Svolgimento di quiz e domande dell'esame di Analisi Matematica II del 8/02/2024 ore 17

Versione: V1

Quiz 1. Sia (a_n) una successione reale e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $\lim_n S_n = +\infty$, allora $\lim_n a_n \neq 0$.

$\boxed{B}$ Se $\lim_n S_n = 3$, allora $\lim_n a_n = 0$.

$\boxed{C}$ Se $\lim_n a_n$ non esiste, allora $\lim_n S_n$ non esiste.

$\boxed{D}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{E}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

SVOLGIMENTO

Per definizione se la successione delle sue somme parziali (S_n) della serie di a_n ha limite finito, allora la serie di a_n converge. Di conseguenza per la condizione necessaria risulta che $\lim_n a_n = 0$. La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 2. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(5^{-n}-2)^n}{3^n+1}$

$\boxed{A}$ converge a $S > 0$.

$\boxed{B}$ diverge positivamente.

$\boxed{C}$ è indeterminata.

$\boxed{D}$ converge a $S < 0$.

$\boxed{E}$ diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(5^{-n}-2)^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-5^{-n})^n}{3^n+1}.$$

Quindi è una serie a termini positivi, e di conseguenza converge ad un numero reale maggiore o uguale a zero oppure diverge positivamente.

Poiché

$$\frac{(2-5^{-n})^n}{3^n+1} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n \to +\infty$$

e la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge, evidentemente ad un numero $S > 0$ perché almeno un termine della serie è maggiore di zero. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(8x + \frac{xy^4}{\sqrt{1+x^2y^4}},\ \frac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}} - 4y\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0,\sqrt{3}] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^5 - \sqrt{3}\,t^4 + t,\ t\sin\left(t - \sqrt{3}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,t\right)$ vale

$\boxed{A}$ 10. $\boxed{B}$ 0. $\boxed{C}$ 4. $\boxed{D}$ 20. $\boxed{E}$ 5.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F=(f_1,f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=\frac{4xy^3+2x^3y^7}{(1+x^2y^4)^{3/2}}=\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f_1(x,y)=8x+\dfrac{xy^4}{\sqrt{1+x^2y^4}}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_2(x,y)=\dfrac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}}-4y. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y)=\int\left(8x+\frac{xy^4}{\sqrt{1+x^2y^4}}\right)dx=4x^2+\sqrt{1+x^2y^4}+c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}}+c'(y)=\frac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}}-4y \quad\Longrightarrow\quad c'(y)=-4y \quad\Longrightarrow\quad c(y)=-2y^2+k, \quad k\in\mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x,y)=4x^2+\sqrt{1+x^2y^4}-2y^2+k, \quad k\in\mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F\cdot dP=f(\gamma(\sqrt{3}))-f(\gamma(0))=f(\sqrt{3},2)-f(0,0)=10.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 4. Sia $f(x,y)=\frac{1}{5}(x-1)^5+\frac{1}{7}(y-2)^7-16x-y+4$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha né punti di minimo locale né punti di sella.

$\boxed{B}$ La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha né punti di massimo locale né punti di sella.

$\boxed{C}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e due punti di sella.

$\boxed{D}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{E}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\operatorname{dom}(f)=\mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\operatorname{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(x-1)^4-16, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(y-2)^6-1.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y)=(0,0) \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} (x-1)^4=16 \\ (y-2)^6=1 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x-1=\pm 2 \\ y-2=\pm 1 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad (x,y)=(3,3),\ (3,1),\ (-1,3),\ (-1,1).$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 4 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4(x-1)^3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6(y-2)^5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

Quindi

$$H_f(3,3) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad H_f(3,1) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \qquad H_f(-1,3) = \begin{pmatrix} -32 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} -32 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(3,3)$ è un punto di minimo locale per f, $(-1,1)$ è un punto di massimo locale per f, mentre $(3,1)$ e $(-1,3)$ sono due punti di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 5. Siano $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 = 4, \ y \geq 0\right\}$ e $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale della forma $F(x,y) = \varphi(\|(x,y)\|)\,(x,y)$, dove $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

L'integrale di linea di F lungo Γ, percorsa in verso antiorario a partire dal punto $A(3,0)$, è uguale a

$\boxed{A}$ 0.

$\boxed{B}$ $-\displaystyle\int_1^3 \varphi(t)\,dt$.

$\boxed{C}$ $\displaystyle\int_1^3 t\varphi(t)\,dt$.

$\boxed{D}$ $-\displaystyle\int_1^3 t\varphi(t)\,dt$.

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_1^3 \varphi(t)\,dt$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è radiale e continuo, quindi è conservativo. Ne segue che l'integrale di linea di F lungo Γ è uguale a

$$\int_\Gamma F \cdot dP = f(B) - f(A),$$

dove f è un potenziale di F su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e A e B sono rispettivamente i punti inziali e finali della curva Γ. Più precisamente $A = (3,0)$ e $B = (-1,0)$.

Un potenziale f di F è $f(x,y) = \Phi(\|(x,y)\|)$, dove $\Phi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una primitiva della funzione $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$. Quindi preso ad esempio $s_0 > 0$ si ha che

$$\Phi(s) = \int_{s_0}^s t\varphi(t)\,dt.$$

Quindi

$$\int_\Gamma F \cdot dP = f(B) - f(A) = f(-1,0) - f(3,0) = \Phi(\|(-1,0)\|) - \Phi(\|(3,0)\|) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(3) = \int_{s_0}^1 t\varphi(t)\,dt - \int_{s_0}^3 t\varphi(t)\,dt = \int_3^1 t\varphi(t)\,dt = -\int_1^3 t\varphi(t)\,dt.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

<u>Metodo alternativo</u>

Una parametrizzazione di Γ a partire da $A(3,0)$ è $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (1 + 2\cos t, 2\sin t)$.

Quindi

$$\int_\Gamma F \cdot dP = \int_\gamma F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Essendo $F(x,y) = \varphi(\|(x,y)\|)\,(x,y)$ si ha che

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \varphi(\|\gamma(t)\|)\,\gamma(t) \cdot \gamma'(t).$$

Poiché
$$\|\gamma(t)\| = \|(1+2\cos t, 2\sin t)\| = \sqrt{(1+2\cos t)^2 + 4\sin^2 t} = \sqrt{5+4\cos t}$$
si ha che
$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = \varphi(\|\gamma(t)\|)\,\gamma(t)\cdot\gamma'(t) = \varphi(\sqrt{5+4\cos t})\,(1+2\cos t, 2\sin t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t) = -2\sin t\,\varphi(\sqrt{5+4\cos t}).$$
Ne segue che
$$\int_\Gamma F\cdot dP = \int_0^\pi (-2\sin t)\,\varphi(\sqrt{5+4\cos t})\,dt =$$
posto $u = \sqrt{5+4\cos t}$, e quindi $u^2 = 5+4\cos t$, da cui $u\,du = -2\sin t\,dt$, si ottiene
$$= \int_3^1 u\varphi(u)\,du = -\int_1^3 u\varphi(u)\,du.$$

