Svolgimento dei quiz dell'esame di Analisi Matematica II del 14 febbraio 2022 ore 14

Versione: V1

Quiz 1. Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x^4+2x^2+3} \le y \le \sqrt{x^4+x^2+7}, \ 0 \le x \le 3\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{5y}{x+2}\,dx\,dy$ vale

A $\frac{15}{2}$.

B 4.

C 5.

D 10.

E $\frac{15}{4}$.

SVOLGIMENTO

Poiché $\sqrt{x^4+2x^2+3} \le \sqrt{x^4+x^2+7} \iff -2 \le x \le 2$, si ha che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x^4+2x^2+3} \le y \le \sqrt{x^4+x^2+7}, \ 0 \le x \le 2\right\}.$$

Essendo Ω un insieme y-semplice, si ha che

$$\int_\Omega \frac{5y}{x+2}\,dx\,dy = 5\int_0^2 \frac{1}{x+2}\left(\int_{\sqrt{x^4+2x^2+3}}^{\sqrt{x^4+x^2+7}} y\,dy\right)dx = 5\int_0^2 \frac{1}{x+2}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{\sqrt{x^4+2x^2+3}}^{\sqrt{x^4+x^2+7}} dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^2 \frac{1}{x+2}\left(4-x^2\right)dx = \frac{5}{2}\int_0^2 (2-x)\,dx = \frac{5}{2}\left[-\frac{1}{2}(2-x)^2\right]_0^2 = 5.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 2. Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, f_3)$, $K = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+z^2 \le 4\right\}$, $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,z) \in K, \ -3 \le y \le 5\right\}$, $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+z^2 = 4, \ -3 \le y \le 5\right\}$.

Il flusso del rotore di F attraverso la superficie Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ sia uscente da Ω, vale

A 0.

B $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-3,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,5,z)\right]dx\,dz - \int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-3,z) - \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,5,z)\right]dx\,dz.$

C $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-3,z) + \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,5,z)\right]dx\,dz + \int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-3,z) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,5,z)\right]dx\,dz.$

D $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-3,z) - \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,5,z)\right]dx\,dz - \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-3,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,5,z)\right]dx\,dz.$

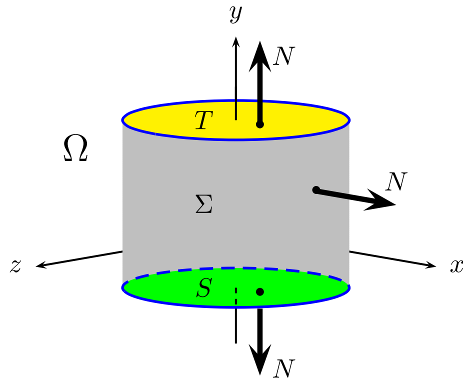
E $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-3,z) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,5,z)\right]dx\,dz - \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-3,z) + \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,5,z)\right]dx\,dz.$

SVOLGIMENTO

Il bordo di Ω è la porzione del cilindro retto di equazione $x^2+z^2 = 4$ compreso fra i piani $y=-3$ e $y=5$.
Quindi $\partial\Omega = \Sigma \cup S \cup T$, dove

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+z^2 \le 4, \ y = -3\right\},$$

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+z^2 \le 4, \ y = 5\right\}.$$



Poiché F è di classe C^1, il flusso uscente del rotore di F dal bordo di Ω è zero. Quindi

$$0 = \int_{\partial\Omega} \operatorname{rot}F\cdot n\,d\sigma = \int_\Sigma \operatorname{rot}F\cdot n\,d\sigma + \int_S \operatorname{rot}F\cdot n\,d\sigma + \int_T \operatorname{rot}F\cdot n\,d\sigma \implies \int_\Sigma \operatorname{rot}F\cdot n\,d\sigma = -\int_S \operatorname{rot}F\cdot n\,d\sigma - \int_T \operatorname{rot}F\cdot n\,d\sigma,$$

dove le superfici Σ, S, T sono tutte orientate secondo il verso uscente da Ω.

Si ha che $S = \sigma_S(K)$, dove $\sigma_S(x,z) = (x,-3,z)$ e $T = \sigma_T(K)$, dove $\sigma_T(x,z) = (x,5,z)$.

Si ha che

$$\int_S \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma_S(x,z)) \cdot N(x,z)\, dx\, dz,$$

dove $N(x,z)$ è un vettore normale a S uscente da Ω.

Un vettore normale a S è

$$N_S(x,z) = \frac{\partial \sigma_S}{\partial x}(x,z) \wedge \frac{\partial \sigma_S}{\partial z}(x,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0)$$

che è uscente da Ω. Quindi $N(x,z) = N_S(x,z) = (0,-1,0)$. Essendo

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z),\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \right),$$

si ha che

$$\int_S \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma_S(x,z)) \cdot N(x,z)\, dx\, dz = -\int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-3,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-3,z) \right] dx\, dz.$$

Similmente si ha che

$$\int_T \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma_T(x,z)) \cdot N(x,z)\, dx\, dz,$$

dove $N(x,z)$ è un vettore normale a T uscente da Ω.

Un vettore normale a T è

$$N_T(x,z) = \frac{\partial \sigma_T}{\partial x}(x,z) \wedge \frac{\partial \sigma_T}{\partial z}(x,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0)$$

che è entrante in Ω. Quindi un vettore normale uscente è $N(x,z) = -N_T(x,z) = (0,1,0)$. Ne segue che

$$\int_T \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma_T(x,z)) \cdot N(x,z)\, dx\, dz = \int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,5,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,5,z) \right] dx\, dz.$$

In conclusione si ottiene

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = -\int_S \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma - \int_T \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma =$$

$$= \int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-3,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-3,z) \right] dx\, dz - \int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,5,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,5,z) \right] dx\, dz =$$

$$= \int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-3,z) - \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,5,z) \right] dx\, dz - \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-3,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,5,z) \right] dx\, dz.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 3. Siano $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $F(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2-1,\ x\right) & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ \left(2\left(x^2+y^2-1\right),\ x\right) & \text{se } x^2+y^2 > 1, \end{cases}$

$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\right\}$. L'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω percorso in senso antiorario vale

$\boxed{A}$ $2\pi - \dfrac{32}{3}$.

$\boxed{B}$ $2\pi - \dfrac{16}{3}$.

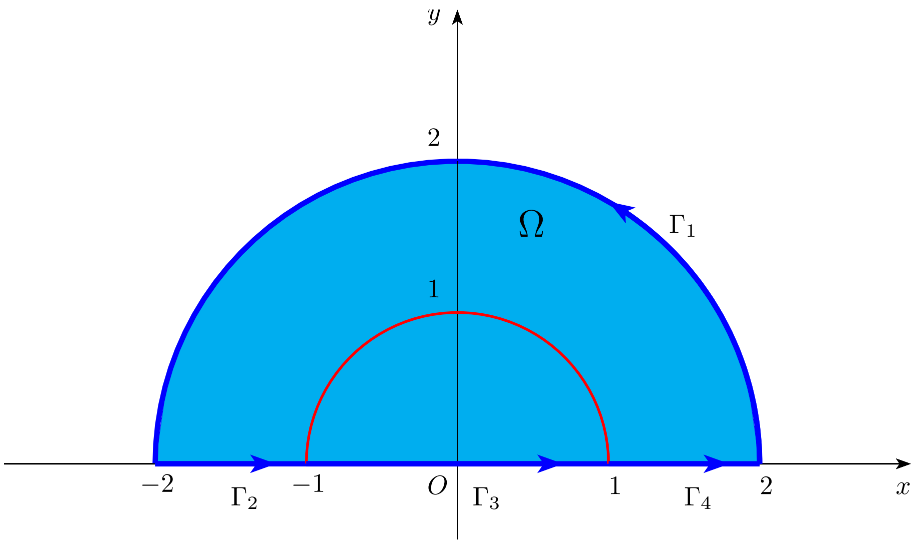
$\boxed{C}$ $2\pi - \dfrac{64}{3}$.

$\boxed{D}$ $2\pi - 20$.

$\boxed{E}$ $2\pi - 24$.

SVOLGIMENTO

Si osserva che $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (vedi figura).



Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP + \int_{\Gamma_3} F \cdot dP + \int_{\Gamma_4} F \cdot dP.$$

Si ha che

$$\Gamma_1 = \mathrm{im}(\gamma_1), \quad \gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (2\cos t, 2\sin t),$$
$$\Gamma_2 = \mathrm{im}(\gamma_2), \quad \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (-2 + t, 0),$$
$$\Gamma_3 = \mathrm{im}(\gamma_3), \quad \gamma_3 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (-1 + 2t, 0),$$
$$\Gamma_4 = \mathrm{im}(\gamma_4), \quad \gamma_4 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_4(t) = (1 + t, 0).$$

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_0^\pi F(2\cos t, 2\sin t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt = \int_0^\pi (6, 2\cos t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt =$$
$$= \int_0^\pi \left(-12\sin t + 4\cos^2 t\right)\, dt = \Big[12\cos t + 2(t + \sin t\cos t)\Big]_0^\pi = 2\pi - 24,$$
$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 F(-2 + t, 0) \cdot (1, 0)\, dt = \int_0^1 \left(2\left[(t-2)^2 - 1\right], t - 2\right) \cdot (1, 0)\, dt =$$
$$= 2\int_0^1 \left[(t-2)^2 - 1\right]\, dt = 2\left[\frac{1}{3}(t-2)^3 - t\right]_0^1 = \frac{8}{3},$$
$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dP = \int_0^1 F(-1 + 2t, 0) \cdot (2, 0)\, dt = \int_0^1 \left((2t-1)^2 - 1, 2t - 1\right) \cdot (2, 0)\, dt =$$
$$= 2\int_0^1 \left[(2t-1)^2 - 1\right]\, dt = 2\left[\frac{1}{6}(2t-1)^3 - t\right]_0^1 = -\frac{4}{3},$$
$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 F(1 + t, 0) \cdot (1, 0)\, dt = \int_0^1 \left(2\left[1+t)^2 - 1\right], 1 + t\right) \cdot (1, 0)\, dt =$$
$$= 2\int_0^1 \left[(1+t)^2 - 1\right]\, dt = 2\left[\frac{1}{3}(1+t)^3 - t\right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP + \int_{\Gamma_3} F \cdot dP + \int_{\Gamma_4} F \cdot dP = 2\pi - 20.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Svolgimento alternativo

Osserviamo che il campo vettoriale F è continuo e che, posto $F = (f_1, f_2)$, la prima componente f_1 non ammette derivata parziale rispetto a y nei punti (x, y) tali che $x^2 + y^2 = 1$ con $y > 0$. Osserviamo anche che $\Omega = A \cup B$, dove

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \; y \ge 0\right\}, \qquad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \le 1, \; y \ge 0\right\}.$$

Posto $\widetilde{F}(x,y) = \left(2\left(x^2+y^2-1\right), x\right)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha che $\widetilde{F}(x,y) = F(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2 > 1$. Inoltre $\widetilde{F}$ è di classe C^1. Posto $\widetilde{F} = (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)$, per il Teorema di Green

$$\int_A \left[\frac{\partial \widetilde{f}_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \widetilde{f}_1}{\partial y}(x,y)\right] dx\, dy = \int_{\partial A} \widetilde{F} \cdot dP =$$

essendo $\widetilde{F} = F$ su ∂A

$$= \int_{\partial A} F \cdot dP.$$

Similmente, posto $\overline{F}(x,y) = \left(x^2+y^2-1, x\right)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha che $\overline{F}(x,y) = F(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2 \leq 1$. Inoltre $\overline{F}$ è di classe C^1. Posto $\overline{F} = (\overline{f_1}, \overline{f_2})$, per il Teorema di Green

$$\int_B \left[\frac{\partial \overline{f_2}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial y}(x,y)\right] dx\, dy = \int_{\partial B} \overline{F} \cdot dP =$$

essendo $\overline{F} = F$ su ∂B

$$= \int_{\partial B} F \cdot dP.$$

Per le proprietà dell'integrale di linea di un campo vettoriale

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\partial A} F \cdot dP + \int_{\partial B} F \cdot dP = \int_A \left[\frac{\partial \widetilde{f}_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \widetilde{f}_1}{\partial y}(x,y)\right] dx\, dy + \int_B \left[\frac{\partial \overline{f_2}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial y}(x,y)\right] dx\, dy =$$

$$= \int_A (1-4y)\, dx\, dy + \int_B (1-2y)\, dx\, dy = m(A) + m(B) - 4\int_A y\, dx\, dy - 2\int_B y\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari nel piano

$$= m(\Omega) - 4\int_{[1,2]\times[0,\pi]} \rho^2 \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta - 2\int_{[0,1]\times[0,\pi]} \rho^2 \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta =$$

$$= 2\pi - 4\left(\int_1^2 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta\right) - 2\left(\int_0^1 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta\right) =$$

$$= 2\pi - 4\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_1^2 \left[-\cos\vartheta\right]_0^\pi - 2\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^1 \left[-\cos\vartheta\right]_0^\pi = 2\pi - 20.$$

Quiz 4. Siano (a_n) una successione reale e $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{B}$ Se $\lim_n S_n = +\infty$, allora $\lim_n a_n \neq 0$.

$\boxed{C}$ Se non esiste $\lim_n a_n$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è indeterminata.

$\boxed{D}$ Se $\lim_n a_n = L > 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{E}$ Se la successione (S_n) è limitata, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{D}$. Infatti, se $\lim_n a_n = L > 0$, allora per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge. Inoltre, per la definizione di limite, preso $\varepsilon = L/2$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha che $|a_n - L| < \varepsilon = L/2$, ovvero $-L/2 < a_n - L < L/2$, da cui segue che $a_n > L - L/2 = L/2 > 0$. Quindi, eventuamente a parte un numero finito di valori di a_n, risulta che $a_n > 0$. Ne segue che la serie di a_n è a termini positivi, e poiché non vale la condizione necessaria, risulta che questa serie diverge positivamente, e quindi diverge.

Le altre affermazioni sono errate. Infatti, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ ha limite zero ma la sua serie (serie armonica) diverge positivamente, e quindi $\boxed{\text{A}}$ e $\boxed{\text{B}}$ sono errate. Inoltre, la successione $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ non ha limite ma la sua serie diverge, e quindi $\boxed{\text{C}}$ è errata.

Infine, la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ è limitata (infatti $S_n = 1$ per n pari, $S_n = 0$ per n dispari) ma la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ è indeterminata, e quindi $\boxed{\text{E}}$ è errata.

Quiz 5. Siano $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ e $f(x,y) = xy - \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1} + y^{n+1}\right)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se n è pari la funzione f ha due punti di minimo locale.

$\boxed{B}$ Se n è dispari la funzione f ha due punti di massimo locale.

$\boxed{C}$ Se n è dispari la funzione f ha due punti di minimo locale.

$\boxed{D}$ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ la funzione f ha solo due punti stazionari: uno di sella e uno di massimo locale.

$\boxed{E}$ Se n è pari la funzione f ha due punti di massimo locale.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - x^n, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - y^n.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \iff \quad \begin{cases} y - x^n = 0 \\ x - y^n = 0 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} y = x^n \\ x = x^{n^2} \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} y = x^n \\ x\left(1 - x^{n^2-1}\right) = 0. \end{cases}$$

Si ha che

$$x\left(1 - x^{n^2-1}\right) = 0 \quad \iff \quad x = 0, \qquad x^{n^2-1} = 1 \quad \implies \quad \begin{cases} x = 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ x = \pm 1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono: se n è pari $(0,0)$, $(1,1)$; se n è dispari $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -nx^{n-1}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -ny^{n-1}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1.$$

Si ha che

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & -n \end{pmatrix},$$

e solo per n dispari

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & -n \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice $H_f(0,0)$ sono discordi, mentre gli autovalori delle matrici $H_f(1,1)$ e $H_f(-1,-1)$ (che sono uguali) sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $(\lambda+n)^2 - 1 = 0$, cioè $\lambda_{1,2} = -n \pm 1$ ovvero $\lambda_1 = -n+1$ e $\lambda_2 = -n-1$. Essendo $n \geq 2$ si ha che $\lambda_{1,2} < 0$.

Ne segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ il punto $(0,0)$ è di sella per f, il punto $(1,1)$ è di massimo locale per f, e, solo nel caso n dispari, il punto $(-1,-1)$ è di massimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 6. Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = (x+y)^6, \ 0 \leq x \leq 1, \ -x \leq y \leq 0\right\}$. L'integrale $\int_\Sigma \frac{z - 8xy}{\sqrt{72(x+y)^{10}+1}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ $\frac{57}{28}$.

$\boxed{B}$ $-\frac{2}{3}$.

$\boxed{C}$ $\frac{57}{56}$.

$\boxed{D}$ $-\dfrac{57}{56}$.

