Svolgimento dei quiz dell'esame di Analisi Matematica II del 24 gennaio 2022 ore 17

Versione: V1

Quiz 1. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se f non è differenziabile in (x_0, y_0), allora f non è continua in (x_0, y_0).

$\boxed{B}$ Se esistono $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e non sono continue in (x_0, y_0), allora f non è differenziabile in (x_0, y_0).

$\boxed{C}$ Se per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ esiste $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$, allora f è continua in (x_0, y_0).

$\boxed{D}$ Se esiste $\nabla f(x_0, y_0)$, allora f è continua in (x_0, y_0).

$\boxed{E}$ Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Infatti, esistono funzioni continue in un punto che non sono differenziabili in quel punto: per esempio $f(x, y) = |x| + |y|$ in $(x_0, y_0) = (0, 0)$, e quindi $\boxed{\text{A}}$ è errata.

Esistono anche funzioni che ammettono le derivate parziali in tutti i punti e che in un punto non sono continue ma che in quel punto sono diferenzialibili: per esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0, 0)$, e quindi $\boxed{\text{B}}$ è errata.

Inoltre, esistono funzioni che ammettono gradiente in un punto ma che non sono continue in quel punto, o che ammettono la derivata in un punto rispetto a qualunque vettore ma che non sono continue in quel punto: per esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0, 0)$, e di conseguenza $\boxed{\text{C}}$ e $\boxed{\text{D}}$ sono errate.

Quiz 2. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(2 + \dfrac{12\, e^x}{1 + (e^x + e^y - 1)^2},\ 10y + \dfrac{12\, e^y}{1 + (e^x + e^y - 1)^2}\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 7] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^9 - 7t^8 + \dfrac{t}{7} \log \sqrt{3},\ \sin\left[(t - 7)\left(e^{1+t} - e\right)\right]\right)$ vale

$\boxed{A}$ $-\log 3 - \pi$.

$\boxed{B}$ $\log 3 + \pi$.

$\boxed{C}$ $\pi - \log 3$.

$\boxed{D}$ $\log 3 - \pi$.

$\boxed{E}$ $2 \log 3 - \pi$.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{24\, e^{x+y}(e^x + e^y - 1)}{\left[1 + (e^x + e^y - 1)^2\right]^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su Ω, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 2 + \dfrac{12\, e^x}{1 + (e^x + e^y - 1)^2}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 10y + \dfrac{12\, e^y}{1 + (e^x + e^y - 1)^2}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y)=\int\left(2+\frac{12\,e^x}{1+(e^x+e^y-1)^2}\right)\,dx=2x+12\arctan\left(e^x+e^y-1\right)+c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{12\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2}+c'(y)=10y+\frac{12\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2}\quad\Longrightarrow\quad c'(y)=10y\quad\Longrightarrow\quad c(y)=5y^2+k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su Ω è

$$f(x,y)=2x+5y^2+12\arctan\left(e^x+e^y-1\right)+k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F\cdot dP=f(\gamma(7))-f(\gamma(0))=f\left(\log\sqrt{3},0\right)-f(0,0)=\log 3+\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 3. Siano $a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, $b\in\left(1,\sqrt{2a}\right)$ e $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{1}{2}x^2\le y\le\sqrt{2x},\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\right\}$. L'area di Ω vale

$\boxed{A}$ $ab-\frac{1}{3}\left(a^3+b^3\right)$.

$\boxed{B}$ $ab+\frac{2}{3}a^{3/2}-\frac{1}{3}a^3$.

$\boxed{C}$ $ab+\frac{1}{3}\left(a^3+b^3\right)$.

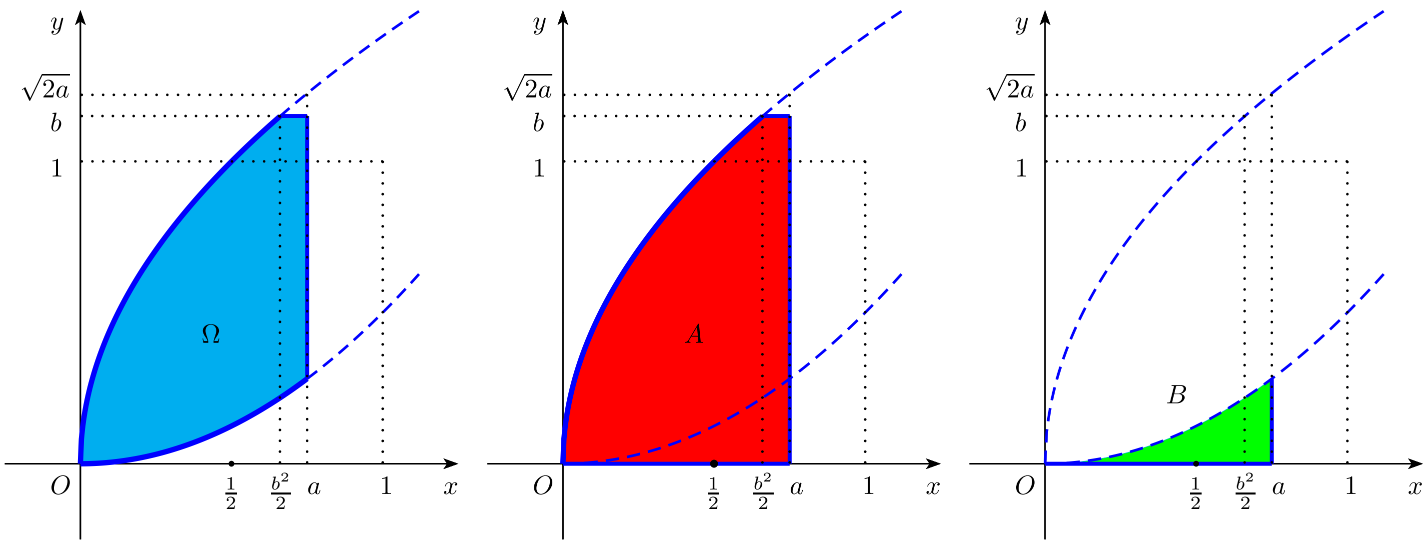
$\boxed{D}$ $ab-\frac{1}{6}\left(a^3+b^3\right)$.

$\boxed{E}$ $ab+\frac{1}{6}\left(a^3+b^3\right)$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\Omega=A\setminus B$, con $B\subseteq A$, dove

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{1}{2}y^2\le x\le a,\ 0\le y\le b\right\},\qquad B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y<\frac{1}{2}x^2,\ 0\le x\le a\right\}.$$



Quindi $m(\Omega)=m(A)-m(B)$. Essendo A un insieme x-semplice e B un insieme y-semplice, si ha che

$$m(A)=\int_0^b\left(\int_{\frac{1}{2}y^2}^a 1\,dx\right)\,dy=\int_0^b\left(a-\frac{1}{2}y^2\right)\,dy=\left[ay-\frac{1}{6}y^3\right]_0^b=ab-\frac{1}{6}b^3,$$

$$m(B)=\int_0^a\left(\int_0^{\frac{1}{2}x^2}1\,dy\right)\,dx=\int_0^a\frac{1}{2}x^2\,dx=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^a=\frac{1}{6}a^3.$$

Ne segue che

$$m(\Omega) = m(A) - m(B) = ab - \frac{1}{6}\left(a^3 + b^3\right).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 4. Siano $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale continuo e conservativo, $\Gamma_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1, \ y \geq 0\right\}$, $\Gamma_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4x^2 + y^2 = 4, \ y \geq 0\right\}$, $\Gamma_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1, \ y = x^2 - 1\right\}$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tre curve parametriche regolari che parametrizzano rispettivamente $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ inducendo su di esse un verso di percorrenza antiorario. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$\boxed{A}$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP - \int_{\gamma_3} F \cdot dP.$

$\boxed{B}$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_3} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP.$

$\boxed{C}$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP + \int_{\gamma_3} F \cdot dP.$

$\boxed{D}$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_3} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP\right).$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_2} F \cdot dP - \int_{\gamma_3} F \cdot dP\right).$

SVOLGIMENTO

Poiché F è conservativo su $\mathbb{R}^2$, denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = f(-1, 0) - f(1, 0), \qquad \int_{\gamma_2} F \cdot dP = f(-1, 0) - f(1, 0), \qquad \int_{\gamma_3} F \cdot dP = f(1, 0) - f(-1, 0).$$

Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP, \qquad \int_{\gamma_1} F \cdot dP = -\int_{\gamma_3} F \cdot dP.$$

Ne segue che

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_2} F \cdot dP - \int_{\gamma_3} F \cdot dP\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_1} F \cdot dP\right) = \int_{\gamma_1} F \cdot dP.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 5. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\left(4n^2 - n^3 \sin \frac{4}{n}\right)\left(5e^{-n} + e^{1/n} - 1\right)}{(n+1)\log n - n \log (n+1)}$

$\boxed{A}$ converge a 0.