Quiz 6. Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ \ z = 3+4e^{x^2+y^2},\ \ x^2+y^2\le 4,\ \ x\ge 0\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{8\log\left[\frac{1}{4}(z-3)\right]}{\sqrt{64\,(x^2+y^2)\,e^{2(x^2+y^2)}+1}}\,d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ $\frac{32}{3}\pi$. $\boxed{B}$ 8π. $\boxed{C}$ 32π. $\boxed{D}$ $\frac{64}{3}\pi$. $\boxed{E}$ 16π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K\to\mathbb{R}$, $g(x,y) = 3+4e^{x^2+y^2}$, dove
$$K = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \ x^2+y^2\le 4,\ \ x\ge 0\right\}.$$
Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K\to\mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,3+4e^{x^2+y^2}\right)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{8\log\left[\frac{1}{4}(z-3)\right]}{\sqrt{64\,(x^2+y^2)\,e^{2(x^2+y^2)}+1}}$, per definizione
$$\int_\Sigma \frac{8\log\left[\frac{1}{4}(z-3)\right]}{\sqrt{64\,(x^2+y^2)\,e^{2(x^2+y^2)}+1}}\,d\sigma = \int_\Sigma f\,d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\|N(x,y)\|\,dx\,dy,$$
dove $N(x,y) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y)\wedge\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$.

Si ha che
$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-8x\,e^{x^2+y^2},\ -8y\,e^{x^2+y^2},\ 1\right).$$
e quindi
$$\|N(x,y)\| = \sqrt{64\,(x^2+y^2)\,e^{2(x^2+y^2)}+1}.$$
Essendo
$$f(\sigma(x,y)) = f\left(x,y,3+4e^{x^2+y^2}\right) = \frac{8\log\left(e^{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{64\,(x^2+y^2)\,e^{2(x^2+y^2)}+1}} = \frac{8\,(x^2+y^2)}{\sqrt{64\,(x^2+y^2)\,e^{2(x^2+y^2)}+1}},$$
si ha che
$$\int_\Sigma f\,d\sigma = \int_K \frac{8\,(x^2+y^2)}{\sqrt{64\,(x^2+y^2)\,e^{2(x^2+y^2)}+1}}\cdot\sqrt{64\,(x^2+y^2)\,e^{2(x^2+y^2)}+1}\,dx\,dy = \int_K 8\,(x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 8 \int_{K'} \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [0, 2] \times [-\pi/2, \pi/2]$, e quindi si ottiene

$$= 8\pi \int_0^2 \rho^3 \, d\rho = 8\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 = 32\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Domanda 7. Sia $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ ex \leq y \leq x + e^2 - e, \ x \geq 1 \right\}$. Quanto vale l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{e\left(x + e^2 - e\right)}{y^2} \, dx \, dy$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è y-semplice. Infatti

$$ex \leq y \leq x + e^2 - e \quad \Longrightarrow \quad x \leq e$$

e quindi si ha che

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x \leq e, \ ex \leq y \leq x + e^2 - e \right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi y-semplici, si ha che

$$\int_\Omega \frac{e\left(x + e^2 - e\right)}{y^2} \, dx \, dy = e \int_1^e \left(\int_{ex}^{x+e^2-e} \frac{\left(x + e^2 - e\right)}{y^2} \, dy \right) dx = e \int_1^e \left(x + e^2 - e\right) \left[-\frac{1}{y} \right]_{ex}^{x+e^2-e} dx =$$

$$= -e \int_1^e \left(x + e^2 - e\right) \left(\frac{1}{x + e^2 - e} - \frac{1}{ex} \right) dx = -e \int_1^e \left(1 - \frac{x + e^2 - e}{ex} \right) dx =$$

$$= -e \int_1^e \left(\frac{e-1}{e} - \frac{e-1}{x} \right) dx = -e(e-1) \int_1^e \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{x} \right) dx = -e(e-1) \left[\frac{1}{e} x - \log|x| \right]_1^e = e - 1.$$

La risposta corretta è $e - 1$.

Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{3}{2} yz^2 + \sin\left(e^x\right), \ e^{\cos y} - \frac{3}{2} xz^2, \ e^{z^2} + 1 \right)$ e la superficie $\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x^2 + y^2 + z^2 = 8, \ z \geq y \geq 0 \right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{3}{2} yz^2 + \sin\left(e^x\right) & e^{\cos y} - \frac{3}{2} xz^2 & e^{z^2} + 1 \end{vmatrix} = \left(3xz, \ 3yz, \ -3z^2\right).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} z = \sqrt{8 - 2x^2 - y^2} \\ 2x^2 + y^2 \leq 8 \\ z \geq y \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} z = \sqrt{8 - 2x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = \sqrt{8 - 2x^2 - y^2}$, dove

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 4, \ y \ge 0 \right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x,y) = \left(x,\ y,\ \sqrt{8 - 2x^2 - y^2}\right)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\ 1 \right) = \left(\frac{2x}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Quindi $N(x,y) = N_\sigma(x,y) = \left(\frac{2x}{\sqrt{8-2x^2-y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{8-2x^2-y^2}},\ 1 \right)$.

Si ha che

$$\operatorname{rot} F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = \operatorname{rot} F\left(x,\ y,\ \sqrt{8 - 2x^2 - y^2}\right) \cdot \left(\frac{2x}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ 1 \right) =$$

$$= \left(3x\sqrt{8 - 2x^2 - y^2},\ 3y\sqrt{8 - 2x^2 - y^2},\ -3\left(8 - 2x^2 - y^2\right) \right) \cdot \left(\frac{2x}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ 1 \right) =$$

$$= 6\left(2x^2 + y^2 - 4\right).$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy = \int_K 6\left(2x^2 + y^2 - 4\right) \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = 6 \int_K \left(2x^2 + y^2 - 4\right) \, dx \, dy =$$

$$= 6 \int_{K'} \rho \left(2\rho^2 \cos^2\vartheta + \rho^2 \sin^2\vartheta - 4\right) \, d\rho \, d\vartheta = 6 \int_{K'} \rho\left(\rho^2 \cos^2\vartheta + \rho^2 - 4\right) \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= 6 \int_{K'=[0,2]\times[0,\pi]} \left[\rho^3 \cos^2\vartheta + \rho\left(\rho^2 - 4\right)\right] \, d\rho \, d\vartheta = 6 \left[\left(\int_0^2 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_0^\pi \cos^2\vartheta \, d\vartheta \right) + \pi \int_0^2 \rho\left(\rho^2 - 4\right) \, d\rho \right] =$$

$$= 6 \left(\left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^2 \left[\frac{1}{2}(\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta) \right]_0^\pi + \pi \left[\frac{1}{4}\left(\rho^2 - 4\right)^2 \right]_0^2 \right) = -12\pi.$$

La risposta corretta è -12π.