$\boxed{E}$ $-\dfrac{57}{28}$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $z = (x+y)^6$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ 0 \le x \le 1, \ \ -x \le y \le 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \big(x, y, (x+y)^6\big)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{z - 8xy}{\sqrt{72(x+y)^{10}+1}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{z-8xy}{\sqrt{72(x+y)^{10}+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\, \|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-6(x+y)^5, -6(x+y)^5, 1\right).$$

Quindi $\|N(x,y)\| = \sqrt{72(x+y)^{10}+1}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{z-8xy}{\sqrt{72(x+y)^{10}+1}}\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\, \|N(x,y)\|\, dx\, dy = \int_K \left[(x+y)^6 - 8xy\right]\, dx\, dy =$$

essendo K un insieme y-semplice si ottiene

$$= \int_0^1 \left(\int_{-x}^0 \left[(x+y)^6 - 8xy\right]\, dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{7}(x+y)^7 - 4xy^2\right]_{-x}^0 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{7}x^7 + 4x^3\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{56}x^8 + x^4\right]_0^1 = \frac{57}{56}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 7. Siano $0 < a < R$, $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, \ \ x \le a\right\}$. Il volume di Ω vale

$\boxed{A}$ $\dfrac{2}{3}\pi R^3 + \dfrac{2}{3}\pi a R^2$.

$\boxed{B}$ $\dfrac{2}{3}\pi R^3 + \dfrac{2}{3}\pi a^2 R$.

$\boxed{C}$ $\dfrac{2}{3}\pi R^3 + \dfrac{1}{3}\pi a R^2 + \dfrac{1}{3}\pi a^3$.

$\boxed{D}$ $\dfrac{2}{3}\pi R^3 + \pi a^2 R - \dfrac{1}{3}\pi a^3$.

$\boxed{E}$ $\dfrac{2}{3}\pi R^3 + \pi a R^2 - \dfrac{1}{3}\pi a^3$.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è costituito dai punti della sfera di centro l'origine e raggio R con ascissa $x \le a$. Passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x si ha che il volume di Ω è

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} \rho\, d\rho\, d\vartheta\, dx,$$

dove

$$\Omega' = \left\{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : \ \ \rho^2 + x^2 \le R^2, \ \ x \le a, \ \ \rho \ge 0, \ \ 0 \le \vartheta \le 2\pi\right\}.$$

Osserviamo che

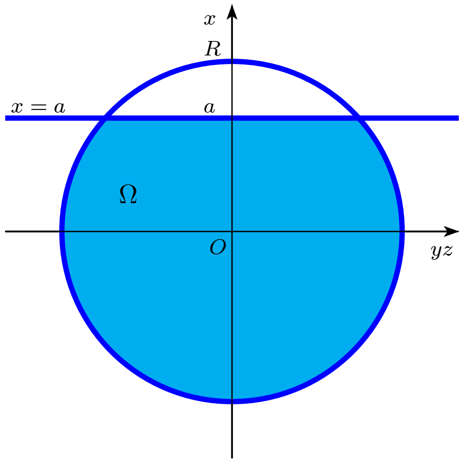
$$\begin{cases} \rho^2 + x^2 \le R^2 \\ x \le a \\ \rho \ge 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \le \rho \le \sqrt{R^2 - x^2} \\ -R \le x \le R, \ \ x \le a \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \le \rho \le \sqrt{R^2 - x^2} \\ -R \le x \le a. \end{cases}$$

Quindi

$$m(\Omega) = \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 2\pi \int_{-R}^{a} \left(\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \rho \, d\rho \right) dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^{a} \left[\frac{1}{2}\rho^2 \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \pi \int_{-R}^{a} \left(R^2 - x^2\right) dx =$$

$$= \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-R}^{a} = \pi \left(R^2 a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}R^3 \right).$$



Ne segue che

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \le \rho \le \sqrt{R^2 - x^2}, \; 0 \le \vartheta \le 2\pi, \; -R \le x \le a \right\}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 8. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+2)!\, e^{2n}}{(n+1)^{2n}} (x-2)^n$ vale

$\boxed{A}$ e.

$\boxed{B}$ 2.

$\boxed{C}$ $\frac{1}{e}$.

$\boxed{D}$ $\frac{1}{4}$.

$\boxed{E}$ 4.

SVOLGIMENTO

È una serie di potenze centrata in $x_0 = 2$. Posto $t = x - 2$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+2)!\, e^{2n}}{(n+1)^{2n}} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+2)!\, e^{2n}}{(n+1)^{2n}} t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0.

Posto $a_n = (-1)^n \dfrac{(2n+2)!\, e^{2n}}{(n+1)^{2n}}$, si ha che

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(2n+4)!\, e^{2n+2}}{(n+2)^{2n+2}} \cdot \frac{(n+1)^{2n}}{(2n+2)!\, e^{2n}} = \frac{(2n+4)(2n+3) \cdot (2n+2)!\, e^2 \, e^{2n}}{(n+2)^2 \, (n+2)^{2n}} \cdot \frac{(n+1)^{2n}}{(2n+2)!\, e^{2n}} =$$

$$= \frac{(2n+4)(2n+3)}{(n+2)^2} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{2n} e^2 = \frac{(2n+4)(2n+3)}{(n+2)^2} \cdot \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n \right]^2} e^2.$$

Poiché $\displaystyle\lim_n \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n = e$, si ha che

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{(2n+4)(2n+3)}{(n+2)^2} \cdot \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n \right]^2} e^2 = 4.$$

Per il Teorema del rapporto il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{4}$. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Versione V2

Quiz 1. Sia $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = (x+y)^7, \; 0 \le y \le 1, \; -y \le x \le 0\right\}$. L'integrale $\int_\Sigma \frac{z + 8xy}{\sqrt{98(x+y)^{12}+1}}\,d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ $-\frac{71}{36}$.

$\boxed{B}$ $-\frac{2}{3}$.

$\boxed{C}$ $\frac{71}{72}$.

$\boxed{D}$ $-\frac{71}{72}$.

$\boxed{E}$ $\frac{71}{36}$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $z = (x+y)^7$, dove

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le y \le 1, \; -y \le x \le 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = \big(x, y, (x+y)^7\big)$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z + 8xy}{\sqrt{98(x+y)^{12}+1}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{z + 8xy}{\sqrt{98(x+y)^{12}+1}}\,d\sigma = \int_\Sigma f\,d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y))\,\|N(x, y)\|\,dx\,dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x, y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) = \left(-7(x+y)^6, -7(x+y)^6, 1\right).$$

Quindi $\|N(x, y)\| = \sqrt{98(x+y)^{12}+1}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{z + 8xy}{\sqrt{98(x+y)^{12}+1}}\,d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y))\,\|N(x, y)\|\,dx\,dy = \int_K \left[(x+y)^7 + 8xy\right]\,dx\,dy =$$

essendo K un insieme x-semplice si ottiene

$$= \int_0^1 \left(\int_{-y}^0 \left[(x+y)^7 + 8xy\right]\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{8}(x+y)^8 + 4x^2 y\right]_{-y}^0 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{8}y^8 - 4y^3\right) dy =$$

$$= \left[\frac{1}{72}y^9 - y^4\right]_0^1 = -\frac{71}{72}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 2. Siano $0 < a < R$, $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, \; y \le a\right\}$. Il volume di Ω vale

$\boxed{A}$ $\frac{2}{3}\pi R^3 + \pi a R^2 - \frac{1}{3}\pi a^3$.

$\boxed{B}$ $\frac{2}{3}\pi R^3 + \pi a^2 R - \frac{1}{3}\pi a^3$.

$\boxed{C}$ $\frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{1}{3}\pi a R^2 + \frac{1}{3}\pi a^3$.

$\boxed{D}$ $\frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{2}{3}\pi a R^2$.

