Svolgimento di quiz e domande dell'esame di Analisi Matematica II del 09/09/2024 ore 17

Versione: V1

Quiz 1. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto stazionario per f tale che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = a \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = b > 0.$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $a < -b$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{B}$ Se $a > b$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{C}$ Se $-b < a < b$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{D}$ Se $a > -b$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

$\boxed{E}$ Se $a > b$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

SVOLGIMENTO

La matrice Hessiana di f nel punto stazionario (x_0, y_0) è

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

e quindi i suoi autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\det(H_f(x_0, y_0) - \lambda I) = 0$, dove I è la matrice identica 2×2, ovvero

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda - a)^2 - b^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0.$$

Poiché la matrice Hessiana è simmetrica, allora ammette sempre due autovalori reali e di conseguenza l'equazione caratteristica ammette sempre due soluzioni reali. Per la regola di Cartesio, essendo $b > 0$ per ipotesi, si ha che:

- $a > b$ implica che gli autovalori sono maggiori di zero;
- $a < -b$ implica che gli autovalori sono minori di zero;
- $-b < a < b$ implica che gli autovalori sono discordi.

Quindi si ha che

- $a > b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f;
- $a < -b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f;
- $-b < a < b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

In alternativa si può procedere anche calcolando gli autovalori, che sono $\lambda_{1,2} = a \pm b$, e poi dedurne il segno in base alle relazioni fra a e b.

Quiz 2. Siano $R > 0$ e $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 + \left(x^2 + y^2\right)^3, \ x^2 + y^2 \leq R^2, \ y \geq 0\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{8(z-1)}{\sqrt{36\left(x^2+y^2\right)^5 + 1}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ πR^8.

$\boxed{B}$ $\frac{8}{7}\pi R^4$.

$\boxed{C}$ $\frac{8}{7}\pi R^7$.

$\boxed{D}$ πR^4.

$\boxed{E}$ R^8.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 1 + \left(x^2+y^2\right)^3$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq R^2, \; y \geq 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x, y, 1 + \left(x^2+y^2\right)^3\right)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{8(z-1)}{\sqrt{36\left(x^2+y^2\right)^5+1}}$, per definizione

$$\int_\Sigma \frac{8(z-1)}{\sqrt{36\left(x^2+y^2\right)^5+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$.

Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-6x\left(x^2+y^2\right)^2, \; -6y\left(x^2+y^2\right)^2, \; 1\right)$$

e quindi

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{36\left(x^2+y^2\right)^5+1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x,y)) = f\left(x, y, 1 + \left(x^2+y^2\right)^3\right) = \frac{8\left(x^2+y^2\right)^3}{\sqrt{36\left(x^2+y^2\right)^5+1}},$$

si ha che

$$\int_\Sigma \frac{8(z-1)}{\sqrt{36\left(x^2+y^2\right)^5+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K 8\left(x^2+y^2\right)^3\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 8\int_{K'} \rho^7\, d\rho\, d\vartheta =$$

dove $K' = [0,R] \times [0,\pi]$, e quindi si ottiene

$$= 8\pi \int_0^R \rho^7\, d\rho = 8\pi \left[\frac{1}{8}\rho^8\right]_0^R = \pi R^8.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

$\boxed{B}$ Se $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge.

$\boxed{C}$ Se $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

$\boxed{D}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{E}$ Se $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ converge, allora $\sum b_n$ converge.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto, se $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 4. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n+1} \right)$

$\boxed{A}$ converge a -1.

$\boxed{B}$ converge a 2.

$\boxed{C}$ diverge.

$\boxed{D}$ converge a 0.

$\boxed{E}$ converge a -2.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie telescopica. La somma parziale della serie è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\frac{\pi}{k} - \cos\frac{\pi}{k+1} \right) = \\ &= \cos\pi - \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4} + \cdots + \cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n+1} = \\ &= \cos\pi - \cos\frac{\pi}{n+1} = -1 - \cos\frac{\pi}{n+1}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_n S_n = \lim_n \left(-1 - \cos\frac{\pi}{n+1} \right) = -2.$$

Ne segue che la serie converge a -2. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 5. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - x \leq y \leq x\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega 3x \, dx \, dy$ vale

$\boxed{A}$ 1.

$\boxed{B}$ 4.

$\boxed{C}$ 16.

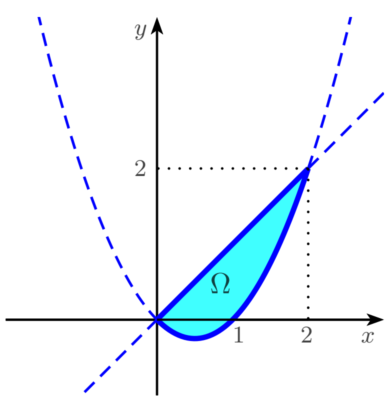
$\boxed{D}$ 8.

$\boxed{E}$ 2.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è y-semplice. Infatti,

$$x^2 - x \leq x \quad \iff \quad x^2 - 2x \leq 0 \quad \iff \quad 0 \leq x \leq 2.$$



Ne segue che $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 2, \; x^2 - x \leq y \leq x\}$.
Quindi

$$\int_\Omega 3x \, dx \, dy = 3 \int_0^2 \left(\int_{x^2-x}^{x} x \, dy \right) dx = 3 \int_0^2 x \left(\int_{x^2-x}^{x} 1 \, dy \right) dx =$$

$$= 3 \int_0^2 x \left(2x - x^2 \right) dx = 3 \int_0^2 \left(2x^2 - x^3 \right) dx = 3 \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = 4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 6. Un potenziale vettore del campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\sin y - e^z,\ \cos z - e^x,\ \dfrac{2x}{1+x^2} - e^y\right)$ è

$\boxed{A}$ $G(x,y,z) = \big(e^y + \sin z,\ \log\big(1+x^2\big) + e^z,\ e^x - \cos y\big)$.