$\boxed{B}$ converge ad un numero reale $S > 0$.

$\boxed{C}$ converge ad un numero reale $S < 0$.

$\boxed{D}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Utilizzando gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni $\sin x$ ed e^x si ha che

$$\left(4n^2 - n^3 \sin \frac{4}{n}\right)\left(5e^{-n} + e^{1/n} - 1\right) = n^2 \left[4 - n\left(\frac{4}{n} - \frac{32}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]\left[5e^{-n} + \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right] =$$

$$= n^2 \left[\frac{32}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[5e^{-n} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

essendo $e^{-n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \to +\infty$ si ottiene

$$= \left[\frac{32}{3} + o(1)\right]\left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{32}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{6n}, \qquad n \to +\infty.$$

Inoltre

$$(n+1)\log n - n\log(n+1) = \log n^{n+1} - \log(n+1)^n = \log\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} = \log\left[n\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right] =$$

$$= \log n + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \log n + \log\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \log n - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \log n, \qquad n\to+\infty.$$

Quindi

$$\frac{\left(4n^2 - n^3\sin\frac{4}{n}\right)\left(5e^{-n}+e^{1/n}-1\right)}{(n+1)\log n - n\log(n+1)} \sim \frac{32}{3n\log n}, \qquad n\to+\infty.$$

Quindi la serie data è a termini positivi. Per il Criterio di Maclaurin la serie $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ diverge. Per il Criterio del confronto asintotico la serie data diverge positivamente. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 6. Siano $f(x,y) = x^{11} + 12x - y^5 - 8y$, $\quad P(1,-1)$, $Q(1,-2)$, $S(1,1)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ I punti P, Q, S sono di sella per f.

$\boxed{B}$ I punti P, Q sono di massimo locale per f.

$\boxed{C}$ Il punto S è di massimo locale per f.

$\boxed{D}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{E}$ I punti P, Q sono di minimo locale per f.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, o critici, ovvero i punti $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 11x^{10} + 12, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -5y^4 - 8.$$

Poiché $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si ha che f non ha punti stazionari in $\mathbb{R}^2$ e di conseguenza non ha né punti di estremo né punti di sella.

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 7. Sia $R>0$. Il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,x,\ \frac{2+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,y,\ \frac{2+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,z\right)$$

dal bordo di $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2\le R^2\right\}$ vale

$\boxed{A}$ $4\pi\left(R^3+2\right)$.

$\boxed{B}$ $4\pi\left(R^3+1\right)$.

$\boxed{C}$ $4\pi R^3$.

$\boxed{D}$ $2\pi R^3$.

$\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,x,\ \frac{2+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,y,\ \frac{2+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,z\right) =$$

$$= \left(\left[\frac{2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+1\right]x,\ \left[\frac{2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+1\right]y,\ \left[\frac{2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+1\right]z\right) =$$

$$= \left[\frac{2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+1\right](x,y,z).$$

Osserviamo che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ e quindi $\Omega \not\subseteq \mathrm{dom}\,(F)$ mentre $\partial\Omega \subseteq \mathrm{dom}\,(F)$.

Il bordo di Ω è la superficie sferica di centro l'origine e raggio R nello spazio $\mathbb{R}^3$. Una parametrizzazione di $\partial\Omega$ è $\sigma : [0,\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definta da

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \big(R \sin\vartheta \cos\varphi,\ R \sin\vartheta \sin\varphi,\ R \cos\vartheta\big).$$

Quindi, posto $K = [0,\pi] \times [0, 2\pi]$, si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) \, d\vartheta \, d\varphi,$$

dove N è un vettore normale a $\partial\Omega$ uscente da Ω. Un vettore normale a $\partial\Omega$ è

$$N_\sigma(\vartheta, \varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta, \varphi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta, \varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & -R\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \big(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi,\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi,\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\big).$$

Osserviamo che questo vettore è uscente da Ω. Infatti, scelto ad esempio $(\vartheta_0, \varphi_0) = (\pi/2, \pi/2)$, si ha che

$$\sigma(\vartheta_0, \varphi_0) = \sigma(\pi/2, \pi/2) = (0, R, 0), \qquad N_\sigma(\vartheta_0, \varphi_0) = N_\sigma(\pi/2, \pi/2) = (0, R^2, 0).$$

Disegnando la sfera Ω e applicando il vettore $N_\sigma(\vartheta_0, \varphi_0)$ nel punto $\sigma(\vartheta_0, \varphi_0)$ si osserva che questo vettore punta verso l'esterno di Ω. Quindi prendiamo $N(\vartheta, \varphi) = N_\sigma(\vartheta, \varphi)$.

Si ha che

$$F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) = F\big(R \sin\vartheta \cos\varphi,\ R \sin\vartheta \sin\varphi,\ R \cos\vartheta\big) \cdot \big(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi,\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi,\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\big) =$$

$$= \left[\frac{2}{R^3} + 1\right] \big(R \sin\vartheta \cos\varphi,\ R \sin\vartheta \sin\varphi,\ R \cos\vartheta\big) \cdot \big(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi,\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi,\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\big) =$$

$$= \left[\frac{2}{R^3} + 1\right] R^3 \sin\vartheta = (R^3 + 2) \sin\vartheta.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) \, d\vartheta \, d\varphi = \int_K \big(R^3 + 2\big) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi =$$

essendo K un rettangolo con lati paralleli agli assi ϑ e φ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ϑ e una di φ, si ottiene

$$= 2\pi \left(R^3 + 2\right) \int_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta = 4\pi \left(R^3 + 2\right).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 8. Sia $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 - 2 \le y \le \sqrt{x^2 + z^2},\ x^2 + z^2 \le 9\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Omega \big(7x + 3y + 9z + 8xz\big) \, dx \, dy \, dz$ vale

$\boxed{A}$ 8π.

$\boxed{B}$ 2π.

$\boxed{C}$ 4π.

$\boxed{D}$ $\frac{16}{3}\pi$.

$\boxed{E}$ $\frac{32}{3}\pi$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che l'insieme Ω è simmetrico sia rispetto al piano xy che rispetto al piano yz. Infatti, se $(x, y, z) \in \Omega$, allora anche $(x, y, -z) \in \Omega$ e $(-x, y, z) \in \Omega$. Poiché la funzione $f(x, y, z) = 7x + 9z + 8xz$ è dispari sia rispetto alla variabile x che rispetto alla variabile z, il suo integrale su Ω è zero. Ne segue che

$$\int_\Omega \big(7x + 3y + 9z + 8xz\big) \, dx \, dy \, dz = \int_\Omega 3y \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse y si ottiene

$$= \int_{\Omega'} 3y\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : \ \ \rho^2 - 2 \le y \le \rho, \ \ 0 \le \rho \le 2, \ \ 0 \le \vartheta \le 2\pi\}$. Integrando prima per fili parallelli all'asse ϑ si ottiene

$$\int_\Omega (7x + 3y + 9z + 8xz)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} 3y\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dy = 6\pi \int_0^2 \rho \left(\int_{\rho^2-2}^{\rho} y\, dy \right) d\rho = 6\pi \int_0^2 \rho \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\rho^2-2}^{\rho} d\rho =$$

$$= 3\pi \int_0^2 \rho \left[\rho^2 - \left(\rho^2 - 2\right)^2 \right] d\rho = 3\pi \int_0^2 \left[\rho^3 - \rho \left(\rho^2 - 2\right)^2 \right] d\rho = 3\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\left(\rho^2 - 2\right)^3 \right]_0^2 = 4\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Versione V2

Quiz 1. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(10x + \frac{12\,e^x}{1+(e^x+e^y-1)^2},\ 2 + \frac{12\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2}\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0,7] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(\sin\left[(t-7)\left(e^{1+t}-e\right)\right],\ t^9 - 7t^8 + \frac{t}{7}\log\sqrt{3}\right)$ vale

$\boxed{A}$ $\pi - \log 3$.

$\boxed{B}$ $-\log 3 - \pi$.

$\boxed{C}$ $2\log 3 - \pi$.

$\boxed{D}$ $\log 3 + \pi$.

$\boxed{E}$ $\log 3 - \pi$.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{24\,e^{x+y}(e^x+e^y-1)}{\left[1+(e^x+e^y-1)^2\right]^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su Ω, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = 10x + \dfrac{12\,e^x}{1+(e^x+e^y-1)^2}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = 2 + \dfrac{12\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(10x + \frac{12\,e^x}{1+(e^x+e^y-1)^2}\right) dx = 5x^2 + 12\arctan\left(e^x+e^y-1\right) + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{12\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2} + c'(y) = 2 + \frac{12\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2} \quad\Longrightarrow\quad c'(y) = 2 \quad\Longrightarrow\quad c(y) = 2y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su Ω è

$$f(x,y) = 5x^2 + 2y + 12\arctan\left(e^x+e^y-1\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(7)) - f(\gamma(0)) = f\left(0, \log\sqrt{3}\right) - f(0,0) = \log 3 + \pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 2. Siano $a \in (1,2)$, $b \in \left(2, 2\sqrt{a}\right)$ e $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{4}y^2 \le x \le 2\sqrt{y},\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\right\}$. L'area di Ω vale

$\boxed{A}$ $ab + \frac{1}{6}\left(a^3 + b^3\right)$.