$\boxed{E}$ $\frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{2}{3}\pi a^2 R$.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è costituito dai punti della sfera di centro l'origine e raggio R con ordinata $y \leq a$. Passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y si ha che il volume di Ω è

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} \rho\, d\rho\, d\vartheta\, dy,$$

dove

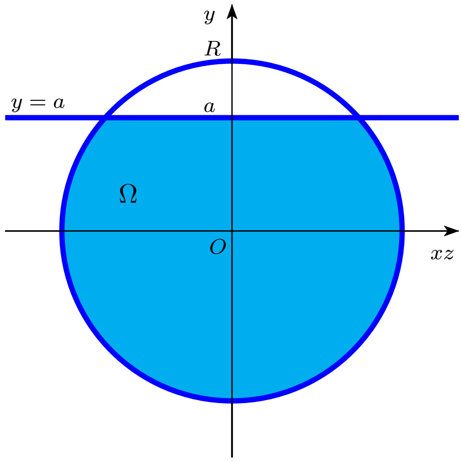
$$\Omega' = \left\{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 :\ \ \rho^2 + y^2 \leq R^2,\ \ y \leq a,\ \ \rho \geq 0,\ \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\right\}.$$

Osserviamo che

$$\begin{cases} \rho^2 + y^2 \leq R^2 \\ y \leq a \\ \rho \geq 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{R^2 - y^2} \\ -R \leq y \leq R,\ \ y \leq a \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{R^2 - y^2} \\ -R \leq y \leq a. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\Omega' = \left\{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 :\ \ 0 \leq \rho \leq \sqrt{R^2 - y^2},\ \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,\ \ -R \leq y \leq a\right\}.$$



Quindi

$$m(\Omega) = \int_{\Omega'} \rho\, d\rho\, d\vartheta\, dy = 2\pi \int_{-R}^{a} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \rho\, d\rho \right) dy =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^{a} \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dy = \pi \int_{-R}^{a} \left(R^2 - y^2\right) dy =$$

$$= \pi \left[R^2 y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-R}^{a} = \pi \left(R^2 a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}R^3\right).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. Siano (a_n) una successione reale e $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$.

$\boxed{B}$ Se la successione (S_n) è illimitata, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{C}$ Se non esiste $\lim_n a_n$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è indeterminata.

$\boxed{D}$ Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge, allora $\lim_n a_n \neq 0$.

$\boxed{E}$ Se $\lim_n a_n = L > 1$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$. Infatti, se $\lim_n a_n = L > 1$, allora per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge. Inoltre, per la definizione di limite, preso $\varepsilon = L - 1$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha che $|a_n - L| < \varepsilon = L - 1$, ovvero $1 - L < a_n - L < L - 1$, da cui segue che $a_n > L + 1 - L = 1 > 0$. Quindi, eventuamente a parte un numero finito di valori di a_n, risulta che $a_n > 0$. Ne segue che la serie di a_n è a termini positivi, e poiché non vale la condizione necessaria, risulta che questa serie diverge positivamente, e quindi diverge.

Le altre affermazioni sono errate. Infatti, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ ha limite zero ma la sua serie (serie armonica) diverge positivamente, e quindi $\boxed{\text{A}}$ e $\boxed{\text{D}}$ sono errate. Inoltre, la successione $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ non ha limite ma la sua serie diverge, e quindi $\boxed{\text{C}}$ è errata.

Infine, la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-2)^k$ è illimitata (infatti $S_n = \frac{1+2^{n+1}}{3}$ per n pari, $S_n = \frac{1-2^{n+1}}{3}$ per n dispari) ma la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n$ è indeterminata perché la successione (S_n) non ha limite, e quindi $\boxed{\text{B}}$ è errata.

Quiz 4. Siano $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ e $f(x,y) = xy - \frac{1}{n+2}\left(x^{n+2} + y^{n+2}\right)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se n è dispari la funzione f ha due punti di massimo locale.

$\boxed{B}$ Se n è pari la funzione f ha due punti di minimo locale.

$\boxed{C}$ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ la funzione f ha solo due punti stazionari: uno di sella e uno di massimo locale.

$\boxed{D}$ Se n è pari la funzione f ha due punti di massimo locale.

$\boxed{E}$ Se n è dispari la funzione f ha due punti di minimo locale.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - x^{n+1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - y^{n+1}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y - x^{n+1} = 0 \\ x - y^{n+1} = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = x^{n+1} \\ x = x^{(n+1)^2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = x^{n+1} \\ x\left(1 - x^{(n+1)^2-1}\right) = 0. \end{cases}$$

Si ha che

$$x\left(1 - x^{(n+1)^2-1}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \qquad x^{(n+1)^2-1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ x = \pm 1 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono: se n è dispari $(0,0)$, $(1,1)$; se n è pari $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -(n+1)x^n, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -(n+1)y^n, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1.$$

Si ha che

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -n-1 & 1 \\ 1 & -n-1 \end{pmatrix},$$

e solo per n pari

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -n-1 & 1 \\ 1 & -n-1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice $H_f(0,0)$ sono discordi, mentre gli autovalori delle matrici $H_f(1,1)$ e $H_f(-1,-1)$ (che sono uguali) sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $(\lambda + n + 1)^2 - 1 = 0$, cioè $\lambda_{1,2} = -n - 1 \pm 1$, ovvero $\lambda_1 = -n$ e $\lambda_2 = -n - 2$. Essendo $n \geq 2$ si ha che $\lambda_{1,2} < 0$.

Ne segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ il punto $(0,0)$ è di sella per f, il punto $(1,1)$ è di massimo locale per f, e, solo nel caso n pari, il punto $(-1,-1)$ è di massimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 5. Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, f_3)$, $K = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 + z^2 \leq 16\right\}$, $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (y,z) \in K, \ -5 \leq x \leq 3\right\}$, $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 = 16, \ -5 \leq x \leq 3\right\}$.

Il flusso del rotore di F attraverso la superficie Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ sia uscente da Ω, vale

$\boxed{A}$ $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial z}(-5,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial z}(3,y,z)\right] dy\,dz + \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-5,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial y}(3,y,z)\right] dy\,dz.$

$\boxed{B}$ $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-5,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial y}(3,y,z)\right] dy\,dz - \int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial z}(-5,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial z}(3,y,z)\right] dy\,dz.$

$\boxed{C}$ $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial z}(-5,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(3,y,z)\right] dy\,dz - \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-5,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial y}(3,y,z)\right] dy\,dz.$

$\boxed{D}$ 0.

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-5,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial y}(3,y,z)\right] dy\,dz - \int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial z}(-5,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(3,y,z)\right] dy\,dz.$

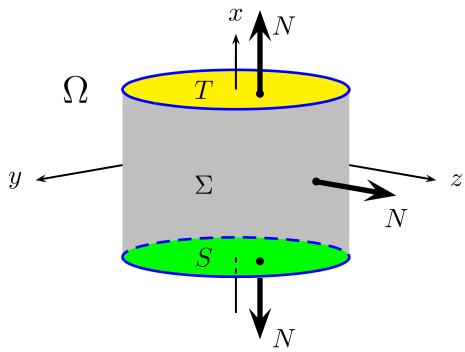
SVOLGIMENTO

Il bordo di Ω è la porzione del cilindro retto di equazione $y^2 + z^2 = 16$ compreso fra i piani $x = -5$ e $x = 3$.

Quindi $\partial\Omega = \Sigma \cup S \cup T$, dove

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 \le 16, \ x = -5\right\},$$

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 \le 16, \ x = 3\right\}.$$



Poiché F è di classe C^1, il flusso uscente del rotore di F dal bordo di Ω è zero. Quindi

$$0 = \int_{\partial\Omega} \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma = \int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma + \int_S \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma + \int_T \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma \quad \Longrightarrow \quad \int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma = -\int_S \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma - \int_T \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma,$$

dove le superfici Σ, S, T sono tutte orientate secondo il verso uscente da Ω.

Si ha che $S = \sigma_S(K)$, dove $\sigma_S(y,z) = (-5,y,z)$ e $T = \sigma_T(K)$, dove $\sigma_T(y,z) = (3,y,z)$.

Si ha che

$$\int_S \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma_S(y,z)) \cdot N(y,z)\,dy\,dz,$$

dove $N(y,z)$ è un vettore normale a S uscente da Ω.

Un vettore normale a S è

$$N_S(y,z) = \frac{\partial\sigma_S}{\partial y}(y,z) \wedge \frac{\partial\sigma_S}{\partial z}(y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$$

che è entrante in Ω. Quindi un vettore uscente è $N(y,z) = -N_S(y,z) = (-1,0,0)$. Essendo

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z),\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)\right),$$

si ha che

$$\int_S \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma_S(y,z)) \cdot N(y,z)\,dy\,dz = -\int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-5,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(-5,y,z)\right] dy\,dz.$$

Similmente si ha che

$$\int_T \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma_T(y,z)) \cdot N(y,z)\,dy\,dz,$$

dove $N(y,z)$ è un vettore normale a T uscente da Ω.

