

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V1	B	A	A	E	B	A	5	1/3

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(5x^2y + \sin z, \cos x - 5xy^2, \log(x^2 + y^2 + z^2) + e^{x^2+y^2} \right)$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \leq 0\}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e che F è di classe C^1 su $\text{dom}(F)$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

In questo caso $\text{div} F(x, y, z) = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$. Pertanto

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate polari centrate in $(0, 0, 0)$ con la colatitudine misurata dall'asse z , ovvero consideriamo

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, \varphi)| = \rho^2 \sin \vartheta.$$

Si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega'} \rho \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ è tale che $\Phi(\Omega') = \Omega$. Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \\ z \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9 \leq \rho^2 \leq 16 \\ \rho \cos \vartheta \leq 0 \\ \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \leq \rho \leq 4 \\ \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = [3, 4] \times [\frac{\pi}{2}, \pi] \times [0, 2\pi]$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 2 \int_{\Omega'} \rho \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi = 4\pi \left(\int_3^4 \rho \, d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_3^4 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -7\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V2	D	E	E	C	C	B	6	1/7

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(3x^2y + \cos z, \sin x - 3xy^2, \log(x^2 + y^2 + z^2) + e^{x^2 - y^2} \right)$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e che F è di classe C^1 su $\text{dom}(F)$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

In questo caso $\text{div} F(x, y, z) = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$. Pertanto

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate polari centrate in $(0, 0, 0)$ con la colatitudine misurata dall'asse z , ovvero consideriamo

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, \varphi)| = \rho^2 \sin \vartheta.$$

Si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega'} \rho \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ è tale che $\Phi(\Omega') = \Omega$. Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ z \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq \rho^2 \leq 2 \\ \rho \cos \vartheta \geq 0 \\ \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 2 \int_{\Omega'} \rho \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi = 4\pi \left(\int_1^2 \rho \, d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_1^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V3	B	B	C	B	E	D	4	1/3

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\cos z - 6x^2y, \quad 6xy^2 - \sin x, \quad e^{x^2+y^2} - 2 \log(x^2 + y^2 + z^2) \right)$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, \quad z \leq 0\}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e che F è di classe C^1 su $\text{dom}(F)$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

In questo caso $\text{div} F(x, y, z) = -\frac{4z}{x^2 + y^2 + z^2}$. Pertanto

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = -4 \int_{\Omega} \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate polari centrate in $(0, 0, 0)$ con la colatitudine misurata dall'asse z , ovvero consideriamo

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, \varphi)| = \rho^2 \sin \vartheta.$$

Si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = -4 \int_{\Omega} \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz = -4 \int_{\Omega'} \rho \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ è tale che $\Phi(\Omega') = \Omega$. Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \\ z \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 16 \leq \rho^2 \leq 25 \\ \rho \cos \vartheta \leq 0 \\ \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 4 \leq \rho \leq 5 \\ \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = [4, 5] \times [\frac{\pi}{2}, \pi] \times [0, 2\pi]$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= -4 \int_{\Omega'} \rho \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi = -8\pi \left(\int_4^5 \rho \, d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = \\ &= -8\pi \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_4^5 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 18\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V4	B	B	E	C	C	A	8	1/7

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\sin z - 4x^2y, \quad 4xy^2 - \cos x, \quad e^{x^2-y^2} - 2 \log(x^2 + y^2 + z^2) \right)$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad z \geq 0\}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e che F è di classe C^1 su $\text{dom}(F)$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

In questo caso $\text{div} F(x, y, z) = -\frac{4z}{x^2 + y^2 + z^2}$. Pertanto

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = -4 \int_{\Omega} \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate polari centrate in $(0, 0, 0)$ con la colatitudine misurata dall'asse z , ovvero consideriamo

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, \varphi)| = \rho^2 \sin \vartheta.$$

Si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = -4 \int_{\Omega} \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz = -4 \int_{\Omega'} \rho \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ è tale che $\Phi(\Omega') = \Omega$. Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ z \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \leq \rho^2 \leq 3 \\ \rho \cos \vartheta \geq 0 \\ \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = [2, 3] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= -4 \int_{\Omega'} \rho \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi = -8\pi \left(\int_2^3 \rho \, d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = \\ &= -8\pi \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_2^3 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -10\pi. \end{aligned}$$