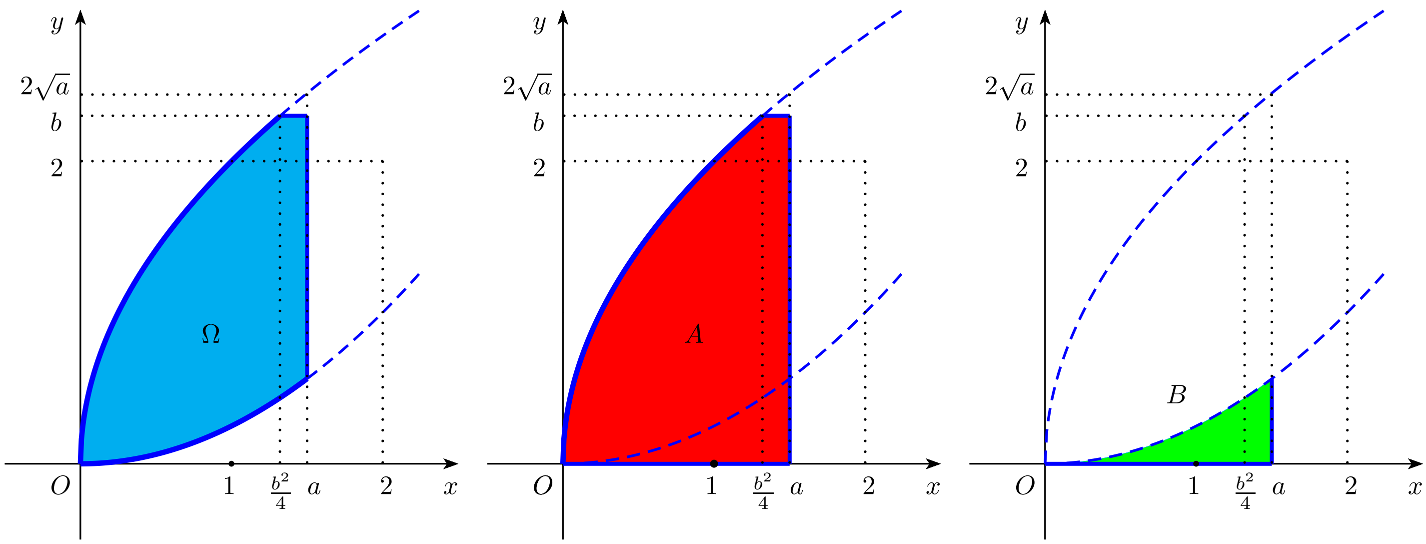
$\boxed{B}$ $ab - \frac{1}{12}\left(a^3 + b^3\right)$.

$\boxed{C}$ $ab + \frac{1}{12}\left(a^3 + b^3\right)$.

$\boxed{D}$ $ab - \frac{1}{6}\left(a^3 + b^3\right)$.

$\boxed{E}$ $ab + \frac{4}{3}a^{3/2} - \frac{1}{6}a^3$.

SVOLGIMENTO



Osserviamo che $\Omega = A \setminus B$, con $B \subseteq A$, dove

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{4}y^2 \le x \le a, \ \ 0 \le y \le b \right\}, \qquad B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y < \frac{1}{4}x^2, \ \ 0 \le x \le a \right\}.$$

Quindi $m(\Omega) = m(A) - m(B)$. Essendo A un insieme x-semplice e B un insieme y-semplice, si ha che

$$m(A) = \int_0^b \left(\int_{\frac{1}{4}y^2}^a 1 \, dx \right) dy = \int_0^b \left(a - \frac{1}{4}y^2 \right) dy = \left[ay - \frac{1}{12}y^3 \right]_0^b = ab - \frac{1}{12}b^3,$$

$$m(B) = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{1}{4}x^2} 1 \, dy \right) dx = \int_0^a \frac{1}{4}x^2 \, dx = \left[\frac{1}{12}x^3 \right]_0^a = \frac{1}{12}a^3.$$

Ne segue che

$$m(\Omega) = m(A) - m(B) = ab - \frac{1}{12}\left(a^3 + b^3\right).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 3. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se f è differenziabile in (x_0, y_0) ed esistono $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, allora $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in (x_0, y_0).

$\boxed{B}$ Se f è differenziabile in (x_0, y_0), allora per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ esiste $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ in ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ed è continua in (x_0, y_0).

$\boxed{C}$ Se f non è differenziabile in (x_0, y_0), allora non esiste $\nabla f(x_0, y_0)$.

$\boxed{D}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{E}$ Se esiste $\nabla f(x_0, y_0)$, allora f è continua in (x_0, y_0).

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Infatti, esistono funzioni che ammettono le derivate parziali in tutti i punti e che in un punto non sono continue ma che in quel punto sono diferenzialibili: per esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0,0)$, e quindi $\boxed{\text{A}}$ è errata.

Inoltre esistono funzioni che sono differenziabili in un punto ma che non ammettono derivate in altri punti rispetto a qualunque vettore, oppure la cui derivata rispetto a quel vettore non è continua in quel punto: per esempio $f(x,y) = |x| + |y|$ è differenziabile in $(x_0, y_0) = (1,1)$ ma non ammette le derivate parziali in $(0,0)$, oppure la funzione precedentemente citata è differenziabile in $(x_0, y_0) = (0,0)$ ma non ha le derivate parziali continue in questo punto, e quindi $\boxed{\text{B}}$ è errata.

Infine esistono funzioni che non sono differenziabili in un punto ma che in quel punto ammettono gradiente: per esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0,0)$. Inoltre, questa funzione non è continua in $(0,0)$, e quindi esistono funzioni che ammettono gradiente in un punto ma che non sono continue in quel punto, e quindi $\boxed{\text{C}}$ ed $\boxed{\text{E}}$ sono errate.

Quiz 4. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \ y^2+z^2-6 \leq x \leq \sqrt{y^2+z^2}, \ y^2+z^2 \leq 16\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Omega \big(4x+5y+6z+8yz\big)\,dx\,dy\,dz$ vale

$\boxed{A}$ -63π.

$\boxed{B}$ -162π.

$\boxed{C}$ $-\dfrac{63}{2}\pi$.

$\boxed{D}$ -81π.

$\boxed{E}$ $-\dfrac{81}{2}\pi$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che l'insieme Ω è simmetrico sia rispetto al piano xy che rispetto al piano xz. Infatti, se $(x,y,z) \in \Omega$, allora anche $(x,y,-z) \in \Omega$ e $(x,-y,z) \in \Omega$. Poiché la funzione $f(x,y,z) = 5y+6z+8yz$ è dispari sia rispetto alla variabile y che rispetto alla variabile z, il suo integrale su Ω è zero. Ne segue che

$$\int_\Omega \big(4x+5y+6z+8yz\big)\,dx\,dy\,dz = \int_\Omega 4x\,dx\,dy\,dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse x si ottiene

$$= \int_{\Omega'} 4x\rho\,d\rho\,d\vartheta\,dx,$$

dove $\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,x) \in \mathbb{R}^3: \ \rho^2-6 \leq x \leq \rho, \ 0 \leq \rho \leq 3, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\right\}$. Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\int_\Omega \big(4x+5y+6z+8yz\big)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} 4x\rho\,d\rho\,d\vartheta\,dx = 8\pi\int_0^3 \rho\left(\int_{\rho^2-6}^{\rho} x\,dx\right)d\rho = 8\pi\int_0^3 \rho\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\rho^2-6}^{\rho} d\rho =$$

$$= 4\pi\int_0^3 \rho\left[\rho^2-\left(\rho^2-6\right)^2\right]d\rho = 4\pi\int_0^3 \left[\rho^3-\rho\left(\rho^2-6\right)^2\right]d\rho = 4\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4-\frac{1}{6}\left(\rho^2-6\right)^3\right]_0^3 = -81\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 5. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\left(n^4\sin\frac{2}{n}-2n^3\right)\left(e^{1/n}-1-7e^{-n}\right)}{(n+1)\log^2(n+1)-n\log n}$

$\boxed{A}$ converge ad un numero reale $S<0$.

$\boxed{B}$ converge a 0.

$\boxed{C}$ diverge negativamente.

$\boxed{D}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ converge ad un numero reale $S>0$.