Un vettore normale a T è

$$N_T(y,z) = \frac{\partial\sigma_T}{\partial y}(y,z) \wedge \frac{\partial\sigma_T}{\partial z}(y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$$

che è uscente da Ω. Quindi $N(y,z) = N_T(y,z) = (1,0,0)$. Ne segue che

$$\int_T \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma_T(y,z)) \cdot N(y,z)\,dy\,dz = \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(3,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(3,y,z)\right] dy\,dz.$$

In conclusione si ottiene

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma = -\int_S \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma - \int_T \mathrm{rot}F \cdot n\,d\sigma =$$

$$= \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-5,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(-5,y,z)\right] dy\,dz - \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(3,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(3,y,z)\right] dy\,dz =$$

$$= \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-5,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial y}(3,y,z)\right] dx\,dz - \int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial z}(-5,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(3,y,z)\right] dx\,dz.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 6. Siano $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $F(x,y) = \begin{cases} \left(y,\, x^2+y^2-1\right) & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ \left(y,\, 2\left(x^2+y^2-1\right)\right) & \text{se } x^2+y^2 > 1, \end{cases}$

$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2+y^2 \le 4, \ \ x \ge 0\right\}$. L'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω percorso in senso antiorario vale

$\boxed{A}$ $\dfrac{32}{3} - 2\pi$.

$\boxed{B}$ $24 - 2\pi$.

$\boxed{C}$ $\dfrac{16}{3} - 2\pi$.

$\boxed{D}$ $20 - 2\pi$.

$\boxed{E}$ $\dfrac{64}{3} - 2\pi$.

SVOLGIMENTO

Si osserva che $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (vedi figura). Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP + \int_{\Gamma_3} F \cdot dP + \int_{\Gamma_4} F \cdot dP.$$

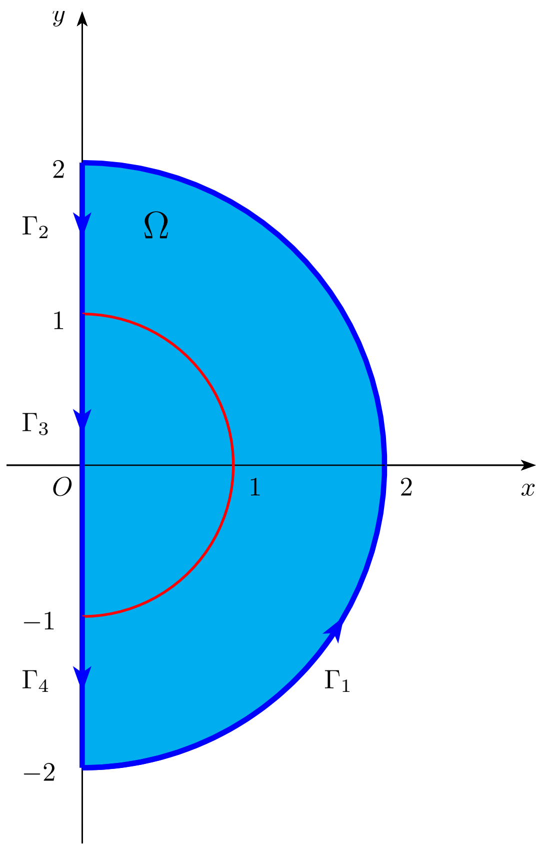
Si ha che

$$\Gamma_1 = \text{im}(\gamma_1), \quad \gamma_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (2\cos t, 2\sin t),$$

$$\Gamma_2 = \text{im}(\gamma_2), \quad \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (0, 2-t),$$

$$\Gamma_3 = \text{im}(\gamma_3), \quad \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (0, 1-2t),$$

$$\Gamma_4 = \text{im}(\gamma_4), \quad \gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_4(t) = (0, -1-t).$$



Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(2\cos t, 2\sin t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t, 6) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(12\cos t - 4\sin^2 t\right)\, dt = \Big[12\sin t - 2(t - \sin t\cos t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 24 - 2\pi,$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 F(0, 2-t) \cdot (0,-1)\, dt = \int_0^1 \left(2-t, 2\left[(t-2)^2 - 1\right]\right) \cdot (0,-1)\, dt =$$

$$= -2\int_0^1 \left[(t-2)^2 - 1\right]\, dt = -2\left[\frac{1}{3}(t-2)^3 - t\right]_0^1 = -\frac{8}{3},$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dP = \int_0^1 F(0, 1-2t) \cdot (0,-2)\, dt = \int_0^1 \left(1-2t, (2t-1)^2 - 1\right) \cdot (0,-2)\, dt =$$

$$= -2\int_0^1 \left[(2t-1)^2 - 1\right]\, dt = -2\left[\frac{1}{6}(2t-1)^3 - t\right]_0^1 = \frac{4}{3},$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 F(0,-1-t)\cdot(0,-1)\,dt = \int_0^1 \left(-1-t, 2\left[(1+t)^2-1\right]\right)\cdot(0,-1)\,dt =$$

$$= -2\int_0^1 \left[(1+t)^2-1\right]\,dt = -2\left[\frac{1}{3}(1+t)^3 - t\right]_0^1 = -\frac{8}{3}.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot dP = \int_{\Gamma_1} F\cdot dP + \int_{\Gamma_2} F\cdot dP + \int_{\Gamma_3} F\cdot dP + \int_{\Gamma_4} F\cdot dP = 20-2\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Svolgimento alternativo

Osserviamo che il campo vettoriale F è continuo e che, posto $F=(f_1,f_2)$, la seconda componente f_2 non ammette derivata parziale rispetto a x nei punti (x,y) tali che $x^2+y^2=1$ con $x>0$. Osserviamo anche che $\Omega = A\cup B$, dove

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\ge 0\right\},\qquad B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1,\ \ x\ge 0\right\}.$$

Posto $\widetilde{F}(x,y) = \Big(y,\, 2\left(x^2+y^2-1\right)\Big)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si ha che $\widetilde{F}(x,y)=F(x,y)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2>1$. Inoltre $\widetilde{F}$ è di classe C^1. Posto $\widetilde{F}=(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2)$, per il Teorema di Green

$$\int_A \left[\frac{\partial\widetilde{f}_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial\widetilde{f}_1}{\partial y}(x,y)\right]dx\,dy = \int_{\partial A}\widetilde{F}\cdot dP =$$

essendo $\widetilde{F}=F$ su ∂A

$$= \int_{\partial A} F\cdot dP.$$

Similmente, posto $\overline{F}(x,y) = \Big(y,\, x^2+y^2-1\Big)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si ha che $\overline{F}(x,y)=F(x,y)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2\le 1$. Inoltre $\overline{F}$ è di classe C^1. Posto $\overline{F}=(\overline{f_1},\overline{f_2})$, per il Teorema di Green

$$\int_B \left[\frac{\partial\overline{f_2}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial\overline{f_1}}{\partial y}(x,y)\right]dx\,dy = \int_{\partial B}\overline{F}\cdot dP =$$

essendo $\overline{F}=F$ su ∂B

$$= \int_{\partial B} F\cdot dP.$$

Per le proprietà dell'integrale di linea di un campo vettoriale

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot dP = \int_{\partial A} F\cdot dP + \int_{\partial B} F\cdot dP = \int_A \left[\frac{\partial\widetilde{f}_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial\widetilde{f}_1}{\partial y}(x,y)\right]dx\,dy + \int_B \left[\frac{\partial\overline{f_2}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial\overline{f_1}}{\partial y}(x,y)\right]dx\,dy =$$

$$= \int_A (4x-1)\,dx\,dy + \int_B (2x-1)\,dx\,dy = 4\int_A x\,dx\,dy + 2\int_B x\,dx\,dy - m(A) - m(B) =$$

passando in coordinate polari nel piano

$$= 4\int_{[1,2]\times[-\pi/2,\pi/2]} \rho^2\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta + 2\int_{[0,1]\times[-\pi/2,\pi/2]}\rho^2\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta - m(\Omega) =$$

$$= 4\left(\int_1^2 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta\right) + 2\left(\int_0^1\rho^2\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta\right) - 2\pi =$$

$$= 4\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_1^2\Big[\sin\vartheta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 2\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^1\Big[\sin\vartheta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} - 2\pi = 20-2\pi.$$

Quiz 7. Sia $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ \sqrt{y^4+2y^2+1}\le x\le\sqrt{y^4+y^2+10},\ \ 0\le y\le 4\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{8x}{y+3}\,dx\,dy$ vale

$\boxed{A}$ 16.

$\boxed{B}$ 18.

$\boxed{C}$ 32.

$\boxed{D}$ 36.

$\boxed{E}$ 9.