Versione V2

Quiz 1. Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ z = 7 - 6e^{x^2+y^2}, \ \ x^2+y^2 \leq 3, \ \ y \geq 0\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{16\log\left[\frac{1}{6}(7-z)\right]}{\sqrt{144\,(x^2+y^2)\ e^{2(x^2+y^2)}+1}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ 36π. $\boxed{B}$ 18π. $\boxed{C}$ 9π. $\boxed{D}$ $16\sqrt{3}\,\pi$. $\boxed{E}$ $12\sqrt{3}\,\pi$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 7 - 6e^{x^2+y^2}$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2+y^2 \leq 3, \ \ y \geq 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x, y, 7 - 6e^{x^2+y^2}\right)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{16\log\left[\frac{1}{6}(7-z)\right]}{\sqrt{144\,(x^2+y^2)\ e^{2(x^2+y^2)}+1}}$, per definizione

$$\int_\Sigma \frac{16\log\left[\frac{1}{6}(7-z)\right]}{\sqrt{144\,(x^2+y^2)\ e^{2(x^2+y^2)}+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$.

Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(12x\, e^{x^2+y^2}, \ 12y\, e^{x^2+y^2}, \ 1\right).$$

e quindi

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{144\,(x^2+y^2)\ e^{2(x^2+y^2)}+1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x,y)) = f\left(x, y, 7 - 6e^{x^2+y^2}\right) = \frac{16\log\left(e^{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{144\,(x^2+y^2)\ e^{2(x^2+y^2)}+1}} = \frac{16\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{144\,(x^2+y^2)\ e^{2(x^2+y^2)}+1}},$$

si ha che

$$\int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K \frac{16\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{144\,(x^2+y^2)\ e^{2(x^2+y^2)}+1}} \cdot \sqrt{144\,(x^2+y^2)\ e^{2(x^2+y^2)}+1}\, dx\, dy = 16\int_K \left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 16\int_{K'} \rho^3\, d\rho\, d\vartheta =$$

dove $K' = [0,\sqrt{3}] \times [0,\pi]$, e quindi si ottiene

$$= 16\pi\int_0^{\sqrt{3}} \rho^3\, d\rho = 16\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{\sqrt{3}} = 36\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 2. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(16x + \frac{2x^3y^2}{\sqrt{16+x^4y^2}},\ \frac{x^4y}{\sqrt{16+x^4y^2}} - 10y\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : \left[0, \sqrt{3}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t \sin\left(t - \sqrt{3}\right) + t,\ t^9 - \sqrt{3}\, t^8 + \frac{\sqrt{3}}{3}\, t\right)$ vale

$\boxed{A}$ 10. $\boxed{B}$ 0. $\boxed{C}$ 4. $\boxed{D}$ 20. $\boxed{E}$ 5.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^7y^3 + 64x^3y}{(16+x^4y^2)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = 16x + \dfrac{2x^3y^2}{\sqrt{16+x^4y^2}}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \dfrac{x^4y}{\sqrt{16+x^4y^2}} - 10y. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(16x + \frac{2x^3y^2}{\sqrt{16+x^4y^2}}\right) dx = 8x^2 + \sqrt{16+x^4y^2} + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4y}{\sqrt{16+x^4y^2}} + c'(y) = \frac{x^4y}{\sqrt{16+x^4y^2}} - 10y \implies c'(y) = -10y \implies c(y) = -5y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x,y) = 8x^2 + \sqrt{16+x^4y^2} - 5y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(\sqrt{3})) - f(\gamma(0)) = f(\sqrt{3}, 1) - f(0,0) = 20.$$

La risposta corretta è $\boxed{D}$.

Quiz 3. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(7^{-n} - 3)^n}{2^n + 5}$

$\boxed{A}$ è indeterminata.

$\boxed{B}$ diverge negativamente.

$\boxed{C}$ converge a $S < 0$.

$\boxed{D}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ converge a $S > 0$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(7^{-n} - 3)^n}{2^n + 5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 - 7^{-n})^n}{2^n + 5}.$$

Quindi è una serie a termini positivi, e di conseguenza converge ad un numero reale maggiore o uguale a zero oppure diverge positivamente.

Poiché

$$\frac{(3-7^{-n})^n}{2^n+5} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^n, \qquad n \to +\infty$$

e la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ diverge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data diverge. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 4. Siano $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 = 9, \ y \geq 0\right\}$ e $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale della forma $F(x,y) = \varphi(\|(x,y)\|)\,(x,y)$, dove $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

L'integrale di linea di F lungo Γ, percorsa in verso orario a partire dal punto $A(-4,0)$, è uguale a

$\boxed{A}$ $\displaystyle\int_2^4 t\varphi(t)\,dt.$

$\boxed{B}$ $\displaystyle-\int_2^4 \varphi(t)\,dt.$

$\boxed{C}$ $\displaystyle-\int_2^4 t\varphi(t)\,dt.$

$\boxed{D}$ $\displaystyle\int_2^4 \varphi(t)\,dt.$

$\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è radiale e continuo, quindi è conservativo. Ne segue che l'integrale di linea di F lungo Γ è uguale a

$$\int_\Gamma F \cdot dP = f(B) - f(A),$$

dove f è un potenziale di F su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e A e B sono rispettivamente i punti inziali e finali della curva Γ. Più precisamente $A = (-4,0)$ e $B = (2,0)$.

Un potenziale f di F è $f(x,y) = \Phi(\|(x,y)\|)$, dove $\Phi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una primitiva della funzione $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$. Quindi preso ad esempio $s_0 > 0$ si ha che

$$\Phi(s) = \int_{s_0}^{s} t\varphi(t)\,dt.$$

Quindi

$$\int_\Gamma F \cdot dP = f(B) - f(A) = f(2,0) - f(-4,0) = \Phi(\|(2,0)\|) - \Phi(\|(-4,0)\|) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(4) = \int_{s_0}^{2} t\varphi(t)\,dt - \int_{s_0}^{4} t\varphi(t)\,dt = \int_4^2 t\varphi(t)\,dt = -\int_2^4 t\varphi(t)\,dt.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

<u>Metodo alternativo</u>

Una parametrizzazione di Γ a partire da $A(-4,0)$ è $\gamma : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (-1 + 3\cos t, -3\sin t)$.

Quindi

$$\int_\Gamma F \cdot dP = \int_\gamma F \cdot dP = \int_\pi^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Essendo $F(x,y) = \varphi(\|(x,y)\|)\,(x,y)$ si ha che

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \varphi(\|\gamma(t)\|)\,\gamma(t) \cdot \gamma'(t).$$

Poiché
$$\|\gamma(t)\| = \|(-1+3\cos t, -3\sin t)\| = \sqrt{(-1+3\cos t)^2 + 9\sin^2 t} = \sqrt{10-6\cos t}$$
si ha che
$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = \varphi(\|\gamma(t)\|)\,\gamma(t)\cdot\gamma'(t) = \varphi(\sqrt{10-6\cos t})\,(-1+3\cos t, -3\sin t)\cdot(-3\sin t, -3\cos t) =$$
$$= 3\sin t\,\varphi(\sqrt{10-6\cos t}).$$
Ne segue che
$$\int_\Gamma F\cdot dP = \int_\pi^{2\pi} 3\sin t\,\varphi(\sqrt{10-6\cos t})\,dt =$$
posto $u = \sqrt{10-6\cos t}$, e quindi $u^2 = 10-6\cos t$, da cui $u\,du = 3\sin t\,dt$, si ottiene
$$= \int_4^2 u\varphi(u)\,du = -\int_2^4 u\varphi(u)\,du.$$

Quiz 5. Sia (a_n) una successione reale e per ogni $n\in\mathbb{N}$ sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{B}$ Se $\lim_n S_n$ non esiste, allora $\lim_n a_n$ non esiste.