SVOLGIMENTO

Utilizzando gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni $\sin x$ ed e^x si ha che

$$\left(n^4\sin\frac{2}{n}-2n^3\right)\left(e^{1/n}-1-7e^{-n}\right) = n^3\left[n\left(\frac{2}{n}-\frac{4}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-2\right]\left[\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1-7e^{-n}\right] =$$

$$= n^3\left[-\frac{4}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-7e^{-n}\right]=$$

essendo $e^{-n}=o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n\to+\infty$ si ottiene

$$=\left[-\frac{4}{3}n+o(n)\right]\left[\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-\frac{4}{3}+o(1)\sim-\frac{4}{3},\qquad n\to+\infty.$$

Inoltre, essendo $\log n=o\left(\log^2(n+1)\right)$ per $n\to+\infty$, si ha che

$$(n+1)\log^2(n+1)-n\log n=(n+1)\log^2(n+1)+o\left((n+1)\log^2(n+1)\right)\sim(n+1)\log^2(n+1),\qquad n\to+\infty.$$

Quindi

$$\frac{\left(n^4\,\sin\frac{2}{n}-2n^3\right)\left(e^{1/n}-1-7e^{-n}\right)}{(n+1)\log^2(n+1)-n\log n}\sim-\frac{4}{3(n+1)\log^2(n+1)},\qquad n\to+\infty.$$

Quindi la serie data è a termini negativi. Considerando la serie dei termini opposti $\sum_{n=3}^{\infty}\left(-\frac{\left(n^4\,\sin\frac{2}{n}-2n^3\right)\left(e^{1/n}-1-7e^{-n}\right)}{(n+1)\log^2(n+1)-n\log n}\right)$, che è a termini positivi, si ha che

$$-\frac{\left(n^4\,\sin\frac{2}{n}-2n^3\right)\left(e^{1/n}-1-7e^{-n}\right)}{(n+1)\log^2(n+1)-n\log n}\sim\frac{4}{3(n+1)\log^2(n+1)},\qquad n\to+\infty.$$

Consideriamo la funzione $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}$ definita su $[3,+\infty)$. Questa funzione è positiva e decrescente. Valutiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty}f(x)\,dx=\int_3^{+\infty}\frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\,dx.$$

Posto $t=\log(x+1)$, da cui $dt=\frac{1}{x+1}\,dx$, si ha che

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\,dx=\lim_{c\to+\infty}\int_3^{c}\frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\,dx=\lim_{c\to+\infty}\int_{\log 4}^{\log(c+1)}\frac{1}{t^2}\,dt=\int_{\log 4}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$$

che converge. Quindi, per il Criterio di Maclaurin la serie $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{3(n+1)\log^2(n+1)}$ converge. Ne segue che per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=3}^{\infty}\left(-\frac{\left(n^4\,\sin\frac{2}{n}-2n^3\right)\left(e^{1/n}-1-7e^{-n}\right)}{(n+1)\log^2(n+1)-n\log n}\right)$ converge ad un numero reale $S>0$ e di conseguenza la serie data converge ad un numero reale $S<0$. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 6. Siano $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo vettoriale continuo e conservativo, $\Gamma_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1,\ x\geq0\right\}$, $\Gamma_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+4y^2=4,\ x\geq0\right\}$, $\Gamma_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -1\leq y\leq1,\ x=y^2-1\right\}$, $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ tre curve parametriche regolari che parametrizzano rispettivamente $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ inducendo su di esse un verso di percorrenza antiorario. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$\boxed{A}$ $\displaystyle\int_{\gamma_2}F\cdot dP=\int_{\gamma_3}F\cdot dP-\int_{\gamma_1}F\cdot dP.$

$\boxed{B}$ $\displaystyle\int_{\gamma_2}F\cdot dP=\int_{\gamma_1}F\cdot dP-\int_{\gamma_3}F\cdot dP.$

$\boxed{C}$ $\displaystyle\int_{\gamma_2}F\cdot dP=\frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1}F\cdot dP-\int_{\gamma_3}F\cdot dP\right).$

$\boxed{D}$ $\displaystyle\int_{\gamma_2}F\cdot dP=\int_{\gamma_1}F\cdot dP+\int_{\gamma_3}F\cdot dP.$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_{\gamma_2}F\cdot dP=\frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_3}F\cdot dP-\int_{\gamma_1}F\cdot dP\right).$

SVOLGIMENTO

Poiché F è conservativo su $\mathbb{R}^2$, denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\int_{\gamma_1}F\cdot dP=f(0,1)-f(0,-1),\qquad\int_{\gamma_2}F\cdot dP=f(0,1)-f(0,-1),\qquad\int_{\gamma_3}F\cdot dP=f(0,-1)-f(0,1).$$

Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP, \qquad \int_{\gamma_2} F \cdot dP = -\int_{\gamma_3} F \cdot dP.$$

Ne segue che

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\gamma_3} F \cdot dP\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_2} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP\right) = \int_{\gamma_2} F \cdot dP.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 7. Sia $R > 0$. Il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2 - (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, x,\ \frac{2 - (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, y,\ \frac{2 - (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, z\right)$$

dal bordo di $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ vale

$\boxed{A}$ $4\pi\left(1 - R^3\right)$.

$\boxed{B}$ 0.

$\boxed{C}$ $-4\pi R^3$.

$\boxed{D}$ $-2\pi R^3$.

$\boxed{E}$ $4\pi\left(2 - R^3\right)$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2 - (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, x,\ \frac{2 - (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, y,\ \frac{2 - (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, z\right) =$$

$$= \left(\left[\frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - 1\right] x,\ \left[\frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - 1\right] y,\ \left[\frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - 1\right] z\right) =$$

$$= \left[\frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - 1\right] (x, y, z).$$

Osserviamo che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e quindi $\Omega \not\subseteq \mathrm{dom}\,(F)$ mentre $\partial\Omega \subseteq \mathrm{dom}\,(F)$.

Il bordo di Ω è la superficie sferica di centro l'origine e raggio R nello spazio $\mathbb{R}^3$. Una parametrizzazione di $\partial\Omega$ è $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definta da

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \left(R \sin\vartheta \cos\varphi,\ R \sin\vartheta \sin\varphi,\ R \cos\vartheta\right).$$

Quindi, posto $K = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi)\, d\vartheta\, d\varphi,$$

dove N è un vettore normale a $\partial\Omega$ uscente da Ω. Un vettore normale a $\partial\Omega$ è

$$N_\sigma(\vartheta, \varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta, \varphi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta, \varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & -R\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \left(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi,\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi,\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\right).$$

Osserviamo che questo vettore è uscente da Ω. Infatti, scelto ad esempio $(\vartheta_0, \varphi_0) = (\pi/2, \pi/2)$, si ha che

$$\sigma(\vartheta_0, \varphi_0) = \sigma(\pi/2, \pi/2) = (0, R, 0), \qquad N_\sigma(\vartheta_0, \varphi_0) = N_\sigma(\pi/2, \pi/2) = (0, R^2, 0).$$

Disegnando la sfera Ω e applicando il vettore $N_\sigma(\vartheta_0, \varphi_0)$ nel punto $\sigma(\vartheta_0, \varphi_0)$ si osserva che questo vettore punta verso l'esterno di Ω. Quindi prendiamo $N(\vartheta, \varphi) = N_\sigma(\vartheta, \varphi)$.

Si ha che

$$F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) = F\left(R \sin\vartheta \cos\varphi,\ R \sin\vartheta \sin\varphi,\ R \cos\vartheta\right) \cdot \left(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi,\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi,\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\right) =$$

$$= \left[\frac{2}{R^3} - 1\right] \left(R \sin\vartheta \cos\varphi,\ R \sin\vartheta \sin\varphi,\ R \cos\vartheta\right) \cdot \left(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi,\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi,\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\right) =$$

$$= \left[\frac{2}{R^3} - 1\right] R^3 \sin\vartheta = (2 - R^3) \sin\vartheta.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) \, d\vartheta \, d\varphi = \int_K \left(2 - R^3\right) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi =$$

essendo K un rettangolo con lati paralleli agli assi ϑ e φ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ϑ e una di φ, si ottiene

$$= 2\pi \left(2 - R^3\right) \int_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta = 4\pi \left(2 - R^3\right).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 8. Siano $f(x, y) = y^{13} + 14y - x^5 - 10x$, $\quad P(-1, 1)$, $Q(-2, 1)$, $S(-1, -1)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ I punti P, Q sono di massimo locale per f.

$\boxed{B}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{C}$ I punti P, Q sono di minimo locale per f.

$\boxed{D}$ Il punto S è di massimo locale per f.

$\boxed{E}$ I punti P, Q, S sono di sella per f.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, o critici, ovvero i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -5x^4 - 10, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 13y^{12} + 14.$$

Poiché $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha che f non ha punti stazionari in $\mathbb{R}^2$ e di conseguenza non ha né punti di estremo né punti di sella.