SVOLGIMENTO

Poiché $\sqrt{y^4+2y^2+1} \leq \sqrt{y^4+y^2+10} \quad \Longleftrightarrow \quad -3 \leq y \leq 3$, si ha che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{y^4+2y^2+1} \leq x \leq \sqrt{y^4+y^2+10}, \ \ 0 \leq y \leq 3\right\}.$$

Essendo Ω un insieme x-semplice, si ha che

$$\int_\Omega \frac{8x}{y+3}\,dx\,dy = 8\int_0^3 \frac{1}{y+3}\left(\int_{\sqrt{y^4+2y^2+1}}^{\sqrt{y^4+y^2+10}} x\,dx\right)dy = 8\int_0^3 \frac{1}{y+3}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\sqrt{y^4+2y^2+1}}^{\sqrt{y^4+y^2+10}} dy =$$

$$= 4\int_0^3 \frac{1}{y+3}\left(9-y^2\right)dy = 4\int_0^3 (3-y)\,dy = 4\left[-\frac{1}{2}(3-y)^2\right]_0^3 = 18.$$

La risposta corretta è $\boxed{\mathrm{B}}$.

Quiz 8. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n+2)!\,e^{3n}}{(n+2)^{3n}}\,(x-3)^n$ vale

$\boxed{A}$ 27.

$\boxed{B}$ e.

$\boxed{C}$ 3.

$\boxed{D}$ $\frac{1}{e}$.

$\boxed{E}$ $\frac{1}{27}$.

SVOLGIMENTO

È una serie di potenze centrata in $x_0 = 3$. Posto $t = x-3$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n+2)!\,e^{3n}}{(n+2)^{3n}}\,(x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n+2)!\,e^{3n}}{(n+2)^{3n}}\,t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0.

Posto $a_n = (-1)^n \dfrac{(3n+2)!\,e^{3n}}{(n+2)^{3n}}$, si ha che

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(3n+5)!\,e^{3n+3}}{(n+3)^{3n+3}} \cdot \frac{(n+2)^{3n}}{(3n+2)!\,e^{3n}} = \frac{(3n+5)(3n+4)(3n+3)\cdot(3n+2)!\,e^3\,e^{3n}}{(n+3)^3\,(n+3)^{3n}} \cdot \frac{(n+2)^{3n}}{(3n+2)!\,e^{3n}} =$$

$$= \frac{(3n+5)(3n+4)(3n+3)}{(n+3)^3}\cdot\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{3n} e^3 = \frac{(3n+5)(3n+4)(3n+3)}{(n+3)^3}\cdot\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\right]^3}\,e^3.$$

Poiché $\displaystyle\lim_n \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n = e$, si ha che

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{(3n+5)(3n+4)(3n+3)}{(n+3)^3}\cdot\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\right]^3}\,e^3 = 27.$$

Per il Teorema del rapporto il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{27}$. La risposta corretta è $\boxed{\mathrm{E}}$.

Versione V3

Quiz 1. Siano (a_n) una successione reale e $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se non esiste $\lim_n a_n$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è indeterminata.

$\boxed{B}$ Se $\lim_n S_n = +\infty$, allora $\lim_n a_n \neq 0$.

$\boxed{C}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{D}$ Se $\lim_n a_n = L < 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{E}$ Se la successione (S_n) è limitata, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$. Infatti, se $\lim_n a_n = L < 0$, allora per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge. Inoltre, per la definizione di limite, preso $\varepsilon = -L/2$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha che $|a_n - L| < \varepsilon = -L/2$, ovvero $L/2 < a_n - L < -L/2$, da cui segue che $a_n < L - L/2 = L/2 < 0$. Quindi, eventuamente a parte un numero finito di valori di a_n, risulta che $a_n < 0$. Ne segue che la serie di a_n è a termini negativi, e poiché non vale la condizione necessaria, risulta che questa serie diverge negativamente, e quindi diverge.

Le altre affermazioni sono errate. Infatti, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ ha limite zero ma la sua serie (serie armonica) diverge positivamente, e quindi $\boxed{\text{B}}$ e $\boxed{\text{C}}$ sono errate. Inoltre, la successione $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ non ha limite ma la sua serie diverge, e quindi $\boxed{\text{A}}$ è errata.

Infine, la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ è limitata (infatti $S_n = 1$ per n pari, $S_n = 0$ per n dispari) ma la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ è indeterminata, e quindi $\boxed{\text{E}}$ è errata.

Quiz 2. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = (x + y)^8, \ -1 \leq x \leq 0, \ 0 \leq y \leq -x\}$. L'integrale $\int_\Sigma \frac{z - 8xy}{\sqrt{128(x + y)^{14} + 1}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ $\frac{90}{91}$.

$\boxed{B}$ $\frac{45}{91}$.

$\boxed{C}$ $\frac{91}{90}$.

$\boxed{D}$ $\frac{2}{3}$.

$\boxed{E}$ $\frac{91}{45}$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $z = (x + y)^8$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 0, \ 0 \leq y \leq -x\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, (x + y)^8)$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z - 8xy}{\sqrt{7128(x + y)^{14} + 1}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{z - 8xy}{\sqrt{128(x + y)^{14} + 1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y))\, \|N(x, y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-8(x+y)^7, -8(x+y)^7, 1\right).$$

Quindi $\|N(x,y)\| = \sqrt{128(x+y)^{14}+1}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{z-8xy}{\sqrt{128(x+y)^{14}+1}}\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\,\|N(x,y)\|\, dx\, dy = \int_K \left[(x+y)^8 - 8xy\right]\, dx\, dy =$$

essendo K un insieme y-semplice si ottiene

$$= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{-x} \left[(x+y)^8 - 8xy\right]\, dy\right) dx = \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{9}(x+y)^9 - 4xy^2\right]_0^{-x} dx = \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{9}x^9 - 4x^3\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{90}x^8 - x^4\right]_{-1}^0 = \frac{91}{90}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 3. Siano $0 < R < a$, $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ x \le R\right\}$. Il volume di Ω vale

$\boxed{A}$ $\frac{2}{3}\pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a R^2$.

$\boxed{B}$ $\frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a^2 R - \frac{1}{3}\pi R^3$.

$\boxed{C}$ $\frac{2}{3}\pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a^2 R$.

$\boxed{D}$ $\frac{2}{3}\pi a^3 + \frac{1}{3}\pi a^2 R + \frac{1}{3}\pi R^3$.

$\boxed{E}$ $\frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a R^2 - \frac{1}{3}\pi R^3$.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è costituito dai punti della sfera di centro l'origine e raggio a con ascissa $x \le R$. Passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x si ha che il volume di Ω è

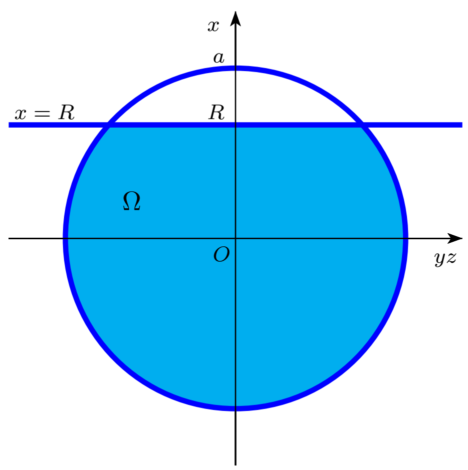
$$m(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} \rho\, d\rho\, d\vartheta\, dx,$$

dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,x) \in \mathbb{R}^3 :\ \rho^2 + x^2 \le a^2,\ x \le R,\ \rho \ge 0,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi\right\}.$$

Osserviamo che

$$\begin{cases} \rho^2 + x^2 \le a^2 \\ x \le R \\ \rho \ge 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \le \rho \le \sqrt{a^2-x^2} \\ -a \le x \le a,\ \ R \le a \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \le \rho \le \sqrt{a^2-x^2} \\ -a \le x \le R. \end{cases}$$



Ne segue che

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,x) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le \rho \le \sqrt{a^2-x^2},\ 0 \le \vartheta \le 2\pi,\ -a \le x \le R\right\}.$$

Quindi

$$m(\Omega) = \int_{\Omega'} \rho\, d\rho\, d\vartheta\, dx = 2\pi \int_{-a}^R \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \rho\, d\rho\right) dx =$$

$$= 2\pi \int_{-a}^R \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \pi \int_{-a}^R \left(a^2 - x^2\right) dx =$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^R = \pi\left(a^2 R - \frac{1}{3}R^3 + \frac{2}{3}a^3\right).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 4. Siano $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ e $f(x,y) = \dfrac{1}{n+1}\left(x^{n+1} + y^{n+1}\right) - xy$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se n è pari la funzione f ha due punti di minimo locale.

