

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V1	B	A	A	C	D	C	$e - 1$	-12π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{6x^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} - 9x^2y, 9xy^2 - 4yz, 2z^2 + 3x(x^2 + y^2) \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{4 - y^2 - z^2} \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2 - z^2}, y^2 + z^2 \geq 1 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e che F è di classe C^1 su $\text{dom}(F)$. Poiché $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$, per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = \frac{12x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} \frac{12x}{\sqrt{y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = x \\ y = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, x)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 12 \int_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz = 12 \int_{\Omega'} x \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad \sqrt{4 - \rho^2} \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - \rho^2} \right\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 12 \int_{\Omega'} x \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 24\pi \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{4-\rho^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-\rho^2}} x \, dx \right) d\rho = \\ &= 24\pi \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\sqrt{4-\rho^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = 15\pi \int_1^2 (4 - \rho^2) \, d\rho = \\ &= 15\pi \left[4\rho - \frac{1}{3}\rho^3 \right]_1^2 = 25\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V2	A	D	D	C	D	E	$2e - 2$	-4π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(5x^2y - 8xz, \frac{4y^2}{\sqrt{x^2 + z^2}} - 5xy^2, 4z^2 + 2y(x^2 + y^2) \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2 - z^2}, \quad x^2 + z^2 \geq 1 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ e che F è di classe C^1 su $\text{dom}(F)$. Poiché $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$, per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = \frac{8y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} \frac{8y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = y \\ z = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad y \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, y)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 8 \int_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz = 8 \int_{\Omega'} y \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad \frac{1}{2}\sqrt{4 - \rho^2} \leq y \leq \sqrt{4 - \rho^2} \right\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 8 \int_{\Omega'} y \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 16\pi \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{2}\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} y \, dy \right) d\rho = \\ &= 16\pi \int_1^2 \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_{\frac{1}{2}\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = 6\pi \int_1^2 (4 - \rho^2) \, d\rho = \\ &= 6\pi \left[4\rho - \frac{1}{3}\rho^3 \right]_1^2 = 10\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V3	A	E	A	B	E	A	$3 - 3e$	12π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} + 7x^2y, 6yz - 7xy^2, x(x^2 + y^2) - 3z^2 \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{16 - y^2 - z^2} \leq x \leq \frac{5}{4}\sqrt{16 - y^2 - z^2}, y^2 + z^2 \geq 4 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e che F è di classe C^1 su $\text{dom}(F)$. Poiché $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$, per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = \frac{2x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} \frac{2x}{\sqrt{y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = x \\ y = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, x)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega'} x \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq \rho \leq 4, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad \sqrt{16 - \rho^2} \leq x \leq \frac{5}{4}\sqrt{16 - \rho^2} \right\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 2 \int_{\Omega'} x \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 4\pi \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{16-\rho^2}}^{\frac{5}{4}\sqrt{16-\rho^2}} x \, dx \right) d\rho = \\ &= 4\pi \int_2^4 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\sqrt{16-\rho^2}}^{\frac{5}{4}\sqrt{16-\rho^2}} d\rho = \frac{9}{8}\pi \int_2^4 (16 - \rho^2) \, d\rho = \\ &= \frac{9}{8}\pi \left[16\rho - \frac{1}{3}\rho^3 \right]_2^4 = 15\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Dom. 7	Dom. 8
V4	C	C	C	D	E	E	$4 - 4e$	4π

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(10xz - 6x^2y, \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + z^2}} + 6xy^2, y(x^2 + y^2) - 5z^2 \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{16 - x^2 - z^2}, x^2 + z^2 \geq 4 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ e che F è di classe C^1 su $\text{dom}(F)$. Poiché $\Omega \subseteq \text{dom}(F)$, per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\text{div} F(x, y, z) = \frac{4y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y . Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = y \\ z = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad y \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, y)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega'} y \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq \rho \leq 4, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad \frac{1}{2}\sqrt{16 - \rho^2} \leq y \leq \sqrt{16 - \rho^2} \right\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 2 \int_{\Omega'} y \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 4\pi \int_2^4 \left(\int_{\frac{1}{2}\sqrt{16-\rho^2}}^{\sqrt{16-\rho^2}} y \, dy \right) d\rho = \\ &= 4\pi \int_2^4 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\frac{1}{2}\sqrt{16-\rho^2}}^{\sqrt{16-\rho^2}} d\rho = \frac{3}{2}\pi \int_2^4 (16 - \rho^2) \, d\rho = \\ &= \frac{3}{2}\pi \left[16\rho - \frac{1}{3}\rho^3 \right]_2^4 = 20\pi. \end{aligned}$$