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Versione V3

Quiz 1. Siano $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale continuo e conservativo, $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2=4, \ y \geq 0\}$, $\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 9x^2+4y^2=36, \ y \geq 0\}$, $\Gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2 \leq x \leq 2, \ y = x^2-4\}$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tre curve parametriche regolari che parametrizzano rispettivamente $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ inducendo su di esse un verso di percorrenza orario. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$\boxed{A}$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_3} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP\right)$.

$\boxed{B}$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_2} F \cdot dP - \int_{\gamma_3} F \cdot dP\right)$.

$\boxed{C}$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP + \int_{\gamma_3} F \cdot dP$.

$\boxed{D}$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_3} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP$.

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP - \int_{\gamma_3} F \cdot dP$.

SVOLGIMENTO

Poiché F è conservativo su $\mathbb{R}^2$, denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = f(2,0) - f(-2,0), \qquad \int_{\gamma_2} F \cdot dP = f(2,0) - f(-2,0), \qquad \int_{\gamma_3} F \cdot dP = f(-2,0) - f(2,0).$$

Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP, \qquad \int_{\gamma_1} F \cdot dP = -\int_{\gamma_3} F \cdot dP.$$

Ne segue che

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_2} F \cdot dP - \int_{\gamma_3} F \cdot dP\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_1} F \cdot dP\right) = \int_{\gamma_1} F \cdot dP.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 2. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\left(3n^2 - n^3 \sin \frac{3}{n}\right)\left(4e^{-n} + 1 - e^{1/n}\right)}{n \log(n-1) - (n-1)\log n}$

$\boxed{A}$ converge ad un numero reale $S < 0$.

$\boxed{B}$ converge a 0.

$\boxed{C}$ diverge negativamente.

$\boxed{D}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ converge ad un numero reale $S > 0$.

SVOLGIMENTO

Utilizzando gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni $\sin x$ ed e^x si ha che

$$\left(3n^2 - n^3 \sin\frac{3}{n}\right)\left(4e^{-n} + 1 - e^{1/n}\right) = n^2\left[3 - n\left(\frac{3}{n} - \frac{9}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]\left[4e^{-n} + 1 - \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] =$$

$$= n^2\left[\frac{9}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[4e^{-n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

essendo $e^{-n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \to +\infty$ si ottiene

$$= \left[\frac{9}{2} + o(1)\right]\left[-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -\frac{9}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{9}{2n}, \qquad n \to +\infty.$$

Inoltre

$$n\log(n-1) - (n-1)\log n = \log(n-1)^n - \log n^{n-1} = \log\frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} = \log\left[n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right] =$$

$$= \log n + \log\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \log n + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sim \log n, \qquad n \to +\infty.$$

Quindi

$$\frac{\left(3n^2 - n^3 \sin\frac{3}{n}\right)\left(4e^{-n} + 1 - e^{1/n}\right)}{n\log(n-1) - (n-1)\log n} \sim -\frac{9}{2n\log n}, \qquad n \to +\infty.$$

Quindi la serie data è a termini negativi. Considerando la serie dei termini opposti $\sum_{n=4}^{\infty}\left(-\frac{\left(3n^2 - n^3 \sin\frac{3}{n}\right)\left(4e^{-n} + 1 - e^{1/n}\right)}{n\log(n-1) - (n-1)\log n}\right)$, che è a termini positivi, si ha che

$$-\frac{\left(3n^2 - n^3 \sin\frac{3}{n}\right)\left(4e^{-n} + 1 - e^{1/n}\right)}{n\log(n-1) - (n-1)\log n} \sim \frac{9}{2n\log n}, \qquad n \to +\infty.$$

Per il Criterio di Maclaurin la serie $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ diverge positivamente. Quindi per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=4}^{\infty}\left(-\frac{\left(3n^2 - n^3 \sin\frac{3}{n}\right)\left(4e^{-n} + 1 - e^{1/n}\right)}{n\log(n-1) - (n-1)\log n}\right)$ diverge positivamente e di conseguenza la serie data diverge negativamente. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 3. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{B}$ Se f non è differenziabile in (x_0, y_0), allora f non è continua in (x_0, y_0).

$\boxed{C}$ Se f non è continua in (x_0, y_0), allora non esiste $\nabla f(x_0, y_0)$.

$\boxed{D}$ Se esistono $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e non sono continue in (x_0, y_0), allora f non è differenziabile in (x_0, y_0).

$\boxed{E}$ Se per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ esiste $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$, allora f è continua in (x_0, y_0).

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Infatti, esistono funzioni continue in un punto che non sono differenziabili in quel punto: per esempio $f(x, y) = |x| + |y|$ in $(x_0, y_0) = (0, 0)$, e quindi $\boxed{\text{B}}$ è errata.

Inoltre, esistono funzioni che non sono continue in un punto ma che ammettono gradiente in quel punto: per esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0, 0)$, e quindi $\boxed{\text{C}}$ è errata.

Esistono anche funzioni che ammettono le derivate parziali in tutti i punti e che in un punto non sono continue ma che in quel punto sono diferenzialibili: per esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0, 0)$, e quindi $\boxed{\text{D}}$ è errata.

Infine, esistono funzioni che ammettono la derivata in un punto rispetto a qualunque vettore ma che non sono continue in quel punto: per esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0, 0)$, e quindi $\boxed{\text{E}}$ è errata.

Quiz 4. Siano $f(x, y) = x^9 + 10x - y^3 - 9y$, $\quad P(-1, 1)$, $Q(-1, 2)$, $S(1, 1)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{B}$ I punti P, Q sono di minimo locale per f.

$\boxed{C}$ I punti P, Q, S sono di sella per f.

$\boxed{D}$ I punti P, Q sono di massimo locale per f.

$\boxed{E}$ Il punto S è di massimo locale per f.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, o critici, ovvero i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 9x^8 + 10, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2 - 9.$$

Poiché $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha che f non ha punti stazionari in $\mathbb{R}^2$ e di conseguenza non ha né punti di estremo né punti di sella.

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 5. Sia $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ -\sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 2 - x^2 - z^2, \ x^2 + z^2 \leq 9\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Omega \big(9x + 3y + 7z + 6xz\big)\, dx\, dy\, dz$ vale

$\boxed{A}$ -8π.

$\boxed{B}$ -4π.

$\boxed{C}$ -2π.

$\boxed{D}$ $-\dfrac{32}{3}\pi$.

$\boxed{E}$ $-\dfrac{16}{3}\pi$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che l'insieme Ω è simmetrico sia rispetto al piano xy che rispetto al piano yz. Infatti, se $(x, y, z) \in \Omega$, allora anche $(x, y, -z) \in \Omega$ e $(-x, y, z) \in \Omega$. Poiché la funzione $f(x, y, z) = 9x + 7z + 6xz$ è dispari sia rispetto alla variabile x che rispetto alla variabile z, il suo integrale su Ω è zero. Ne segue che

$$\int_\Omega \big(9x + 3y + 7z + 6xz\big)\, dx\, dy\, dz = \int_\Omega 3y\, dx\, dy\, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse y si ottiene

$$= \int_{\Omega'} 3y\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dy,$$

dove $\Omega' = \left\{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : \ -\rho \leq y \leq 2 - \rho^2, \ 0 \leq \rho \leq 2, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\right\}$. Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\int_\Omega \big(9x + 3y + 7z + 6xz\big)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} 3y\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dy = 6\pi \int_0^2 \rho \left(\int_{-\rho}^{2-\rho^2} y\, dy\right) d\rho = 6\pi \int_0^2 \rho \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-\rho}^{2-\rho^2} d\rho =$$

$$= 3\pi \int_0^2 \rho \left[\left(2 - \rho^2\right)^2 - \rho^2\right] d\rho = 3\pi \int_0^2 \left[\rho\left(2 - \rho^2\right)^2 - \rho^3\right] d\rho = 3\pi \left[-\frac{1}{6}\left(2 - \rho^2\right)^3 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 = -4\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 6. Sia $R > 0$. Il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{6 + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\ x, \ \frac{6 + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\ y, \ \frac{6 + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\ z\right)$$

dal bordo di $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$ vale

$\boxed{A}$ $4\pi\left(R^3 + 6\right)$.

$\boxed{B}$ $2\pi R^3$.

$\boxed{C}$ $4\pi R^3$.

$\boxed{D}$ $4\pi\left(R^3+3\right)$.

$\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$F(x,y,z)=\left(\frac{6+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,x,\ \frac{6+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,y,\ \frac{6+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,z\right)=$$

$$=\left(\left[\frac{6}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+1\right]x,\ \left[\frac{6}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+1\right]y,\ \left[\frac{6}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+1\right]z\right)=$$

$$=\left[\frac{6}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+1\right](x,y,z).$$

Osserviamo che $\mathrm{dom}\,(F)=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ e quindi $\Omega\not\subseteq\mathrm{dom}\,(F)$ mentre $\partial\Omega\subseteq\mathrm{dom}\,(F)$.