$\boxed{B}$ $\Psi(x,y,z) = \big(e^z + \sin y,\ \log\big(1+z^2\big) + e^x,\ e^y - \cos x\big)$.

$\boxed{C}$ $H(x,y,z) = \big(e^y - \sin z,\ \log\big(1+x^2\big) + e^z,\ e^x - \cos y\big)$.

$\boxed{D}$ $K(x,y,z) = \big(e^y + \sin z,\ \log\big(1+x^2\big) - e^z,\ e^x - \cos y\big)$.

$\boxed{E}$ $\Phi(x,y,z) = \big(e^y + \sin z,\ \log\big(1+x^2\big) + e^z,\ e^x + \cos y\big)$.

SVOLGIMENTO

Tutti i campi vettoriali sono di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Calcolando il rotore di ciascun campo si osserva che solo il rotore di G coincide con F, e quindi solo G è un potenziale vettore di F. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Domanda 7. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{y}{x+3}},\ \ x^2+y^2 \le 9,\ \ x \ge 1\right\}$.

Quanto vale l'integrale $\displaystyle\int_\Omega 10z\,dx\,dy\,dz$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è idoneo per integrare per fili paralleli all'asse z. Infatti,

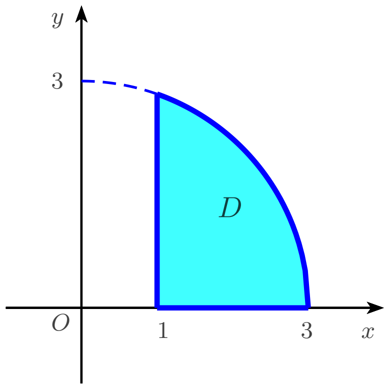
$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in D,\ \ 0 \le z \le \sqrt{\frac{y}{x+3}}\right\},$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 9,\ \ x \ge 1,\ \ y \ge 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x \le 3,\ \ 0 \le y \le \sqrt{9-x^2}\right\}.$$

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$\int_\Omega 10z\,dx\,dy\,dz = 10\int_D \left(\int_0^{\sqrt{\frac{y}{x+3}}} z\,dz\right) dx\,dy = 10\int_D \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{\frac{y}{x+3}}} dx\,dy = 5\int_D \frac{y}{x+3}\,dx\,dy =$$



essendo D un insieme y-semplice, appplicando la formula di integrazione sugli insiemi y-semplici si ricava

$$= 5\int_1^3 \frac{1}{x+3}\left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} y\,dy\right) dx = 5\int_1^3 \frac{1}{x+3}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{9-x^2}} dx =$$

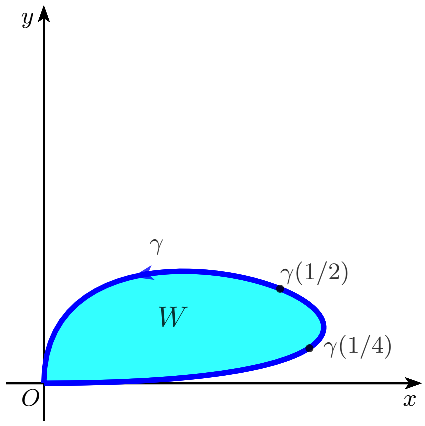
$$= \frac{5}{2}\int_1^3 \frac{9-x^2}{x+3}\,dx = \frac{5}{2}\int_1^3 (3-x)\,dx = \frac{5}{2}\left[-\frac{1}{2}(3-x)^2\right]_1^3 = 5.$$

La risposta corretta è 5.

Domanda 8. Sia W la parte di piano limitata avente per bordo il sostegno della curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \big(20t(1-t)^2,\ t^2(1-t)\big)$. Quanto vale l'area di W?

SVOLGIMENTO

La curva paramterica γ è regolare, chiusa e parametrizza il bordo di W inducendo su di esso un verso di percorrenza antiorario. Infatti,



$$\forall t \in (0,1): \quad \gamma'(t) = \Big(20(1-t)^2 - 40t(1-t),\ 2t(1-t) - t^2\Big) =$$

$$= \Big(20 - 80t + 60t^2,\ 2t - 3t^2\Big) \neq (0,0),$$

$$\gamma(0) = \gamma(1) = (0,0), \quad \gamma(1/4) = (45/16, 3/64), \quad \gamma(1/2) = (5/2, 1/8).$$

Per il Corollario del Teorema di Green, considerato il campo vettoriale $F(x,y) = (0,x)$, si ha che l'area di W è

$$m(W) = \int_W 1\,dx\,dy = \int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\Big(20t(1-t)^2,\ t^2(1-t)\Big) \cdot \Big(20(1-t)^2 - 40t(1-t),\ 2t(1-t) - t^2\Big) =$$

$$= \left(0,\ 20t(1-t)^2\right) \cdot \Big(20(1-t)^2 - 40t(1-t),\ 2t(1-t) - t^2\Big) = 20t(1-t)^2\left(2t(1-t) - t^2\right) =$$

$$= 20\left[2t^2(1-t)^3 - t^3(1-t)^2\right] = 20\left(2t^2 - 7t^3 + 8t^4 - 3t^5\right),$$

si ottiene

$$= 20\int_0^1 \left(2t^2 - 7t^3 + 8t^4 - 3t^5\right)\,dt = 20\left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{7}{4}t^4 + \frac{8}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^6\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

La risposta corretta è $\dfrac{1}{3}$.

Versione V2

Quiz 1. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 - 2y \le x \le y\}$. L'integrale $\int_\Omega 4y\, dx\, dy$ vale

$\boxed{A}$ 54.

$\boxed{B}$ 9.

$\boxed{C}$ 3.

$\boxed{D}$ 27.