$\boxed{C}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{D}$ Se $\lim_n a_n = 3$, allora $\lim_n S_n = +\infty$.

$\boxed{E}$ Se $\lim_n a_n$ non esiste, allora $\lim_n S_n$ non esiste.

SVOLGIMENTO

Se $\lim_n a_n = 3$, allora la successione (a_n) è positiva da un certo $n_0\in\mathbb{N}$ in poi. Quindi la serie di a_n è a termini positivi e non verifica la condizione necessaria. Ne segue che la serie di a_n diverge positivamente e di conseguenza $\lim_n S_n = +\infty$. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 6. Sia $f(x,y) = \frac{1}{7}(x-2)^7 + \frac{1}{5}(y-1)^5 - x - 16y + 8$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{B}$ La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha né punti di massimo locale né punti di sella.

$\boxed{C}$ La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha né punti di minimo locale né punti di sella.

$\boxed{D}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.

$\boxed{E}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e due punti di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\mathrm{dom}\,(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x-2)^6 - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (y-1)^4 - 16.$$
Quindi
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} (x-2)^6 = 1 \\ (y-1)^4 = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2 = \pm 1 \\ y-1 = \pm 2 \end{cases} \iff (x,y) = (3,3),\ (3,-1),\ (1,3),\ (1,-1).$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 4 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6(x-2)^5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4(y-1)^3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

Quindi

$$H_f(3,3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}, \qquad H_f(3,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}, \qquad H_f(1,3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}, \qquad H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(3,3)$ è un punto di minimo locale per f, $(1,-1)$ è un punto di massimo locale per f, mentre $(3,-1)$ e $(1,3)$ sono due punti di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Domanda 7. Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ey \le x \le y + e^2 - e, \ y \ge 1\right\}$. Quanto vale l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{2e\left(y+e^2-e\right)}{x^2}\,dx\,dy$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è x-semplice. Infatti

$$ey \le x \le y + e^2 - e \quad \Longrightarrow \quad y \le e$$

e quindi si ha che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le y \le e, \ ey \le x \le y + e^2 - e\right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi x-semplici si ha che

$$\int_\Omega \frac{2e\left(y+e^2-e\right)}{x^2}\,dx\,dy = 2e\int_1^e \left(\int_{ey}^{y+e^2-e} \frac{\left(y+e^2-e\right)}{x^2}\,dx\right)dy = 2e\int_1^e \left(y+e^2-e\right)\left[-\frac{1}{x}\right]_{ey}^{y+e^2-e} dy =$$

$$= -2e\int_1^e \left(y+e^2-e\right)\left(\frac{1}{y+e^2-e} - \frac{1}{ey}\right)dy = -2e\int_1^e \left(1 - \frac{y+e^2-e}{ey}\right)dy =$$

$$= -2e\int_1^e \left(\frac{e-1}{e} - \frac{e-1}{y}\right)dy = -2e(e-1)\int_1^e \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{y}\right)dy = -2e(e-1)\left[\frac{1}{e}y - \log|y|\right]_1^e = 2e-2.$$

La risposta corretta è $2e-2$.

Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(8yz^2 + e^{\cos x}, \ \sin e^y - 8xz^2, \ \log\left(z^4+1\right)\right)$ e la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 + z^2 = 2, \ z \ge x \ge 0\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\Sigma \text{rot}F \cdot n\,d\sigma,$$

dove per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 8yz^2 + e^{\cos x} & \sin e^y - 8xz^2 & \log\left(z^4+1\right) \end{vmatrix} = \left(16xz, \ 16yz, \ -16z^2\right).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - 2y^2} \\ x^2 + 2y^2 \le 2 \\ z \ge x \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - 2y^2} \\ x^2 + y^2 \le 1 \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = \sqrt{2 - x^2 - 2y^2}$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 1, \ x \ge 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x,y) = \left(x,\ y,\ \sqrt{2 - x^2 - 2y^2}\right)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\ 1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2-2y^2}},\ \frac{2y}{\sqrt{2-x^2-2y^2}},\ 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Quindi $N(x,y) = N_\sigma(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2-2y^2}},\ \frac{2y}{\sqrt{2-x^2-2y^2}},\ 1\right)$.

Si ha che

$$\mathrm{rot}F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = \mathrm{rot}F\left(x,\ y,\ \sqrt{8 - 2x^2 - y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2-2y^2}},\ \frac{2y}{\sqrt{2-x^2-2y^2}},\ 1\right) =$$

$$= \left(16x\sqrt{2-x^2-2y^2},\ 16y\sqrt{2-x^2-2y^2},\ -16\left(2 - x^2 - 2y^2\right)\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2-2y^2}},\ \frac{2y}{\sqrt{2-x^2-2y^2}},\ 1\right) =$$

$$= 32\left(x^2 + 2y^2 - 1\right).$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy = \int_K 32\left(x^2 + 2y^2 - 1\right) \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = 32 \int_K \left(x^2 + 2y^2 - 1\right) \, dx \, dy =$$

$$= 32 \int_{K'} \rho\left(\rho^2 \cos^2\vartheta + 2\rho^2 \sin^2\vartheta - 1\right) \, d\rho \, d\vartheta = 32 \int_{K'} \rho\left(\rho^2 \sin^2\vartheta + \rho^2 - 1\right) \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= 32 \int_{K' = [0,1]\times[-\pi/2,\pi/2]} \left[\rho^3 \sin^2\vartheta + \rho\left(\rho^2 - 1\right)\right] \, d\rho \, d\vartheta = 32\left[\left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\vartheta \, d\vartheta\right) + \pi \int_0^1 \rho\left(\rho^2 - 1\right) \, d\rho\right] =$$

$$= 32\left(\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \pi\left[\frac{1}{4}\left(\rho^2 - 1\right)^2\right]_0^1\right) = -4\pi.$$

La risposta corretta è -4π.

Versione V3

Quiz 1. Sia (a_n) una successione reale e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $\lim_n S_n = -5$, allora $\lim_n a_n = 0$.

$\boxed{B}$ Se $\lim_n S_n = -\infty$, allora $\lim_n a_n \neq 0$.

$\boxed{C}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{D}$ Se $\lim_n a_n$ non esiste, allora $\lim_n S_n$ non esiste.

$\boxed{E}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

SVOLGIMENTO

Per definizione se la successione delle sue somme parziali (S_n) della serie di a_n ha limite finito, allora la serie di a_n converge. Di conseguenza per la condizione necessaria risulta che $\lim_n a_n = 0$. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 2. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3^{-n} - 4)^n}{1 - 5^n}$

$\boxed{A}$ diverge positivamente.