$\boxed{B}$ Se n è dispari la funzione f ha due punti di minimo locale.

$\boxed{C}$ Se n è dispari la funzione f ha due punti di massimo locale.

$\boxed{D}$ Se n è pari la funzione f ha due punti di massimo locale.

$\boxed{E}$ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ la funzione f ha solo due punti stazionari: uno di sella e uno di minimo locale.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^n - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^n - x.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^n - y = 0 \\ y^n - x = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = x^n \\ x = x^{n^2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = x^n \\ x\left(1 - x^{n^2-1}\right) = 0. \end{cases}$$

Si ha che

$$x\left(1 - x^{n^2-1}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \qquad x^{n^2-1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ x = \pm 1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono: se n è pari $(0,0)$, $(1,1)$; se n è dispari $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = nx^{n-1}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = ny^{n-1}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1.$$

Si ha che

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} n & -1 \\ -1 & n \end{pmatrix},$$

e solo per n dispari

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} n & -1 \\ -1 & n \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice $H_f(0,0)$ sono discordi, mentre gli autovalori delle matrici $H_f(1,1)$ e $H_f(-1,-1)$ (che sono uguali) sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $(\lambda - n)^2 - 1 = 0$, cioè $\lambda_{1,2} = n \pm 1$ ovvero $\lambda_1 = n+1$ e $\lambda_2 = n-1$. Essendo $n \geq 2$ si ha che $\lambda_{1,2} > 0$.

Ne segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ il punto $(0,0)$ è di sella per f, il punto $(1,1)$ è di minimo locale per f, e, solo nel caso n dispari, il punto $(-1,-1)$ è di minimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 5. Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x^4 + x^2 + 7} \leq y \leq \sqrt{x^4 + 2x^2 + 3}, \ 0 \leq x \leq 3\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{8y}{x+2}\, dx\, dy$ vale

$\boxed{A}$ 2.

$\boxed{B}$ 4.

$\boxed{C}$ -6.

$\boxed{D}$ -8.

$\boxed{E}$ -12.

SVOLGIMENTO

Poiché $\sqrt{x^4 + x^2 + 7} \leq \sqrt{x^4 + 2x^2 + 3} \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \geq 2$, si ha che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x^4 + x^2 + 7} \leq y \leq \sqrt{x^4 + 2x^2 + 3}, \ 2 \leq x \leq 3\right\}.$$

Essendo Ω un insieme y-semplice, si ha che

$$\int_\Omega \frac{8y}{x+2}\,dx\,dy = 8\int_2^3 \frac{1}{x+2}\left(\int_{\sqrt{x^4+x^2+7}}^{\sqrt{x^4+2x^2+3}} y\,dy\right)dx = 8\int_2^3 \frac{1}{x+2}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{\sqrt{x^4+x^2+7}}^{\sqrt{x^4+2x^2+3}} dx =$$

$$= 4\int_2^3 \frac{1}{x+2}\left(x^2-4\right)\,dx = 4\int_2^3 (x-2)\,dx = 4\left[\frac{1}{2}(x-2)^2\right]_2^3 = 2.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 6. Siano $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, $F=(f_1,f_2,f_3)$, $K=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^2+z^2\le 9\}$, $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ (x,z)\in K,\ \ -2\le y\le 6\}$, $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+z^2=9,\ \ -2\le y\le 6\}$.

Il flusso del rotore di F attraverso la superficie Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ sia uscente da Ω, vale

$\boxed{A}$ 0.

$\boxed{B}$ $\displaystyle\int_K\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-2,z)+\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,6,z)\right]dx\,dz-\int_K\left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-2,z)+\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,6,z)\right]dx\,dz.$

$\boxed{C}$ $\displaystyle\int_K\left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-2,z)+\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,6,z)\right]dx\,dz+\int_K\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-2,z)+\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,6,z)\right]dx\,dz.$

$\boxed{D}$ $\displaystyle\int_K\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-2,z)-\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,6,z)\right]dx\,dz-\int_K\left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-2,z)-\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,6,z)\right]dx\,dz.$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_K\left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-2,z)-\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,6,z)\right]dx\,dz-\int_K\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-2,z)-\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,6,z)\right]dx\,dz.$

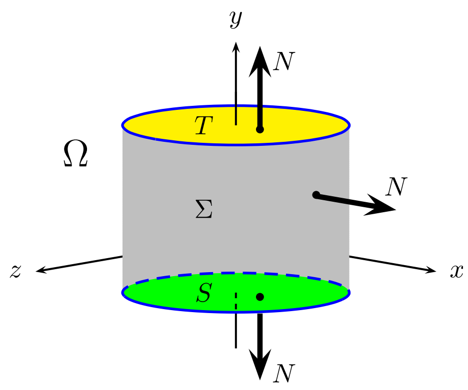
SVOLGIMENTO

Il bordo di Ω è la porzione del cilindro retto di equazione $x^2+z^2=9$ compreso fra i piani $y=-2$ e $y=6$.

Quindi $\partial\Omega=\Sigma\cup S\cup T$, dove

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+z^2\le 9,\ \ y=-2\},$$

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+z^2\le 9,\ \ y=6\}.$$



Poiché F è di classe C^1, il flusso uscente del rotore di F dal bordo di Ω è zero. Quindi

$$0=\int_{\partial\Omega}\mathrm{rot}F\cdot n\,d\sigma=\int_\Sigma \mathrm{rot}F\cdot n\,d\sigma+\int_S \mathrm{rot}F\cdot n\,d\sigma+\int_T \mathrm{rot}F\cdot n\,d\sigma \quad\Longrightarrow\quad \int_\Sigma \mathrm{rot}F\cdot n\,d\sigma=-\int_S \mathrm{rot}F\cdot n\,d\sigma-\int_T \mathrm{rot}F\cdot n\,d\sigma,$$

dove le superfici Σ, S, T sono tutte orientate secondo il verso uscente da Ω.

Si ha che $S=\sigma_S(K)$, dove $\sigma_S(x,z)=(x,-2,z)$ e $T=\sigma_T(K)$, dove $\sigma_T(x,z)=(x,6,z)$.

Si ha che

$$\int_S \mathrm{rot}F\cdot n\,d\sigma=\int_K \mathrm{rot}F(\sigma_S(x,z))\cdot N(x,z)\,dx\,dz,$$

dove $N(x,z)$ è un vettore normale a S uscente da Ω.

Un vettore normale a S è

$$N_S(x,z)=\frac{\partial\sigma_S}{\partial x}(x,z)\wedge\frac{\partial\sigma_S}{\partial z}(x,z)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(0,-1,0)$$

che è uscente da Ω. Quindi $N(x,z)=N_S(x,z)=(0,-1,0)$. Essendo

$$\mathrm{rot}F(x,y,z)=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z),\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)\right),$$

si ha che

$$\int_S \mathrm{rot}F\cdot n\,d\sigma=\int_K \mathrm{rot}F(\sigma_S(x,z))\cdot N(x,z)\,dx\,dz=-\int_K\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-2,z)-\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-2,z)\right]dx\,dz.$$

Similmente si ha che

$$\int_T \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma_T(x,z)) \cdot N(x,z)\, dx\, dz,$$

dove $N(x,z)$ è un vettore normale a T uscente da Ω.

Un vettore normale a T è

$$N_T(x,z) = \frac{\partial \sigma_T}{\partial x}(x,z) \wedge \frac{\partial \sigma_T}{\partial z}(x,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0)$$

che è entrante in Ω. Quindi un vettore normale uscente è $N(x,z) = -N_T(x,z) = (0,1,0)$. Ne segue che

$$\int_T \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma_T(x,z)) \cdot N(x,z)\, dx\, dz = \int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,6,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,6,z)\right] dx\, dz.$$

In conclusione si ottiene

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = -\int_S \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma - \int_T \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma =$$

$$= \int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-2,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-2,z)\right] dx\, dz - \int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,6,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,6,z)\right] dx\, dz =$$

$$= \int_K \left[\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,-2,z) - \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,6,z)\right] dx\, dz - \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,-2,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,6,z)\right] dx\, dz.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 7. Siano $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $F(x,y) = \begin{cases} \left(3\left(x^2+y^2-1\right),\, x\right) & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ \left(x^2+y^2-1,\, x\right) & \text{se } x^2+y^2 > 1, \end{cases}$

$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 4,\ \ y \ge 0\right\}$. L'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω percorso in senso antiorario vale

$\boxed{A}$ $2\pi - \dfrac{176}{3}$.