$\boxed{E}$ 1.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è x-semplice. Infatti,

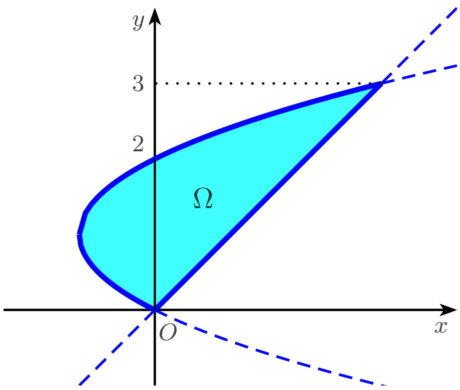
$$y^2 - 2y \le y \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - 3y \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le y \le 3.$$

Ne segue che $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 3, \ y^2 - 2y \le x \le y\}$.

Quindi

$$\int_\Omega 4y\, dx\, dy = 3\int_0^3 \left(\int_{y^2-2y}^{y} y\, dx\right) dy = 4\int_0^3 y\left(\int_{y^2-2y}^{y} 1\, dx\right) dy =$$

$$= 4\int_0^3 y\left(3y - y^2\right) dy = 4\int_0^3 \left(3y^2 - y^3\right) dy = 4\left[y^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^3 = 27.$$



La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 2. La serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n+1}\right)$

$\boxed{A}$ diverge.

$\boxed{B}$ converge a 2.

$\boxed{C}$ converge a -1.

$\boxed{D}$ converge a 0.

$\boxed{E}$ converge a 1.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie telescopica. La somma parziale della serie è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{k} - \sin\frac{\pi}{k+1}\right) = \\ &= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{5} + \cdots + \sin\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n+1} = \\ &= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{n+1} = 1 - \sin\frac{\pi}{n+1}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_n S_n = \lim_n\left(1 - \sin\frac{\pi}{n+1}\right) = 1.$$

Ne segue che la serie converge a 1. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 3. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge.

$\boxed{B}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{C}$ Se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum a_n$ converge, allora $\sum b_n$ converge.

$\boxed{D}$ Se $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

$\boxed{E}$ Se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto asintotico, se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 4. Un potenziale vettore del campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\dfrac{2y}{1+y^2} - e^z,\ e^x - \sin z,\ e^y - \cos x\right)$ è

$\boxed{A}$ $\Psi(x,y,z) = \left(\cos z - e^y,\ e^z + \sin x,\ \log\left(1+y^2\right) - e^x\right)$.

$\boxed{B}$ $\Phi(x,y,z) = \left(\cos z + e^y,\ e^z - \sin x,\ \log\left(1+y^2\right) - e^x\right)$.

$\boxed{C}$ $K(x,y,z) = \left(\cos z - e^y,\ e^z - \sin x,\ \log\left(1+y^2\right) - e^x\right)$.

$\boxed{D}$ $G(x,y,z) = \left(\cos z - e^y,\ e^z - \sin x,\ \log\left(1+y^2\right) + e^x\right)$.

$\boxed{E}$ $H(x,y,z) = \left(\cos y - e^z,\ e^x - \sin z,\ \log\left(1+z^2\right) - e^y\right)$.

SVOLGIMENTO

Tutti i campi vettoriali sono di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Calcolando il rotore di ciascun campo si osserva che solo il rotore di K coincide con F, e quindi solo K è un potenziale vettore di F. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 5. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto stazionario per f tale che $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = a \neq 0, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = b > 0.$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $a < -b$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{B}$ Se $a > -b$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{C}$ Se $-b < a < b$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{D}$ Se $a > b$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{E}$ Se $a > b$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

SVOLGIMENTO

La matrice Hessiana di f nel punto stazionario (x_0, y_0) è

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

e quindi i suoi autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\det(H_f(x_0,y_0) - \lambda I) = 0$, dove I è la matrice identica 2×2, ovvero

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \iff \quad (\lambda - a)^2 - b^2 = 0 \quad \iff \quad \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0.$$

Poiché la matrice Hessiana è simmetrica, allora ammette sempre due autovalori reali e di conseguenza l'equazione caratteristica ammette sempre due soluzioni reali. Per la regola di Cartesio, essendo $b > 0$ per ipotesi, si ha che:

- $a > b$ implica che gli autovalori sono maggiori di zero;
- $a < -b$ implica che gli autovalori sono minori di zero;
- $-b < a < b$ implica che gli autovalori sono discordi.

Quindi si ha che

- $a > b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f;
- $a < -b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f;
- $-b < a < b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

In alternativa si può procedere anche calcolando gli autovalori, che sono $\lambda_{1,2} = a \pm b$, e poi dedurne il segno in base alle relazioni fra a e b.

Quiz 6. Siano $R > 0$ e $\Sigma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; z = \big(x^2 + y^2\big)^2 - 1, \;\; x^2 + y^2 \leq R^2, \;\; x \geq 0\Big\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{6(z+1)}{\sqrt{16\,(x^2+y^2)^3 + 1}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ R^6.

$\boxed{B}$ πR^6.

$\boxed{C}$ πR^3.

$\boxed{D}$ $\frac{6}{5}\pi R^3$.

$\boxed{E}$ $\frac{6}{5}\pi R^5$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \big(x^2 + y^2\big)^2 - 1$, dove

$$K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 + y^2 \leq R^2, \;\; x \geq 0\big\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = \Big(x, y, \big(x^2 + y^2\big)^2 - 1\Big)$.