Il bordo di Ω è la superficie sferica di centro l'origine e raggio R nello spazio $\mathbb{R}^3$. Una parametrizzazione di $\partial\Omega$ è $\sigma:[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ definta da

$$\sigma(\vartheta,\varphi)=\left(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta\right).$$

Quindi, posto $K=[0,\pi]\times[0,2\pi]$, si ha che

$$\int_{\partial\Omega}F\cdot n\,d\sigma=\int_K F(\sigma(\vartheta,\varphi))\cdot N(\vartheta,\varphi)\,d\vartheta\,d\varphi,$$

dove N è un vettore normale a $\partial\Omega$ uscente da Ω. Un vettore normale a $\partial\Omega$ è

$$N_\sigma(\vartheta,\varphi)=\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta,\varphi)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta,\varphi)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & -R\sin\vartheta\\ -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=\left(R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi,\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi,\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right).$$

Osserviamo che questo vettore è uscente da Ω. Infatti, scelto ad esempio $(\vartheta_0,\varphi_0)=(\pi/2,\pi/2)$, si ha che

$$\sigma(\vartheta_0,\varphi_0)=\sigma(\pi/2,\pi/2)=(0,R,0),\qquad N_\sigma(\vartheta_0,\varphi_0)=N_\sigma(\pi/2,\pi/2)=(0,R^2,0).$$

Disegnando la sfera Ω e applicando il vettore $N_\sigma(\vartheta_0,\varphi_0)$ nel punto $\sigma(\vartheta_0,\varphi_0)$ si osserva che questo vettore punta verso l'esterno di Ω. Quindi prendiamo $N(\vartheta,\varphi)=N_\sigma(\vartheta,\varphi)$.

Si ha che

$$F(\sigma(\vartheta,\varphi))\cdot N(\vartheta,\varphi)=F\left(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta\right)\cdot\left(R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi,\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi,\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right)=$$

$$=\left[\frac{6}{R^3}+1\right]\left(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta\right)\cdot\left(R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi,\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi,\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right)=$$

$$=\left[\frac{6}{R^3}+1\right]R^3\sin\vartheta=(R^3+6)\sin\vartheta.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega}F\cdot n\,d\sigma=\int_K F(\sigma(\vartheta,\varphi))\cdot N(\vartheta,\varphi)\,d\vartheta\,d\varphi=\int_K\left(R^3+6\right)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi=$$

essendo K un rettangolo con lati paralleli agli assi ϑ e φ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ϑ e una di φ, si ottiene

$$=2\pi\left(R^3+6\right)\int_0^\pi\sin\vartheta\,d\vartheta=4\pi\left(R^3+6\right).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 7. Siano $b\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, $a\in\left(1,\sqrt{2b}\right)$ e $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{1}{2}x^2\le y\le\sqrt{2x},\ 0\le x\le b,\ 0\le y\le a\right\}$. L'area di Ω vale

$\boxed{A}$ $ab+\frac{2}{3}b^{3/2}-\frac{1}{3}b^3$.

$\boxed{B}$ $ab+\frac{1}{6}\left(a^3+b^3\right)$.

$\boxed{C}$ $ab-\frac{1}{3}\left(a^3+b^3\right)$.

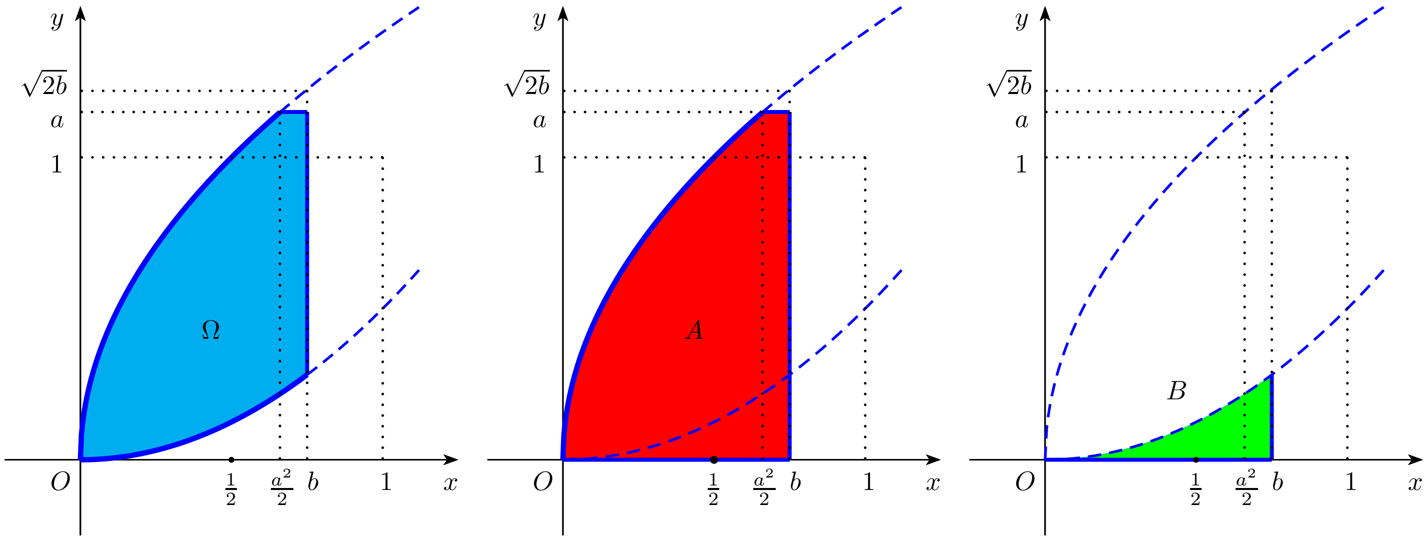
$\boxed{D}$ $ab + \frac{1}{3}(a^3 + b^3)$.

$\boxed{E}$ $ab - \frac{1}{6}(a^3 + b^3)$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\Omega = A \setminus B$, con $B \subseteq A$, dove

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \frac{1}{2}y^2 \le x \le b, \; 0 \le y \le a \right\}, \qquad B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le y < \frac{1}{2}x^2, \; 0 \le x \le b \right\}.$$



Quindi $m(\Omega) = m(A) - m(B)$. Essendo A un insieme x-semplice e B un insieme y-semplice, si ha che

$$m(A) = \int_0^a \left(\int_{\frac{1}{2}y^2}^b 1\, dx \right) dy = \int_0^a \left(b - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \left[by - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^a = ab - \frac{1}{6}a^3,$$

$$m(B) = \int_0^b \left(\int_0^{\frac{1}{2}x^2} 1\, dy \right) dx = \int_0^b \frac{1}{2}x^2\, dx = \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_0^b = \frac{1}{6}b^3.$$

Ne segue che

$$m(\Omega) = m(A) - m(B) = ab - \frac{1}{6}\left(a^3 + b^3\right).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 8. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(4 + \frac{36\, e^x}{1 + (e^x + e^y - 1)^2}, \; 14y + \frac{36\, e^y}{1 + (e^x + e^y - 1)^2} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0,5] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^9 - 5t^8 + \frac{t}{5} \log\sqrt{3}, \; \sin\left[(t-5)\left(e^{1+t} - e\right)\right] \right)$ vale

$\boxed{A}$ $\log 3 - 3\pi$.

$\boxed{B}$ $2\log 3 + 3\pi$.

$\boxed{C}$ $3\pi - 2\log 3$.

$\boxed{D}$ $2\log 3 - 3\pi$.

$\boxed{E}$ $-2\log 3 - 3\pi$.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{72\, e^{x+y}(e^x + e^y - 1)}{\left[1 + (e^x + e^y - 1)^2\right]^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su Ω, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = 4 + \dfrac{36\,e^x}{1+(e^x+e^y-1)^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = 14y + \dfrac{36\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(4 + \frac{36\,e^x}{1+(e^x+e^y-1)^2}\right) dx = 4x + 36\arctan\left(e^x+e^y-1\right) + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{36\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2} + c'(y) = 14y + \frac{36\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2} \quad\Longrightarrow\quad c'(y) = 14y \quad\Longrightarrow\quad c(y) = 7y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su Ω è

$$f(x,y) = 4x + 7y^2 + 36\arctan\left(e^x+e^y-1\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(5)) - f(\gamma(0)) = f\big(\log\sqrt{3}, 0\big) - f(0,0) = 2\log 3 + 3\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Versione V4

Quiz 1. Siano $b \in (1,2)$, $a \in \left(2, 2\sqrt{b}\right)$ e $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{4}y^2 \le x \le 2\sqrt{y}, \ 0 \le x \le b, \ 0 \le y \le a\right\}$. L'area di Ω vale

$\boxed{A}$ $ab + \frac{4}{3}ab^{3/2} - \frac{1}{6}b^3$.