$\boxed{B}$ è indeterminata.

$\boxed{C}$ converge a $S > 0$.

$\boxed{D}$ diverge negativamente.

$\boxed{E}$ converge a $S < 0$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3^{-n} - 4)^n}{1 - 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(4 - 3^{-n})^n}{5^n - 1} \right].$$

Quindi è una serie a termini negativi, e di conseguenza converge ad un numero reale minore o uguale a zero oppure diverge negativamente.

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 - 3^{-n})^n}{5^n - 1}$ che è a termini positivi.

Poiché

$$\frac{(4 - 3^{-n})^n}{5^n - 1} \sim \left(\frac{4}{5}\right)^n, \quad n \to +\infty$$

e la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 - 3^{-n})^n}{5^n - 1}$ converge, evidentemente ad un numero $T > 0$ perché almeno un termine della serie è maggiore di zero. Ne segue che la serie data converge ad un numero $S = -T < 0$. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(12x + \frac{xy^4}{\sqrt{1 + x^2 y^4}}, \; \frac{2x^2 y^3}{\sqrt{1 + x^2 y^4}} - 8y \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : \left[0, \sqrt{3}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^5 - \sqrt{3}\, t^4 + t, \; t \sin\left(t - \sqrt{3}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\, t \right)$ vale

$\boxed{A}$ 8. $\boxed{B}$ 4. $\boxed{C}$ 2. $\boxed{D}$ 0. $\boxed{E}$ 16.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{4xy^3 + 2x^3y^7}{(1+x^2y^4)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = 12x + \dfrac{xy^4}{\sqrt{1+x^2y^4}}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \dfrac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}} - 8y. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(12x + \frac{xy^4}{\sqrt{1+x^2y^4}}\right) dx = 6x^2 + \sqrt{1+x^2y^4} + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}} + c'(y) = \frac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}} - 8y \quad \Longrightarrow \quad c'(y) = -8y \quad \Longrightarrow \quad c(y) = -4y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x,y) = 6x^2 + \sqrt{1+x^2y^4} - 4y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(\sqrt{3})) - f(\gamma(0)) = f(\sqrt{3}, 2) - f(0,0) = 8.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 4. Siano $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 = 16, \ y \le 0\right\}$ e $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale della forma $F(x,y) = \varphi(\|(x,y)\|)\,(x,y)$, dove $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

L'integrale di linea di F lungo Γ, percorsa in verso antiorario a partire dal punto $A(-3,0)$, è uguale a

$\boxed{A}$ $-\displaystyle\int_3^5 t\varphi(t)\,dt.$

$\boxed{B}$ $\displaystyle\int_3^5 t\varphi(t)\,dt.$

$\boxed{C}$ $-\displaystyle\int_3^5 \varphi(t)\,dt.$

$\boxed{D}$ $\displaystyle\int_3^5 \varphi(t)\,dt.$

$\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è radiale e continuo, quindi è conservativo. Ne segue che l'integrale di linea di F lungo Γ è uguale a

$$\int_\Gamma F \cdot dP = f(B) - f(A),$$

dove f è un potenziale di F su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e A e B sono rispettivamente i punti inziali e finali della curva Γ. Più precisamente $A = (-3, 0)$ e $B = (5, 0)$.

Un potenziale f di F è $f(x, y) = \Phi(\|(x, y)\|)$, dove $\Phi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una primitiva della funzione $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$. Quindi preso ad esempio $s_0 > 0$ si ha che

$$\Phi(s) = \int_{s_0}^{s} t\varphi(t)\, dt.$$

Quindi

$$\int_\Gamma F \cdot dP = f(B) - f(A) = f(5, 0) - f(-3, 0) = \Phi(\|(5, 0)\|) - \Phi(\|(-3, 0)\|) =$$

$$= \Phi(5) - \Phi(3) = \int_{s_0}^{5} t\varphi(t)\, dt - \int_{s_0}^{3} t\varphi(t)\, dt = \int_{3}^{5} t\varphi(t)\, dt.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Metodo alternativo

Una parametrizzazione di Γ a partire da $A(-3, 0)$ è $\gamma : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (1 + 4\cos t, 4 \sin t)$.

Quindi

$$\int_\Gamma F \cdot dP = \int_\gamma F \cdot dP = \int_{\pi}^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Essendo $F(x, y) = \varphi(\|(x, y)\|)\,(x, y)$ si ha che

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \varphi(\|\gamma(t)\|)\, \gamma(t) \cdot \gamma'(t).$$

Poiché

$$\|\gamma(t)\| = \|(1 + 4\cos t, 4\sin t)\| = \sqrt{(1 + 4\cos t)^2 + 16\sin^2 t} = \sqrt{17 + 8\cos t}$$

si ha che

$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = \varphi(\|\gamma(t)\|)\, \gamma(t)\cdot\gamma'(t) = \varphi(\sqrt{17 + 8\cos t})\, (1+4\cos t, 4\sin t)\cdot(-4\sin t, 4\cos t) = -4\sin t\, \varphi(\sqrt{17 + 8\cos t}).$$

Ne segue che

$$\int_\Gamma F \cdot dP = \int_{\pi}^{2\pi} (-4\sin t)\, \varphi(\sqrt{17 + 8\cos t})\, dt =$$

posto $u = \sqrt{17 + 8\cos t}$, e quindi $u^2 = 17 + 8\cos t$, da cui $u\, du = -4 \sin t\, dt$, si ottiene

$$= \int_{3}^{5} u\varphi(u)\, du.$$

Quiz 5. Sia $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ z = 8e^{x^2+y^2} - 3, \ \ x^2 + y^2 \le 4, \ \ x \le 0\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{4\log\left[\frac{1}{8}(z+3)\right]}{\sqrt{256\,(x^2+y^2)\; e^{2(x^2+y^2)} + 1}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ 8π.

$\boxed{B}$ $\dfrac{32}{3}\pi$.

$\boxed{C}$ $\dfrac{16}{3}\pi$.

$\boxed{D}$ 4π.

$\boxed{E}$ 16π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 8e^{x^2+y^2} - 3$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2+y^2 \le 4, \ \ x \le 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,8e^{x^2+y^2} - 3\right)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{4\log\left[\frac{1}{8}(z+3)\right]}{\sqrt{256\left(x^2+y^2\right)\, e^{2(x^2+y^2)} + 1}}$, per definizione

$$\int_\Sigma \frac{4\log\left[\frac{1}{8}(z+3)\right]}{\sqrt{256\left(x^2+y^2\right)\, e^{2(x^2+y^2)} + 1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y)) \|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y) = \dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y)$.

Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(16x\, e^{x^2+y^2},\ 16y\, e^{x^2+y^2},\ 1\right).$$

e quindi

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{256\left(x^2+y^2\right)\, e^{2(x^2+y^2)} + 1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x,y)) = f\left(x,y,8e^{x^2+y^2} - 3\right) = \frac{4\log\left(e^{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{256\left(x^2+y^2\right)\, e^{2(x^2+y^2)} + 1}} = \frac{4\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{256\left(x^2+y^2\right)\, e^{2(x^2+y^2)} + 1}},$$

si ha che

$$\int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K \frac{4\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{256\left(x^2+y^2\right)\, e^{2(x^2+y^2)} + 1}} \cdot \sqrt{256\left(x^2+y^2\right)\, e^{2(x^2+y^2)} + 1}\, dx\, dy = 4\int_K \left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 4\int_{K'} \rho^3\, d\rho\, d\vartheta =$$

dove $K' = [0,2] \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, e quindi si ottiene

$$= 4\pi \int_0^2 \rho^3\, d\rho = 4\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 = 16\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 6. Sia $f(x,y) = 6 + 16x + y - \dfrac{1}{5}(x+1)^5 - \dfrac{1}{7}(y+2)^7$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e due punti di sella.

$\boxed{B}$ La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha né punti di massimo locale né punti di sella.

$\boxed{C}$ La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha né punti di minimo locale né punti di sella.

$\boxed{D}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.

$\boxed{E}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\mathrm{dom}\,(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 16 - (x+1)^4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - (y+2)^6.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} (x+1)^4 = 16 \\ \\ (y+2)^6 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+1 = \pm 2 \\ \\ y+2 = \pm 1 \end{cases} \iff (x,y) = (1,-1),\ (1,-3),\ (-3,-1),\ (-3,-3).$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 4 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4(x+1)^3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6(y+2)^5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

Quindi

$$H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} -32 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad H_f(1,-3) = \begin{pmatrix} -32 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad H_f(-3,-1) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad H_f(-3,-3) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(-3,-3)$ è un punto di minimo locale per f, $(1,-1)$ è un punto di massimo locale per f, mentre $(1,-3)$ e $(-3,-1)$ sono due punti di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Domanda 7. Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -ex \le y \le e^2 - e - x,\ x \le -1\right\}$.

Quanto vale l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{3e\left(x - e^2 + e\right)}{y^2}\, dx\, dy$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è y-semplice. Infatti

$$-ex \le y \le e^2 - e - x \quad \Longrightarrow \quad x \ge -e$$

e quindi si ha che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -e \le x \le -1,\ -ex \le y \le e^2 - e - x\right\}.$$

Applicando la formula di integrazione per gli insiemi y-semplici, si ha che

$$\int_\Omega \frac{3e\left(x - e^2 + e\right)}{y^2}\, dx\, dy = 3e \int_{-e}^{-1} \left(\int_{-ex}^{e^2 - e - x} \frac{\left(x - e^2 + e\right)}{y^2}\, dy \right) dx = 3e \int_{-e}^{-1} (x - e^2 + e) \left[-\frac{1}{y} \right]_{-ex}^{e^2 - e - x} dx =$$

$$= -3e \int_{-e}^{-1} (x - e^2 + e) \left(\frac{1}{e^2 - e - x} + \frac{1}{ex} \right) dx = -3e \int_{-e}^{-1} \left(\frac{x - e^2 + e}{ex} - 1 \right) dx =$$

$$= -3e \int_{-e}^{-1} \left(-\frac{e-1}{e} - \frac{e-1}{x} \right) dx = 3e(e-1) \int_{-e}^{-1} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{x} \right) dx = 3e(e-1) \left[\frac{1}{e}x + \log|x| \right]_{-e}^{-1} = 3 - 3e.$$

La risposta corretta è $3 - 3e$.

Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\sin\left(e^x\right) - \frac{3}{2}yz^2,\ \frac{3}{2}xz^2 - e^{\cos y},\ e^{z^2} + 3 \right)$ e la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 8,\ z \ge y \ge 0\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot n\, d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin(e^x) - \frac{3}{2}yz^2 & \frac{3}{2}xz^2 - e^{\cos y} & e^{z^2} + 3 \end{vmatrix} = \left(-3xz,\ -3yz,\ 3z^2\right).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} z = \sqrt{8 - 2x^2 - y^2} \\ 2x^2 + y^2 \le 8 \\ z \ge y \\ y \ge 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} z = \sqrt{8 - 2x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 \le 4 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = \sqrt{8 - 2x^2 - y^2}$, dove

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 4,\ \ y \ge 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = \left(x,\ y,\ \sqrt{8 - 2x^2 - y^2}\right)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y)\ dx\, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y),\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y),\ 1\right) = \left(\frac{2x}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Quindi $N(x, y) = N_\sigma(x, y) = \left(\frac{2x}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ 1\right)$.

Si ha che

$$\operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) = \operatorname{rot} F\left(x,\ y,\ \sqrt{8 - 2x^2 - y^2}\right) \cdot \left(\frac{2x}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ 1\right) =$$

$$= \left(-3x\sqrt{8 - 2x^2 - y^2},\ -3y\sqrt{8 - 2x^2 - y^2},\ 3\left(8 - 2x^2 - y^2\right)\right) \cdot \left(\frac{2x}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{8 - 2x^2 - y^2}},\ 1\right) =$$

$$= 6\left(4 - 2x^2 - y^2\right).$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y)\ dx\, dy = \int_K 6\left(4 - 2x^2 - y^2\right)\ dx\, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = 6\int_K \left(4 - 2x^2 - y^2\right)\ dx\, dy =$$

$$= 6\int_{K'} \rho\left(4 - 2\rho^2\cos^2\vartheta - \rho^2\sin^2\vartheta\right)\ d\rho\, d\vartheta = 6\int_{K'} \rho\left(4 - \rho^2 - \rho^2\cos^2\vartheta\right)\ d\rho\, d\vartheta =$$

$$= 6\int_{K' = [0,2]\times[0,\pi]} \left[\rho\left(4 - \rho^2\right) - \rho^3\cos^2\vartheta\right]\ d\rho\, d\vartheta = 6\left[\left(\pi\int_0^2 \rho\left(4 - \rho^2\right)\, d\rho - \int_0^2 \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_0^\pi \cos^2\vartheta\, d\vartheta\right)\right] =$$

$$= 6\left(\pi\left[-\frac{1}{4}\left(4 - \rho^2\right)^2\right]_0^2 - \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2\left[\frac{1}{2}(\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta)\right]_0^\pi\right) = 12\pi.$$

La risposta corretta è 12π.

Versione V4

Quiz 1. Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; z = 4 - 10e^{x^2+y^2}, \;\; x^2+y^2 \leq 3, \;\; y \leq 0\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{12 \log\left[\frac{1}{10}(4-z)\right]}{\sqrt{400\,(x^2+y^2)\; e^{2(x^2+y^2)}+1}}\,d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ $\frac{27}{2}\pi$. $\boxed{B}$ $6\sqrt{3}\,\pi$. $\boxed{C}$ 27π. $\boxed{D}$ $12\sqrt{3}\pi$. $\boxed{E}$ 9π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 4 - 10e^{x^2+y^2}$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2+y^2 \leq 3, \;\; y \leq 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,4-10e^{x^2+y^2}\right)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{12 \log\left[\frac{1}{10}(4-z)\right]}{\sqrt{400\,(x^2+y^2)\; e^{2(x^2+y^2)}+1}}$, per definizione

$$\int_\Sigma \frac{12 \log\left[\frac{1}{10}(4-z)\right]}{\sqrt{400\,(x^2+y^2)\; e^{2(x^2+y^2)}+1}}\,d\sigma = \int_\Sigma f\,d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\|N(x,y)\|\,dx\,dy,$$

dove $N(x,y) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$.

Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(20x\,e^{x^2+y^2}, \;\; 20y\,e^{x^2+y^2}, \;\; 1\right).$$

e quindi

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{400\,(x^2+y^2)\; e^{2(x^2+y^2)}+1}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x,y)) = f\left(x,y,4-10e^{x^2+y^2}\right) = \frac{12\log\left(e^{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{400\,(x^2+y^2)\; e^{2(x^2+y^2)}+1}} = \frac{12\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{400\,(x^2+y^2)\; e^{2(x^2+y^2)}+1}},$$

si ha che

$$\int_\Sigma f\,d\sigma = \int_K \frac{12\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{400\,(x^2+y^2)\; e^{2(x^2+y^2)}+1}} \cdot \sqrt{400\,(x^2+y^2)\; e^{2(x^2+y^2)}+1}\,dx\,dy = 12\int_K \left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha

$$= 12\int_{K'} \rho^3\,d\rho\,d\vartheta =$$

dove $K' = [0,\sqrt{3}] \times [\pi, 2\pi]$, e quindi si ottiene

$$= 12\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3\,d\rho = 12\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{\sqrt{3}} = 27\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 2. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(\frac{2x^3y^2}{\sqrt{16+x^4y^2}} + 20x,\ \frac{x^4y}{\sqrt{16+x^4y^2}} - 14y \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : \left[0, \sqrt{3}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t \sin\left(t - \sqrt{3}\right) + t,\ t^9 - \sqrt{3}\, t^8 + \frac{\sqrt{3}}{3}\, t \right)$ vale

$\boxed{A}$ 0. $\boxed{B}$ 8. $\boxed{C}$ 24. $\boxed{D}$ 4. $\boxed{E}$ 12.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^7y^3 + 64x^3y}{(16+x^4y^2)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \dfrac{2x^3y^2}{\sqrt{16+x^4y^2}} + 20x, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \dfrac{x^4y}{\sqrt{16+x^4y^2}} - 14y. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(\frac{2x^3y^2}{\sqrt{16+x^4y^2}} + 20x \right) dx = \sqrt{16+x^4y^2} + 10x^2 + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4y}{\sqrt{16+x^4y^2}} + c'(y) = \frac{x^4y}{\sqrt{16+x^4y^2}} - 14y \quad \Longrightarrow \quad c'(y) = -14y \quad \Longrightarrow \quad c(y) = -7y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x,y) = \sqrt{16+x^4y^2} + 10x^2 - 7y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(\sqrt{3})) - f(\gamma(0)) = f(\sqrt{3}, 1) - f(0,0) = 24.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 3. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(6^{-n} - 5)^n}{3 - 4^n}$

$\boxed{A}$ converge a $S < 0$.

$\boxed{B}$ converge a $S > 0$.

$\boxed{C}$ diverge negativamente.

$\boxed{D}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ è indeterminata.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(6^{-n} - 5)^n}{3 - 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(5 - 6^{-n})^n}{4^n - 3} \right].$$

Quindi è una serie a termini negativi, e di conseguenza converge ad un numero reale minore o uguale a zero oppure diverge negativamente.

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-6^{-n})^n}{4^n-3}$ che è a termini positivi.

Poiché

$$\frac{(5-6^{-n})^n}{4^n-3} \sim \left(\frac{5}{4}\right)^n, \qquad n \to +\infty$$

e la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ diverge, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-6^{-n})^n}{4^n-3}$ diverge positivamente e quindi la serie data diverge negativamente. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 4. Sia (a_n) una successione reale e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{B}$ Se $\lim_n S_n$ non esiste, allora $\lim_n a_n$ non esiste.

$\boxed{C}$ Se $\lim_n a_n$ non esiste, allora $\lim_n S_n$ non esiste.

$\boxed{D}$ Se $\lim_n a_n = -6$, allora $\lim_n S_n = -\infty$.

$\boxed{E}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

SVOLGIMENTO

Se $\lim_n a_n = -6$, allora la successione (a_n) è negativa da un certo $n_0 \in \mathbb{N}$ in poi. Quindi la serie di a_n è a termini negativi e non verifica la condizione necessaria. Ne segue che la serie di a_n diverge negativamente e di conseguenza $\lim_n S_n = -\infty$. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 5. Sia $f(x,y) = 10 + x + 16y - \frac{1}{7}(x+2)^7 - \frac{1}{5}(y+1)^5$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ La funzione f ha un punto di massimo locale e non ha né punti di minimo locale né punti di sella.

$\boxed{B}$ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{C}$ La funzione f ha un punto di minimo locale e non ha né punti di massimo locale né punti di sella.

$\boxed{D}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e un punto di sella.

$\boxed{E}$ La funzione f ha un punto di massimo locale, un punto di minimo locale e due punti di sella.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ e che f è di classe C^2 su $\operatorname{dom}(f)$. Pertanto i punti di massimo e di minimo locale di f vanno cercati fra i punti stazionari.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - (x+2)^6, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 16 - (y+1)^4.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} (x+2)^6 = 1 \\ (y+1)^4 = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2 = \pm 1 \\ y+1 = \pm 2 \end{cases} \iff (x,y) = (-1,1),\ (-1,-3),\ (-3,1),\ (-3,-3).$$

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti 4 punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6(x+2)^5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4(y+1)^3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

Quindi

$$H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}, \quad H_f(-1,-3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}, \quad H_f(-3,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}, \quad H_f(-3,-3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(-3,-3)$ è un punto di minimo locale per f, $(-1,1)$ è un punto di massimo locale per f, mentre $(-1,-3)$ e $(-3,1)$ sono due punti di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 6. Siano $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 = 25, \ y \le 0\}$ e $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale della forma $F(x,y) = \varphi(\|(x,y)\|)\,(x,y)$, dove $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

L'integrale di linea di F lungo Γ, percorsa in verso orario a partire dal punto $A(4,0)$, è uguale a

$\boxed{A}$ $-\displaystyle\int_4^6 \varphi(t)\,dt.$

$\boxed{B}$ $\displaystyle\int_4^6 \varphi(t)\,dt.$

$\boxed{C}$ $-\displaystyle\int_4^6 t\varphi(t)\,dt.$

$\boxed{D}$ 0.

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_4^6 t\varphi(t)\,dt.$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è radiale e continuo, quindi è conservativo. Ne segue che l'integrale di linea di F lungo Γ è uguale a

$$\int_\Gamma F \cdot dP = f(B) - f(A),$$

dove f è un potenziale di F su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e A e B sono rispettivamente i punti inziali e finali della curva Γ. Più precisamente $A = (4,0)$ e $B = (-6,0)$.