Posto $f(x, y, z) = \dfrac{6(z+1)}{\sqrt{16\,(x^2+y^2)^3 + 1}}$, per definizione

$$\int_\Sigma \frac{6(z+1)}{\sqrt{16\,(x^2+y^2)^3 + 1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y))\|N(x, y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x, y) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) = \big(-4x\,(x^2 + y^2)\,,\; -4y\,(x^2 + y^2)\,,\; 1\big)$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{16\,(x^2+y^2)^3 + 1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x,y)) = f\left(x, y, \left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right) = \frac{6\left(x^2+y^2\right)^2}{\sqrt{16\left(x^2+y^2\right)^3+1}},$$

si ha che

$$\int_\Sigma \frac{6(z+1)}{\sqrt{16\left(x^2+y^2\right)^3+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K 6\left(x^2+y^2\right)^2\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 6\int_{K'} \rho^5\, d\rho\, d\vartheta =$$

dove $K' = [0,R]\times[-\pi/2,\pi/2]$, e quindi si ottiene

$$= 6\pi \int_0^R \rho^5\, d\rho = 6\pi\left[\frac{1}{6}\rho^6\right]_0^R = \pi R^6.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Domanda 7. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ \ 0\le z\le \sqrt{\frac{y}{x+4}},\ \ x^2+y^2\le 16,\ \ x\ge 2\right\}$.

Quanto vale l'integrale $\displaystyle\int_\Omega 12z\, dx\, dy\, dz$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è idoneo per integrare per fili paralleli all'asse z. Infatti,

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ \ (x,y)\in D,\ \ 0\le z\le \sqrt{\frac{y}{x+4}}\right\},$$

dove

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \ x^2+y^2\le 16,\ \ x\ge 2,\ \ y\ge 0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \ 2\le x\le 4,\ \ 0\le y\le \sqrt{16-x^2}\right\}.$$

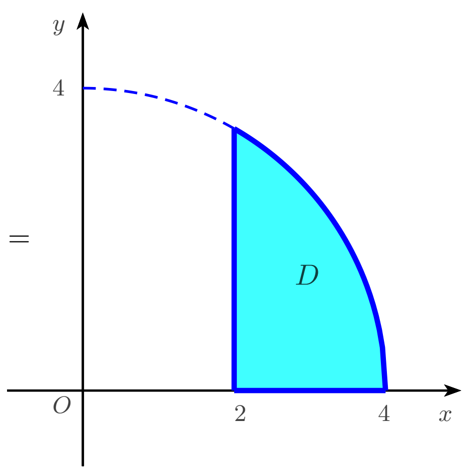
Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$\int_\Omega 12z\, dx\, dy\, dz = 12\int_D \left(\int_0^{\sqrt{\frac{y}{x+4}}} z\, dz\right) dx\, dy = 12\int_D \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{\frac{y}{x+4}}} dx\, dy = 6\int_D \frac{y}{x+4}\, dx\, dy =$$

essendo D un insieme y-semplice, appplicando la formula di integrazione sugli insiemi y-semplici si ricava

$$= 6\int_2^4 \frac{1}{x+4}\left(\int_0^{\sqrt{16-x^2}} y\, dy\right) dx = 6\int_2^4 \frac{1}{x+4}\left[\frac{1}{2}y^2\right]\int_0^{\sqrt{16-x^2}} dx =$$

$$= 3\int_2^4 \frac{16-x^2}{x+4}\, dx = 3\int_2^4 (4-x)\, dx = 3\left[-\frac{1}{2}(4-x)^2\right]_2^4 = 6.$$

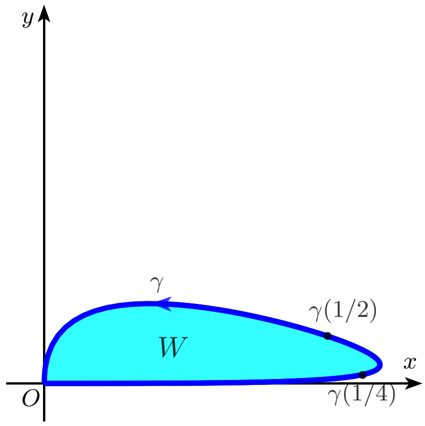


La risposta corretta è 6.

Domanda 8. Sia W la parte di piano limitata avente per bordo il sostegno della curva parametrica $\gamma : [0,1]\to\mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(12t(1-t)^2,\ t^3(1-t)\right)$. Quanto vale l'area di W?

SVOLGIMENTO

La curva paramterica γ è regolare, chiusa e parametrizza il bordo di W inducendo su di esso un verso di percorrenza antiorario. Infatti,



$$\begin{aligned}\forall t \in (0,1): \quad \gamma'(t) &= \Big(12(1-t)^2 - 24t(1-t),\ 3t^2(1-t) - t^3\Big) = \\ &= \Big(12 - 48t + 36t^2,\ 3t^2 - 4t^3\Big) \neq (0,0),\end{aligned}$$

$$\gamma(0) = \gamma(1) = (0,0), \quad \gamma(1/4) = (27/16, 3/256), \quad \gamma(1/2) = (3/2, 1/16).$$

Per il Corollario del Teorema di Green, considerato il campo vettoriale $F(x,y) = (0,x)$, si ha che l'area di W è

$$m(W) = \int_W 1\,dx\,dy = \int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\Big(12t(1-t)^2,\ t^3(1-t)\Big) \cdot \Big(12(1-t)^2 - 48t(1-t),\ 3t^2(1-t) - t^3\Big) =$$

$$= \big(0,\ 24t(1-t)^2\big) \cdot \Big(12(1-t)^2 - 48t(1-t),\ 3t^2(1-t) - t^3\Big) = 12t(1-t)^2\left(3t^2(1-t) - t^3\right) =$$

$$= 12\left[3t^3(1-t)^3 - t^4(1-t)^2\right] = 12\left(3t^3 - 10t^4 + 11t^5 - 4t^6\right),$$

si ottiene

$$= 12\int_0^1 \left(3t^3 - 10t^4 + 11t^5 - 4t^6\right)\,dt = 12\left[\frac{3}{4}t^4 - 2t^5 + \frac{11}{6}t^6 - \frac{4}{7}t^7\right]_0^1 = \frac{1}{7}.$$

La risposta corretta è $\dfrac{1}{7}$.

