
$$= (6\cos t,\ 6\sin t, -4) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 0) =$$
$$= -12\cos t \sin t + 12\cos t \sin t = 0.$$

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = 0.$$

Una curva parametrica γ_2 che parametrizza Γ_2 inducendo tale verso di percorrenza è ad esempio $\gamma_2 : [-2, 2] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma_2(t) = (-t, 0, 4 - t^2).$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-2}^{2} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, dt.$$

Per ogni $t \in [-2, 2]$ si ha che

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F(-t, 0, 4 - t^2) \cdot (-1, 0, -2t) =$$
$$= \left(-3t + 12 - 3t^2,\ 4 - t^2,\ -t^2\right) \cdot (-1, 0, -2t) =$$
$$= 3t - 12 + 3t^2 + 2t^3.$$

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-2}^{2} \left(3t - 12 + 3t^2 + 2t^3\right) \, dt = \left[\frac{3}{2}t^2 - 12t + t^3 + \frac{1}{2}t^4\right]_{-2}^{2} = -32.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = -32.$$

La risposta corretta è -32.