Un potenziale f di F è $f(x,y) = \Phi(\|(x,y)\|)$, dove $\Phi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una primitiva della funzione $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$. Quindi preso ad esempio $s_0 > 0$ si ha che

$$\Phi(s) = \int_{s_0}^s t\varphi(t)\,dt.$$

Quindi

$$\int_\Gamma F \cdot dP = f(B) - f(A) = f(-6,0) - f(4,0) = \Phi(\|(-6,0)\|) - \Phi(\|(4,0)\|) =$$

$$= \Phi(6) - \Phi(4) = \int_{s_0}^6 t\varphi(t)\,dt - \int_{s_0}^4 t\varphi(t)\,dt = \int_4^6 t\varphi(t)\,dt.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Metodo alternativo

Una parametrizzazione di Γ a partire da $A(4,0)$ è $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (-1 + 5\cos t, -5\sin t)$.

Quindi

$$\int_\Gamma F \cdot dP = \int_\gamma F \cdot dP = \int_\pi^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Essendo $F(x,y) = \varphi(\|(x,y)\|)\,(x,y)$ si ha che

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \varphi(\|\gamma(t)\|)\,\gamma(t) \cdot \gamma'(t).$$

Poiché
$$\|\gamma(t)\| = \|(-1+5\cos t, -5\sin t)\| = \sqrt{(-1+5\cos t)^2 + 25\sin^2 t} = \sqrt{26-10\cos t}$$
si ha che
$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = \varphi(\|\gamma(t)\|)\,\gamma(t)\cdot\gamma'(t) = \varphi(\sqrt{26-10\cos t})\,(-1+5\cos t, -5\sin t)\cdot(-5\sin t, -5\cos t) =$$
$$= 5\sin t\,\varphi(\sqrt{26-10\cos t}).$$
Ne segue che
$$\int_\Gamma F\cdot dP = \int_0^\pi 5\sin t\,\varphi(\sqrt{26-10\cos t})\,dt =$$
posto $u = \sqrt{26-10\cos t}$, e quindi $u^2 = 26-10\cos t$, da cui $u\,du = 5\sin t\,dt$, si ottiene
$$= \int_4^6 u\varphi(u)\,du.$$

Domanda 7. Sia $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ -ey \le x \le e^2 - e - y,\ \ y \le -1\}$.

Quanto vale l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{4e\left(y-e^2+e\right)}{x^2}\,dx\,dy$?

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è x-semplice. Infatti
$$-ey \le x \le e^2 - e - y \quad\Longrightarrow\quad y \ge -e$$
e quindi si ha che
$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ -e\le y\le -1,\ \ -ey\le x\le e^2-e-y\right\}.$$
Applicando la formula di integrazione per gli insiemi x-semplici, si ha che
$$\int_\Omega \frac{4e\left(y-e^2+e\right)}{x^2}\,dx\,dy = 4e\int_{-e}^{-1}\left(\int_{-ey}^{e^2-e-y}\frac{\left(y-e^2+e\right)}{x^2}\,dx\right)dy = 4e\int_{-e}^{-1}(y-e^2+e)\left[-\frac{1}{x}\right]_{-ey}^{e^2-e-y}dy =$$
$$= -4e\int_{-e}^{-1}(y-e^2+e)\left(\frac{1}{e^2-e-y}+\frac{1}{ey}\right)dy = -4e\int_{-e}^{-1}\left(\frac{y-e^2+e}{ey}-1\right)dy =$$
$$= -4e\int_{-e}^{-1}\left(-\frac{e-1}{e}-\frac{e-1}{y}\right)dy = 4e(e-1)\int_{-e}^{-1}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{y}\right)dy = 4e(e-1)\left[\frac{1}{e}y+\log|y|\right]_{-e}^{-1} = 4-4e.$$
La risposta corretta è $4-4e$.

Domanda 8. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(e^{\cos x}-8yz^2,\ 8xz^2-\sin e^y,\ \log\left(z^6+2\right)\right)$ e la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ \ x^2+2y^2+z^2=2,\ \ z\ge x\ge 0\right\}$.

Quanto vale la circuitazione di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z?

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F=(f_1,f_2,f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che
$$\int_{\partial\Sigma} F\cdot dP = \int_\Sigma \mathrm{rot}F\cdot n\,d\sigma,$$
dove per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$
$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{\cos x}-8yz^2 & 8xz^2-\sin e^y & \log\left(z^6+2\right) \end{vmatrix} = \left(-16xz,\ -16yz,\ 16z^2\right).$$

Dalle relazioni che definiscono Σ deduciamo che

$$\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - 2y^2} \\ x^2 + 2y^2 \le 2 \\ z \ge x \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - 2y^2} \\ x^2 + y^2 \le 1 \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Quindi la superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - 2y^2}$, dove

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 \le 1, \ \ x \ge 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = \left(x,\ y,\ \sqrt{2 - x^2 - 2y^2}\right)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \mathrm{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \ dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y),\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y),\ 1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{2 - x^2 - 2y^2}},\ \frac{2y}{\sqrt{2 - x^2 - 2y^2}},\ 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Quindi $N(x, y) = N_\sigma(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{2 - x^2 - 2y^2}},\ \frac{2y}{\sqrt{2 - x^2 - 2y^2}},\ 1\right)$.

Si ha che

$$\mathrm{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) = \mathrm{rot}F\left(x,\ y,\ \sqrt{2 - x^2 - 2y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2 - x^2 - 2y^2}},\ \frac{2y}{\sqrt{2 - x^2 - 2y^2}},\ 1\right) =$$

$$= \left(-16x\sqrt{2 - x^2 - 2y^2},\ -16y\sqrt{2 - x^2 - 2y^2},\ 16\left(2 - x^2 - 2y^2\right)\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2 - x^2 - 2y^2}},\ \frac{2y}{\sqrt{2 - x^2 - 2y^2}},\ 1\right) =$$

$$= 32\left(1 - x^2 - 2y^2\right).$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \mathrm{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \ dx \, dy = \int_K 32\left(1 - x^2 - 2y^2\right) \ dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari centrate nell'origine otteniamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = 32 \int_K \left(1 - x^2 - 2y^2\right) \ dx \, dy =$$

$$= 32 \int_{K'} \rho\left(1 - \rho^2 \cos^2\vartheta - 2\rho^2 \sin^2\vartheta\right) \ d\rho \, d\vartheta = 32 \int_{K'} \rho\left(1 - \rho^2 - \rho^2 \sin^2\vartheta\right) \ d\rho \, d\vartheta =$$

$$= 32 \int_{K' = [0,1] \times [-\pi/2, \pi/2]} \left[\rho\left(1 - \rho^2\right) - \rho^3 \sin^2\vartheta\right] \ d\rho \, d\vartheta =$$

$$= 32 \left[\left(\pi \int_0^1 \rho\left(1 - \rho^2\right) \ d\rho - \int_0^1 \rho^3 \, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\vartheta \, d\vartheta\right)\right] =$$

$$= 32\left(\pi\left[-\frac{1}{4}\left(1 - \rho^2\right)^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) = 4\pi.$$

La risposta corretta è 4π.