Versione V3

Quiz 1. Siano $R > 0$ e $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 2 + \left(x^2 + y^2\right)^4, \ x^2 + y^2 \le R^2, \ y \le 0\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{10(z-2)}{\sqrt{64\left(x^2+y^2\right)^7+1}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ πR^5. $\boxed{B}$ πR^{10}. $\boxed{C}$ $\frac{10}{9}\pi R^5$. $\boxed{D}$ R^{10}. $\boxed{E}$ $\frac{10}{9}\pi R^9$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 2 + \left(x^2 + y^2\right)^4$, dove

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le R^2, \ y \le 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = \left(x, y, 2 + \left(x^2 + y^2\right)^4\right)$.

Posto $f(x, y, z) = \dfrac{10(z-2)}{\sqrt{64\left(x^2+y^2\right)^7+1}}$, per definizione

$$\int_\Sigma \frac{10(z-2)}{\sqrt{64\left(x^2+y^2\right)^7+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y))\|N(x, y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x, y) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) = \left(-8x\left(x^2+y^2\right)^3, \ -8y\left(x^2+y^2\right)^3, \ 1\right)$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{64\left(x^2+y^2\right)^7+1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f\left(x, y, 2 + \left(x^2+y^2\right)^4\right) = \frac{10\left(x^2+y^2\right)^4}{\sqrt{64\left(x^2+y^2\right)^7+1}},$$

si ha che

$$\int_\Sigma \frac{10(z-2)}{\sqrt{64\left(x^2+y^2\right)^7+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K 10\left(x^2+y^2\right)^4\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 10\int_{K'} \rho^9\, d\rho\, d\vartheta =$$

dove $K' = [0, R] \times [\pi, 2\pi]$, e quindi si ottiene

$$= 10\pi\int_0^R \rho^9\, d\rho = 10\pi\left[\frac{1}{10}\rho^{10}\right]_0^R = \pi R^{10}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 2. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{B}$ Se $0 \le a_n \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

$\boxed{C}$ Se $0 \le a_n \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ converge, allora $\sum b_n$ converge.

$\boxed{D}$ Se $a_n \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

$\boxed{E}$ Se $0 \le a_n \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto, se $0 \le a_n \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge. La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 3. Un potenziale vettore del campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\cos y - \dfrac{2z}{1+z^2},\ \sin z - e^x,\ e^x - e^y\right)$ è

$\boxed{A}$ $\Phi(x,y,z) = \left(e^y - \cos z,\ \log\left(1+z^2\right) - e^x,\ e^x + \sin y\right)$.

$\boxed{B}$ $K(x,y,z) = \left(e^y + \cos z,\ \log\left(1+z^2\right) + e^x,\ e^x + \sin y\right)$.

$\boxed{C}$ $H(x,y,z) = \left(e^y - \cos z,\ \log\left(1+z^2\right) + e^x,\ e^x + \sin y\right)$.

$\boxed{D}$ $G(x,y,z) = \left(e^z - \cos y,\ \log\left(1+x^2\right) + e^z,\ e^y + \sin x\right)$.

$\boxed{E}$ $\Psi(x,y,z) = \left(e^y - \cos z,\ \log\left(1+z^2\right) + e^x,\ e^x - \sin y\right)$.

SVOLGIMENTO

Tutti i campi vettoriali sono di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Calcolando il rotore di ciascun campo si osserva che solo il rotore di H coincide con F, e quindi solo H è un potenziale vettore di F. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 4. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$

$\boxed{A}$ diverge.

$\boxed{B}$ converge a -1.

$\boxed{C}$ converge a -2.

$\boxed{D}$ converge a 0.

$\boxed{E}$ converge a 1.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie telescopica. La somma parziale della serie è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{\pi}{2k} - \cos\frac{\pi}{2(k+1)}\right) = \\ &= \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{8} + \cdots + \cos\frac{\pi}{2n} - \cos\frac{\pi}{2(n+1)} = \\ &= \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2(n+1)} = -\cos\frac{\pi}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_n S_n = \lim_n\left(-\cos\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = -1.$$

Ne segue che la serie converge a -1. La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 5. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto stazionario per f tale che $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = a \neq 0, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = b > 0.$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $a > b$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

$\boxed{B}$ Se $a < -b$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{C}$ Se $-b < a < b$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

$\boxed{D}$ Se $a < b$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{E}$ Se $a < -b$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

SVOLGIMENTO

La matrice Hessiana di f nel punto stazionario (x_0, y_0) è

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

e quindi i suoi autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\det(H_f(x_0, y_0) - \lambda I) = 0$, dove I è la matrice identica 2×2, ovvero

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \iff \quad (\lambda - a)^2 - b^2 = 0 \quad \iff \quad \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0.$$

Poiché la matrice Hessiana è simmetrica, allora ammette sempre due autovalori reali e di conseguenza l'equazione caratteristica ammette sempre due soluzioni reali. Per la regola di Cartesio, essendo $b > 0$ per ipotesi, si ha che:

- $a > b$ implica che gli autovalori sono maggiori di zero;
- $a < -b$ implica che gli autovalori sono minori di zero;
- $-b < a < b$ implica che gli autovalori sono discordi.

Quindi si ha che

- $a > b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f;
- $a < -b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f;
- $-b < a < b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

In alternativa si può procedere anche calcolando gli autovalori, che sono $\lambda_{1,2} = a \pm b$, e poi dedurne il segno in base alle relazioni fra a e b.

Quiz 6. ia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; -x \le y \le x - x^2\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega 6x \, dx \, dy$ vale

$\boxed{A}$ 4.

$\boxed{B}$ 16.

$\boxed{C}$ 1.

$\boxed{D}$ 8.