$\boxed{B}$ $ab - \frac{1}{12}\left(a^3 + b^3\right)$.

$\boxed{C}$ $ab - \frac{1}{6}\left(a^3 + b^3\right)$.

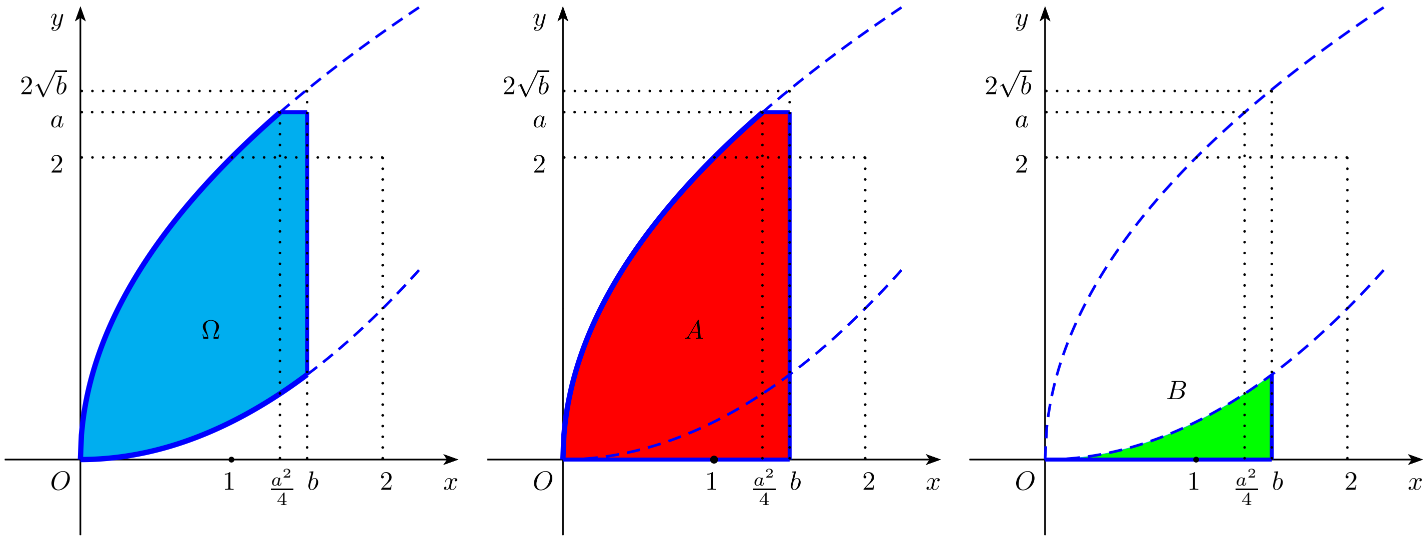
$\boxed{D}$ $ab + \frac{1}{6}\left(a^3 + b^3\right)$.

$\boxed{E}$ $ab + \frac{1}{12}\left(a^3 + b^3\right)$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\Omega = A \setminus B$, con $B \subseteq A$, dove

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{4}y^2 \le x \le b, \ 0 \le y \le a\right\}, \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y < \frac{1}{4}x^2, \ 0 \le x \le b\right\}.$$



Quindi $m(\Omega) = m(A) - m(B)$. Essendo A un insieme x-semplice e B un insieme y-semplice, si ha che

$$m(A) = \int_0^a \left(\int_{\frac{1}{4}y^2}^b 1\,dx\right) dy = \int_0^a \left(b - \frac{1}{4}y^2\right) dy = \left[by - \frac{1}{12}y^3\right]_0^a = ab - \frac{1}{12}a^3,$$

$$m(B) = \int_0^b \left(\int_0^{\frac{1}{4}x^2} 1\,dy\right) dx = \int_0^b \frac{1}{4}x^2\,dx = \left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^b = \frac{1}{12}b^3.$$

Ne segue che

$$m(\Omega) = m(A) - m(B) = ab - \frac{1}{12}\left(a^3 + b^3\right).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 2. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ -\sqrt{y^2 + z^2} \le x \le 6 - y^2 - z^2, \ y^2 + z^2 \le 16\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Omega (4x + 6y + 5z + 9yz)\,dx\,dy\,dz$ vale

$\boxed{A}$ $\frac{63}{2}\pi$. $\boxed{B}$ $\frac{81}{2}\pi$. $\boxed{C}$ -63π. $\boxed{D}$ 162π. $\boxed{E}$ 81π.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che l'insieme Ω è simmetrico sia rispetto al piano xy che rispetto al piano xz. Infatti, se $(x,y,z)\in\Omega$, allora anche $(x,y,-z)\in\Omega$ e $(x,-y,z)\in\Omega$. Poiché la funzione $f(x,y,z)=6y+5z+9yz$ è dispari sia rispetto alla variabile y che rispetto alla variabile z, il suo integrale su Ω è zero. Ne segue che

$$\int_\Omega (4x+6y+5z+9yz)\,dx\,dy\,dz = \int_\Omega 4x\,dx\,dy\,dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse x si ottiene

$$= \int_{\Omega'} 4x\rho\,d\rho\,d\vartheta\,dx,$$

dove $\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,x)\in\mathbb{R}^3:\ -\rho\le x\le 6-\rho^2,\ 0\le\rho\le 3,\ 0\le\vartheta\le 2\pi\right\}$. Integrando prima per fili parallelli all'asse ϑ si ottiene

$$\int_\Omega (4x+6y+5z+9yz)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} 4x\rho\,d\rho\,d\vartheta\,dx = 8\pi\int_0^3 \rho\left(\int_{-\rho}^{6-\rho^2} x\,dx\right)d\rho = 8\pi\int_0^3 \rho\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\rho}^{6-\rho^2} d\rho =$$

$$= 4\pi\int_0^3 \rho\left[\left(6-\rho^2\right)^2-\rho^2\right]d\rho = 4\pi\int_0^3\left[\rho\left(6-\rho^2\right)^2-\rho^3\right]d\rho = 4\pi\left[-\frac{1}{6}\left(6-\rho^2\right)^3-\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^3 = 81\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 3. Siano $f(x,y)=y^{15}+16y-x^3-12x$, $\quad P(1,-1)$, $Q(2,-1)$, $S(-1,-1)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{B}$ I punti P,Q,S sono di sella per f.

$\boxed{C}$ I punti P,Q sono di minimo locale per f.

$\boxed{D}$ Il punto S è di massimo locale per f.

$\boxed{E}$ I punti P,Q sono di massimo locale per f.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, o critici, ovvero i punti $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y)=(0,0)$.

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3x^2-12, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 15y^{14}+16.$$

Poiché $\nabla f(x,y)\ne(0,0)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si ha che f non ha punti stazionari in $\mathbb{R}^2$ e di conseguenza non ha né punti di estremo né punti di sella.

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 4. Siano $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo vettoriale continuo e conservativo, $\Gamma_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=4,\ x\ge 0\right\}$, $\Gamma_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 4x^2+9y^2=36,\ x\ge 0\right\}$, $\Gamma_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -2\le y\le 2,\ x=y^2-4\right\}$, $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ tre curve parametriche regolari che parametrizzano rispettivamente $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ inducendo su di esse un verso di percorrenza orario. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$\boxed{A}$ $\displaystyle\int_{\gamma_2} F\cdot dP = \int_{\gamma_1} F\cdot dP - \int_{\gamma_3} F\cdot dP.$

$\boxed{B}$ $\displaystyle\int_{\gamma_2} F\cdot dP = \int_{\gamma_3} F\cdot dP - \int_{\gamma_1} F\cdot dP.$

$\boxed{C}$ $\displaystyle\int_{\gamma_2} F\cdot dP = \int_{\gamma_1} F\cdot dP + \int_{\gamma_3} F\cdot dP.$

$\boxed{D}$ $\displaystyle\int_{\gamma_2} F\cdot dP = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1} F\cdot dP - \int_{\gamma_3} F\cdot dP\right).$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_{\gamma_2} F\cdot dP = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_3} F\cdot dP - \int_{\gamma_1} F\cdot dP\right).$

SVOLGIMENTO

Poiché F è conservativo su $\mathbb{R}^2$, denotato con f un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = f(0,-2) - f(0,2), \qquad \int_{\gamma_2} F \cdot dP = f(0,-2) - f(0,2), \qquad \int_{\gamma_3} F \cdot dP = f(0,2) - f(0,-2).$$

Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP, \qquad \int_{\gamma_2} F \cdot dP = -\int_{\gamma_3} F \cdot dP.$$

Ne segue che

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\gamma_3} F \cdot dP\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_2} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP\right) = \int_{\gamma_2} F \cdot dP.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 5. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\left(6n^3 - n^4 \sin\frac{6}{n}\right)\left(1 - e^{1/n} - 3e^{-n}\right)}{n \log n - (n+1)\log^2(n+1)}$

$\boxed{A}$ converge ad un numero reale $S < 0$.