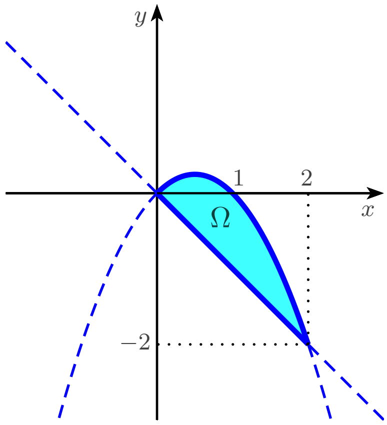
$\boxed{E}$ 2.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è y-semplice. Infatti,

$$-x \le x - x^2 \iff x^2 - 2x \le 0 \iff 0 \le x \le 2.$$

Ne segue che $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 2, \ -x \le y \le x - x^2\}$. Quindi



$$\int_\Omega 6x \, dx \, dy = 6 \int_0^2 \left(\int_{-x}^{x-x^2} x \, dy \right) dx = 6 \int_0^2 x \left(\int_{-x}^{x-x^2} 1 \, dy \right) dx =$$

$$= 6 \int_0^2 x \left(2x - x^2\right) dx = 6 \int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx = 6 \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = 8.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Domanda 7. Sia $\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le \sqrt{\frac{x}{y+3}}, \ x^2 + y^2 \le 9, \ y \ge 1 \right\}$.

Quanto vale l'integrale $\displaystyle\int_\Omega 8z \, dx \, dy \, dz$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è idoneo per integrare per fili paralleli all'asse z. Infatti,

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D, \ 0 \le z \le \sqrt{\frac{x}{y+3}} \right\},$$

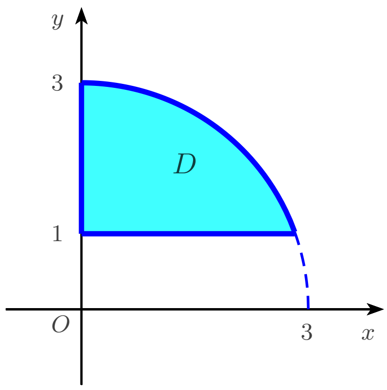
dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 9, \ y \ge 1, \ x \ge 0\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le y \le 3, \ 0 \le x \le \sqrt{9 - y^2} \right\}.$$

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$\int_\Omega 8z \, dx \, dy \, dz = 8 \int_D \left(\int_0^{\sqrt{\frac{x}{y+3}}} z \, dz \right) dx \, dy = 8 \int_D \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{\frac{x}{y+3}}} dx \, dy = 4 \int_D \frac{x}{y+3} \, dx \, dy =$$

essendo D un insieme x-semplice, appplicando la formula di integrazione sugli insiemi x-semplici si ricava



$$= 4 \int_1^3 \frac{1}{y+3} \left(\int_0^{\sqrt{9-y^2}} x \, dx \right) dy = 4 \int_1^3 \frac{1}{y+3} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\sqrt{9-y^2}} dy =$$

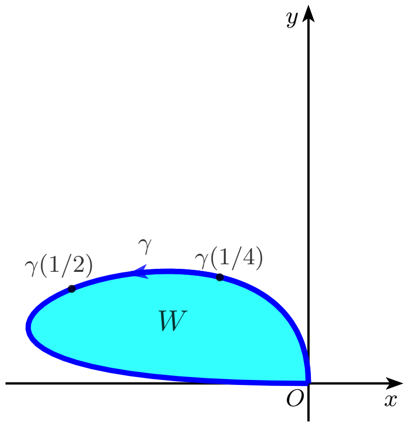
$$= 2 \int_1^3 \frac{9 - y^2}{y+3} \, dy = 2 \int_1^3 (3-y) \, dy = 2 \left[-\frac{1}{2}(3-y)^2 \right]_1^3 = 4.$$

La risposta corretta è 4.

Domanda 8. Sia W la parte di piano limitata avente per bordo il sostegno della curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(20t^2(t-1), \ t(1-t)^2\right)$. Quanto vale l'area di W?

SVOLGIMENTO

La curva paramterica γ è regolare, chiusa e parametrizza il bordo di W inducendo su di esso un verso di percorrenza antiorario. Infatti,



$$\forall t \in (0,1): \quad \gamma'(t) = \Big(40t(t-1)+20t^2,\ (1-t)^2-2t(1-t)\Big) =$$

$$= \Big(60t^2-40t,\ 3t^2-4t+1\Big) \neq (0,0),$$

$$\gamma(0)=\gamma(1)=(0,0), \quad \gamma(1/4)=(-15/16, 9/64), \quad \gamma(1/2)=(-5/2, 1/8).$$

Per il Corollario del Teorema di Green, considerato il campo vettoriale $F(x,y)=(0,x)$, si ha che l'area di W è

$$m(W) = \int_W 1\,dx\,dy = \int_\gamma F\cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = F\Big(20t^2(t-1),\ t(1-t)^2\Big)\cdot\Big(40t(t-1)+20t^2,\ (1-t)^2-2t(1-t)\Big) =$$

$$= \big(0,\ 20t^2(t-1)\big)\cdot\Big(40t(t-1)+20t^2,\ (1-t)^2-2t(1-t)\Big) = 20t^2(t-1)\left[(1-t)^2-2t(1-t)\right] =$$

$$= 20\left[2t^3(t-1)^2 - t^2(1-t)^3\right] = 20\left(3t^5-7t^4+5t^3-t^2\right),$$

si ottiene

$$= 20\int_0^1 \left(3t^5-7t^4+5t^3-t^2\right)\,dt = 20\left[\frac{1}{2}t^6 - \frac{7}{5}t^5 + \frac{5}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

La risposta corretta è $\dfrac{1}{3}$.

Versione V4

Quiz 1. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto stazionario per f tale che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = a \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = b > 0.$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $a < -b$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f.

$\boxed{B}$ Se $-b < a < b$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{C}$ Se $a > b$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

$\boxed{D}$ Se $a < -b$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

$\boxed{E}$ Se $a < b$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f.

SVOLGIMENTO

La matrice Hessiana di f nel punto stazionario (x_0, y_0) è

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

e quindi i suoi autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\det(H_f(x_0, y_0) - \lambda I) = 0$, dove I è la matrice identica 2×2, ovvero

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda - a)^2 - b^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0.$$

Poiché la matrice Hessiana è simmetrica, allora ammette sempre due autovalori reali e di conseguenza l'equazione caratteristica ammette sempre due soluzioni reali. Per la regola di Cartesio, essendo $b > 0$ per ipotesi, si ha che:

- $a > b$ implica che gli autovalori sono maggiori di zero;
- $a < -b$ implica che gli autovalori sono minori di zero;
- $-b < a < b$ implica che gli autovalori sono discordi.

Quindi si ha che

- $a > b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per f;
- $a < -b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per f;
- $-b < a < b$ implica che (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

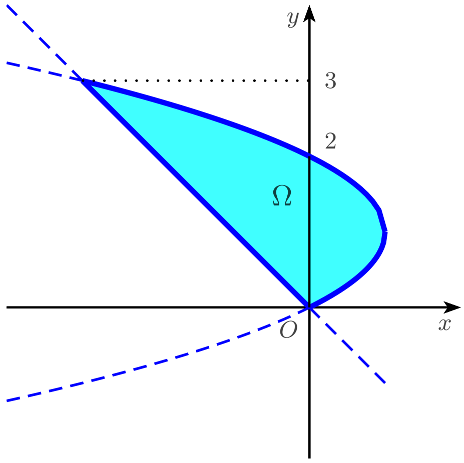
In alternativa si può procedere anche calcolando gli autovalori, che sono $\lambda_{1,2} = a \pm b$, e poi dedurne il segno in base alle relazioni fra a e b.

Quiz 2. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; -y \leq x \leq 2y - y^2\}$. L'integrale $\int_\Omega 8y \, dx \, dy$ vale

$\boxed{A}$ 27. $\boxed{B}$ 54. $\boxed{C}$ 1. $\boxed{D}$ 9. $\boxed{E}$ 3.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è x-semplice. Infatti,



$$-y \le 2y - y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - 3y \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le y \le 3.$$

Ne segue che $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le y \le 3, \; -y \le x \le 2y - y^2\right\}$.
Quindi

$$\int_\Omega 8y\,dx\,dy = 3\int_0^3 \left(\int_{-y}^{2y-y^2} y\,dx\right) dy = 8\int_0^3 y\left(\int_{-y}^{2y-y^2} 1\,dx\right) dy =$$

$$= 8\int_0^3 y\left(3y - y^2\right) dy = 8\int_0^3 \left(3y^2 - y^3\right) dy = 8\left[y^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^3 = 54.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 3. Un potenziale vettore del campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(e^y - e^z, \; \cos z + \dfrac{2x}{1+x^2}, \; \sin x - e^y\right)$ è

$\boxed{A}$ $G(x,y,z) = \left(e^y + \sin z, \; e^z + \cos x, \; e^y - \log\left(1+x^2\right)\right)$.

$\boxed{B}$ $H(x,y,z) = \left(e^y + \sin z, \; e^z - \cos x, \; e^y + \log\left(1+x^2\right)\right)$.

$\boxed{C}$ $K(x,y,z) = \left(e^z + \sin y, \; e^x - \cos z, \; e^x - \log\left(1+y^2\right)\right)$.

$\boxed{D}$ $\Psi(x,y,z) = \left(e^y - \sin z, \; e^z - \cos x, \; e^y - \log\left(1+x^2\right)\right)$.

$\boxed{E}$ $\Phi(x,y,z) = \left(e^y + \sin z, \; e^z - \cos x, \; e^y - \log\left(1+x^2\right)\right)$.

SVOLGIMENTO

Tutti i campi vettoriali sono di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Calcolando il rotore di ciascun campo si osserva che solo il rotore di Φ coincide con F, e quindi solo Φ è un potenziale vettore di F. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 4. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{B}$ Se $a_n, b_n \ge 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum a_n$ converge, allora $\sum b_n$ converge.

$\boxed{C}$ Se $a_n, b_n \ge 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

$\boxed{D}$ Se $a_n, b_n \ge 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge.

$\boxed{E}$ Se $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto asintotico, se $a_n, b_n \ge 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 5. Siano $R > 0$ e $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = \left(x^2+y^2\right)^5 - 2, \; x^2+y^2 \le R^2, \; x \le 0\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{12(z+2)}{\sqrt{100\left(x^2+y^2\right)^9 + 1}}\,d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ $\dfrac{12}{11}\pi R^{11}$.

$\boxed{B}$ $\dfrac{12}{11}\pi R^6$.

$\boxed{C}$ πR^{12}.

$\boxed{D}$ R^{12}.

$\boxed{E}$ πR^6.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^5 - 2$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2+y^2 \leq R^2, \;\; x \leq 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x, y, \left(x^2+y^2\right)^5 - 2\right)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{12(z+2)}{\sqrt{100\left(x^2+y^2\right)^9+1}}$, per definizione

$$\int_\Sigma \frac{12(z+2)}{\sqrt{100\left(x^2+y^2\right)^9+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$.

Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-10x\left(x^2+y^2\right)^4, \;\; -10y\left(x^2+y^2\right)^4, \;\; 1\right)$$

e quindi

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{100\left(x^2+y^2\right)^9+1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x,y)) = f\left(x, y, \left(x^2+y^2\right)^5 - 2\right) = \frac{12\left(x^2+y^2\right)^5}{\sqrt{100\left(x^2+y^2\right)^9+1}},$$

si ha che

$$\int_\Sigma \frac{12(z+2)}{\sqrt{100\left(x^2+y^2\right)^9+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K 12\left(x^2+y^2\right)^5\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 12\int_{K'} \rho^{11}\, d\rho\, d\vartheta =$$

dove $K' = [0,R] \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, e quindi si ottiene

$$= 12\pi \int_0^R \rho^{11}\, d\rho = 12\pi \left[\frac{1}{12}\rho^{12}\right]_0^R = \pi R^{12}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 6. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$

$\boxed{A}$ converge a 1.