$\boxed{B}$ diverge positivamente.

$\boxed{C}$ converge ad un numero reale $S > 0$.

$\boxed{D}$ converge a 0.

$\boxed{E}$ diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Utilizzando gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni $\sin x$ ed e^x si ha che

$$\left(6n^3 - n^4 \sin\frac{6}{n}\right)\left(1 - e^{1/n} - 3e^{-n}\right) = n^3\left[6 - n\left(\frac{6}{n} - \frac{36}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]\left[1 - \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 3e^{-n}\right] =$$

$$= n^3\left[\frac{36}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 3e^{-n}\right] =$$

essendo $e^{-n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \to +\infty$ si ottiene

$$= [36n + o(n)]\left[-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -36 + o(1) \sim -36, \qquad n \to +\infty.$$

Inoltre, essendo $\log n = o\left(\log^2(n+1)\right)$ per $n \to +\infty$, si ha che

$$n \log n - (n+1)\log^2(n+1) = -(n+1)\log^2(n+1) + o\left((n+1)\log^2(n+1)\right) \sim -(n+1)\log^2(n+1), \qquad n \to +\infty.$$

Quindi

$$\frac{\left(6n^3 - n^4 \sin\frac{6}{n}\right)\left(1 - e^{1/n} - 3e^{-n}\right)}{n \log n - (n+1)\log^2(n+1)} \sim \frac{36}{(n+1)\log^2(n+1)}, \qquad n \to +\infty.$$

Quindi la serie data è a termini positivi.

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}$ definita su $[3, +\infty)$. Questa funzione è positiva e decrescente. Valutiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\,dx.$$

Posto $t = \log(x+1)$, da cui $dt = \frac{1}{x+1}\,dx$, si ha che

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_3^{c} \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_{\log 4}^{\log(c+1)} \frac{1}{t^2}\,dt = \int_{\log 4}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$$

che converge. Quindi, per il Criterio di Maclaurin la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{3(n+1)\log^2(n+1)}$ converge. Ne segue che per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge ad un numero reale $S > 0$. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 6. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(14x + \dfrac{36\,e^x}{1+(e^x+e^y-1)^2},\ 4 + \dfrac{36\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2}\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0,5] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(\sin\left[(t-5)\left(e^{1+t}-e\right)\right],\ t^9 - 5t^8 + \dfrac{t}{5}\log\sqrt{3}\right)$ vale

$\boxed{A}$ $-2\log 3 - 3\pi$.

$\boxed{B}$ $2\log 3 - 3\pi$.

$\boxed{C}$ $2\log 3 + 3\pi$.

$\boxed{D}$ $\log 3 - 3\pi$.

$\boxed{E}$ $3\pi - 2\log 3$.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{72\,e^{x+y}(e^x+e^y-1)}{\left[1+(e^x+e^y-1)^2\right]^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su Ω, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = 14x + \dfrac{36\,e^x}{1+(e^x+e^y-1)^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = 4 + \dfrac{36\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2}. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(14x + \frac{36\,e^x}{1+(e^x+e^y-1)^2}\right) dx = 7x^2 + 36\arctan\left(e^x+e^y-1\right) + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{36\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2} + c'(y) = 4 + \frac{36\,e^y}{1+(e^x+e^y-1)^2} \quad \Longrightarrow \quad c'(y) = 4 \quad \Longrightarrow \quad c(y) = 4y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su Ω è

$$f(x,y) = 7x^2 + 4y + 36\arctan\left(e^x+e^y-1\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(5)) - f(\gamma(0)) = f\left(0, \log\sqrt{3}\right) - f(0,0) = 2\log 3 + 3\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 7. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se f non è differenziabile in (x_0,y_0), allora non esiste $\nabla f(x_0,y_0)$.

$\boxed{B}$ Se f è differenziabile in (x_0,y_0) ed esistono $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, allora $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in (x_0,y_0).

$\boxed{C}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{D}$ Se non esiste $\nabla f(x_0,y_0)$, allora f non è continua in (x_0,y_0).

$\boxed{E}$ Se f è differenziabile in (x_0,y_0), allora per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ esiste $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ in ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ed è continua in (x_0,y_0).

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Infatti, esistono funzioni che non sono differenziabili in un punto ma che in quel punto ammettono gradiente: per esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\[1ex] 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0, 0)$, e quindi $\boxed{\text{A}}$ è errata.

Esistono anche funzioni che ammettono le derivate parziali in tutti i punti e che in un punto non sono continue ma che in quel punto sono diferenzialibili: per esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0, 0)$, e quindi $\boxed{\text{B}}$ è errata.

Inoltre, esistono funzioni che non ammettono gradiente in un punto ma che sono continue in quel punto: per esempio $f(x, y) = |x| + |y|$ è continua in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ma non ammette le derivate parziali in $(0, 0)$ e quindi non ammette gradiente in quel punto, e quindi $\boxed{\text{D}}$ è errata.

Infine, esistono funzioni che sono differenziabili in un punto ma che non ammettono derivate in altri punti rispetto a qualunque vettore, oppure la cui derivata rispetto a quel vettore non è continua in quel punto: per esempio $f(x, y) = |x| + |y|$ è differenziabile in $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ma non ammette le derivate parziali in $(0, 0)$, oppure la funzione precedentemente citata è differenziabile in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ma non ha le derivate parziali continue in questo punto, e quindi $\boxed{\text{E}}$ è errata.

Quiz 8. Sia $R > 0$. Il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{6 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\, x,\ \frac{6 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\, y,\ \frac{6 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\, z \right)$$

dal bordo di $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$ vale

$\boxed{A}$ $-2\pi R^3$.

$\boxed{B}$ $-4\pi R^3$.

$\boxed{C}$ 0.

$\boxed{D}$ $4\pi \left(3 - R^3\right)$.

$\boxed{E}$ $4\pi \left(6 - R^3\right)$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$F(x, y, z) = \left(\frac{6 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\, x,\ \frac{6 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\, y,\ \frac{6 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\, z \right) =$$

$$= \left(\left[\frac{6}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} - 1\right] x,\ \left[\frac{6}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} - 1\right] y,\ \left[\frac{6}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} - 1\right] z \right) =$$

$$= \left[\frac{6}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} - 1\right] (x, y, z).$$

Osserviamo che $\operatorname{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e quindi $\Omega \not\subseteq \operatorname{dom}(F)$ mentre $\partial\Omega \subseteq \operatorname{dom}(F)$.

Il bordo di Ω è la superficie sferica di centro l'origine e raggio R nello spazio $\mathbb{R}^3$. Una parametrizzazione di $\partial\Omega$ è $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definta da

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \left(R \sin\vartheta \cos\varphi,\ R \sin\vartheta \sin\varphi,\ R \cos\vartheta\right).$$

Quindi, posto $K = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) \, d\vartheta \, d\varphi,$$

dove N è un vettore normale a $\partial\Omega$ uscente da Ω. Un vettore normale a $\partial\Omega$ è

$$N_\sigma(\vartheta, \varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta, \varphi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta, \varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & -R\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \left(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi,\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi,\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\right).$$

Osserviamo che questo vettore è uscente da Ω. Infatti, scelto ad esempio $(\vartheta_0, \varphi_0) = (\pi/2, \pi/2)$, si ha che

$$\sigma(\vartheta_0, \varphi_0) = \sigma(\pi/2, \pi/2) = (0, R, 0), \qquad N_\sigma(\vartheta_0, \varphi_0) = N_\sigma(\pi/2, \pi/2) = (0, R^2, 0).$$

Disegnando la sfera Ω e applicando il vettore $N_\sigma(\vartheta_0, \varphi_0)$ nel punto $\sigma(\vartheta_0, \varphi_0)$ si osserva che questo vettore punta verso l'esterno di Ω. Quindi prendiamo $N(\vartheta, \varphi) = N_\sigma(\vartheta, \varphi)$.

Si ha che

$$F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) = F\big(R \sin\vartheta \cos\varphi,\ R \sin\vartheta \sin\varphi,\ R\cos\vartheta\big) \cdot \big(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi,\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi,\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\big) =$$

$$= \left[\frac{6}{R^3} - 1\right] \big(R \sin\vartheta \cos\varphi,\ R \sin\vartheta \sin\varphi,\ R\cos\vartheta\big) \cdot \big(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi,\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi,\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\big) =$$

$$= \left[\frac{6}{R^3} - 1\right] R^3 \sin\vartheta = (6 - R^3) \sin\vartheta.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) \, d\vartheta \, d\varphi = \int_K \big(6 - R^3\big) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi =$$

essendo K un rettangolo con lati paralleli agli assi ϑ e φ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ϑ e una di φ, si ottiene

$$= 2\pi \left(6 - R^3\right) \int_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta = 4\pi \left(6 - R^3\right).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.