$\boxed{B}$ converge a -1.

$\boxed{C}$ diverge.

$\boxed{D}$ converge a 2.

$\boxed{E}$ converge a 0.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie telescopica. La somma parziale della serie è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\frac{\pi}{2k} - \sin\frac{\pi}{2(k+1)} \right) = \\ &= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{8} + \dots + \sin\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{2(n+1)} = \\ &= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2(n+1)} = 1 - \sin\frac{\pi}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \sin\frac{\pi}{2(n+1)} \right) = 1.$$

Ne segue che la serie converge a 1. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Domanda 7. Sia $\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le \sqrt{\frac{x}{y+4}}, \ x^2 + y^2 \le 16, \ y \ge 2 \right\}$.

Quanto vale l'integrale $\int_\Omega 16z \, dx \, dy \, dz$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è idoneo per integrare per fili paralleli all'asse z. Infatti,

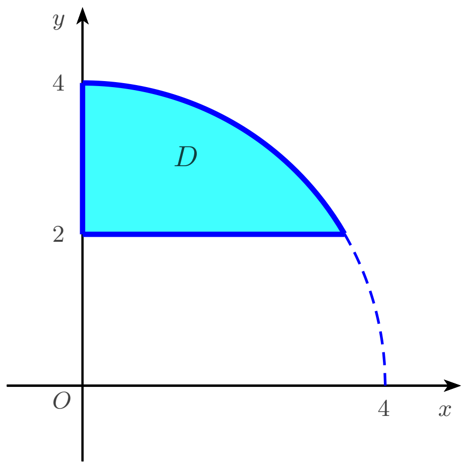
$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D, \ 0 \le z \le \sqrt{\frac{x}{y+4}} \right\},$$

dove

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 16, \ y \ge 2, \ x \ge 0 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 \le y \le 4, \ 0 \le x \le \sqrt{16 - y^2} \right\}.$$

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$\int_\Omega 16z \, dx \, dy \, dz = 16 \int_D \left(\int_0^{\sqrt{\frac{x}{y+4}}} z \, dz \right) dx \, dy = 16 \int_D \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{\frac{x}{y+4}}} dx \, dy = 8 \int_D \frac{x}{y+4} \, dx \, dy =$$



essendo D un insieme x-semplice, appplicando la formula di integrazione sugli insiemi x-semplici si ricava

$$= 8 \int_2^4 \frac{1}{y+4} \left(\int_0^{\sqrt{16-y^2}} x \, dx \right) dy = 8 \int_2^4 \frac{1}{y+4} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\sqrt{16-y^2}} dy =$$

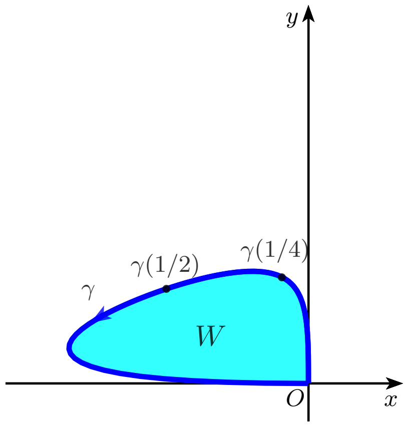
$$= 4 \int_2^4 \frac{16 - y^2}{y+4} \, dy = 4 \int_2^4 (4-y) \, dy = 4 \left[-\frac{1}{2}(4-y)^2 \right]_2^4 = 8.$$

La risposta corretta è 8.

Domanda 8. Sia W la parte di piano limitata avente per bordo il sostegno della curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(12t^3(t-1), \ t(1-t)^2 \right)$. Quanto vale l'area di W?

SVOLGIMENTO

La curva paramterica γ è regolare, chiusa e parametrizza il bordo di W inducendo su di esso un verso di percorrenza antiorario. Infatti,



$$\forall t \in (0,1): \quad \gamma'(t) = \Big(36t^2(t-1)+12t^3,\ (1-t)^2-2t(1-t)\Big) =$$

$$= \Big(48t^3-36t^2,\ 3t^2-4t+1\Big) \neq (0,0),$$

$$\gamma(0)=\gamma(1)=(0,0), \quad \gamma(1/4)=(-9/64, 9/64), \quad \gamma(1/2)=(-3/4,1/8).$$

Per il Corollario del Teorema di Green, considerato il campo vettoriale $F(x,y)=(0,x)$, si ha che l'area di W è

$$m(W) = \int_W 1\,dx\,dy = \int_\gamma F\cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = F\Big(12t^3(t-1),\ t(1-t)^2\Big)\cdot\Big(36t^2(t-1)+12t^3,\ (1-t)^2-2t(1-t)\Big) =$$

$$= \big(0,\ 12t^3(t-1)\big)\cdot\Big(36t^2(t-1)+12t^3,\ (1-t)^2-2t(1-t)\Big) = 12t^3(t-1)\left((1-t)^2-2t(1-t)\right) =$$

$$= 12\left[-t^3(1-t)^3+2t^4(1-t)^2\right] = 12\left(-t^3-+5t^4-7t^5+3t^6\right),$$

si ottiene

$$= 12\int_0^1 \left(-t^3-+5t^4-7t^5+3t^6\right)\,dt = 12\left[-\frac{1}{4}t^4+t^5-\frac{7}{6}t^6+\frac{3}{7}t^7\right]_0^1 = \frac{1}{7}.$$

La risposta corretta è $\dfrac{1}{7}$.