$\boxed{B}$ $2\pi - \dfrac{44}{3}$.

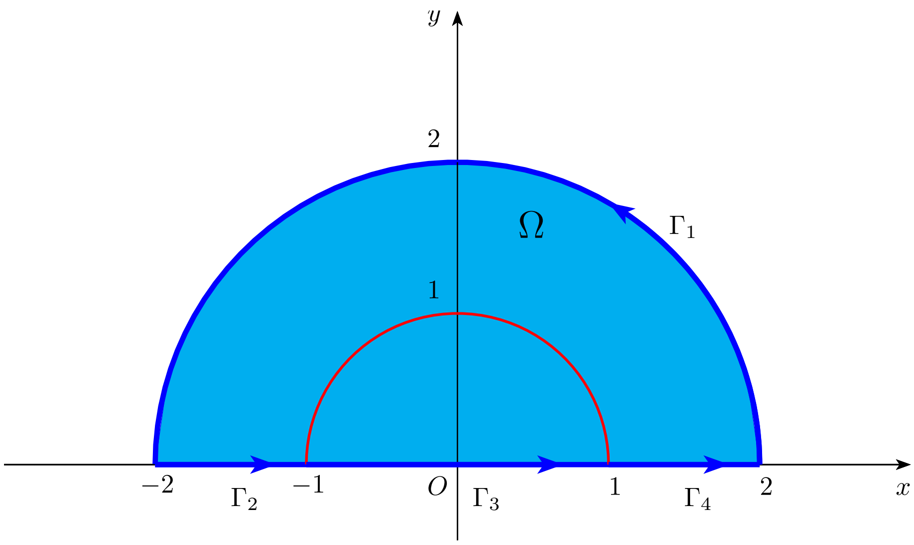
$\boxed{C}$ $2\pi - \dfrac{88}{3}$.

$\boxed{D}$ $2\pi - 12$.

$\boxed{E}$ $2\pi - \dfrac{40}{3}$.

SVOLGIMENTO

Si osserva che $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (vedi figura).



Quindi
$$\int_{\partial\Omega} F\cdot dP = \int_{\Gamma_1} F\cdot dP + \int_{\Gamma_2} F\cdot dP + \int_{\Gamma_3} F\cdot dP + \int_{\Gamma_4} F\cdot dP.$$
Si ha che
$$\Gamma_1 = \mathrm{im}(\gamma_1),\quad \gamma_1 : [0,\pi]\to\mathbb{R}^2,\quad \gamma_1(t) = (2\cos t, 2\sin t),$$
$$\Gamma_2 = \mathrm{im}(\gamma_2),\quad \gamma_2 : [0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad \gamma_2(t) = (-2+t, 0),$$
$$\Gamma_3 = \mathrm{im}(\gamma_3),\quad \gamma_3 : [0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad \gamma_3(t) = (-1+2t, 0),$$
$$\Gamma_4 = \mathrm{im}(\gamma_4),\quad \gamma_4 : [0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad \gamma_4(t) = (1+t, 0).$$
Ne segue che
$$\int_{\Gamma_1} F\cdot dP = \int_0^\pi F(2\cos t, 2\sin t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t)\,dt = \int_0^\pi (3, 2\cos t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t)\,dt =$$
$$= \int_0^\pi \left(-6\sin t + 4\cos^2 t\right)\,dt = \Big[6\cos t + 2(t+\sin t\cos t)\Big]_0^\pi = 2\pi - 12,$$
$$\int_{\Gamma_2} F\cdot dP = \int_0^1 F(-2+t, 0)\cdot(1,0)\,dt = \int_0^1 \left((t-2)^2 - 1, t-2\right)\cdot(1,0)\,dt =$$
$$= \int_0^1 \left[(t-2)^2 - 1\right]\,dt = \left[\frac{1}{3}(t-2)^3 - t\right]_0^1 = \frac{4}{3},$$
$$\int_{\Gamma_3} F\cdot dP = \int_0^1 F(-1+2t, 0)\cdot(2,0)\,dt = \int_0^1 \left(3\left[(2t-1)^2 - 1\right], 2t-1\right)\cdot(2,0)\,dt =$$
$$= 6\int_0^1 \left[(2t-1)^2 - 1\right]\,dt = 6\left[\frac{1}{6}(2t-1)^3 - t\right]_0^1 = -4,$$
$$\int_{\Gamma_2} F\cdot dP = \int_0^1 F(1+t, 0)\cdot(1,0)\,dt = \int_0^1 \left((1+t)^2 - 1, 1+t\right)\cdot(1,0)\,dt =$$
$$= \int_0^1 \left[(1+t)^2 - 1\right]\,dt = \left[\frac{1}{3}(1+t)^3 - t\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$
Quindi
$$\int_{\partial\Omega} F\cdot dP = \int_{\Gamma_1} F\cdot dP + \int_{\Gamma_2} F\cdot dP + \int_{\Gamma_3} F\cdot dP + \int_{\Gamma_4} F\cdot dP = 2\pi - \frac{40}{3}.$$
La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Svolgimento alternativo

Osserviamo che il campo vettoriale F è continuo e che, posto $F = (f_1, f_2)$, la prima componente f_1 non ammette derivata parziale rispetto a y nei punti (x,y) tali che $x^2+y^2 = 1$ con $y > 0$. Osserviamo anche che $\Omega = A\cup B$, dove
$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\right\},\qquad B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\right\}.$$
Posto $\widetilde{F}(x,y) = \left(x^2+y^2-1,\ x\right)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si ha che $\widetilde{F}(x,y) = F(x,y)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2 > 1$. Inoltre $\widetilde{F}$ è di classe C^1. Posto $\widetilde{F} = (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)$, per il Teorema di Green
$$\int_A \left[\frac{\partial\widetilde{f}_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial\widetilde{f}_1}{\partial y}(x,y)\right]\,dx\,dy = \int_{\partial A} \widetilde{F}\cdot dP =$$
essendo $\widetilde{F} = F$ su ∂A
$$= \int_{\partial A} F\cdot dP.$$
Similmente, posto $\overline{F}(x,y) = \left(3\left(x^2+y^2-1\right),\ x\right)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si ha che $\overline{F}(x,y) = F(x,y)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2\le 1$. Inoltre $\overline{F}$ è di classe C^1. Posto $\overline{F} = (\overline{f_1}, \overline{f_2})$, per il Teorema di Green
$$\int_B \left[\frac{\partial\overline{f_2}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial\overline{f_1}}{\partial y}(x,y)\right]\,dx\,dy = \int_{\partial B} \overline{F}\cdot dP =$$
essendo $\overline{F} = F$ su ∂B
$$= \int_{\partial B} F\cdot dP.$$

Per le proprietà dell'integrale di linea di un campo vettoriale

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\partial A} F \cdot dP + \int_{\partial B} F \cdot dP = \int_A \left[\frac{\partial \widetilde{f_2}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \widetilde{f_1}}{\partial y}(x,y)\right] dx\,dy + \int_B \left[\frac{\partial \overline{f_2}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial y}(x,y)\right] dx\,dy =$$

$$= \int_A (1-2y)\,dx\,dy + \int_B (1-6y)\,dx\,dy = m(A) + m(B) - 2\int_A y\,dx\,dy - 6\int_B y\,dx\,dy =$$

passando in coordinate polari nel piano

$$= m(\Omega) - 2\int_{[1,2]\times[0,\pi]} \rho^2 \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta - 6\int_{[0,1]\times[0,\pi]} \rho^2 \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= 2\pi - 2\left(\int_1^2 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta\right) - 6\left(\int_0^1 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta\right) =$$

$$= 2\pi - 2\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_1^2 \Big[-\cos\vartheta\Big]_0^\pi - 6\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^1 \Big[-\cos\vartheta\Big]_0^\pi = 2\pi - \frac{40}{3}.$$

Quiz 8. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(n+2)^{2n}}{(2n+1)!\,e^{2n}}\,(x+2)^n$ vale

$\boxed{A}$ 2.

$\boxed{B}$ e.

$\boxed{C}$ 4.

$\boxed{D}$ $\dfrac{1}{4}$.

$\boxed{E}$ $\dfrac{1}{e}$.

SVOLGIMENTO

È una serie di potenze centrata in $x_0 = -2$. Posto $t = x+2$ si ha che

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(n+2)^{2n}}{(2n+1)!\,e^{2n}}\,(x+2)^n = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(n+2)^{2n}}{(2n+1)!\,e^{2n}}\,t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0.

Posto $a_n = (-1)^n \dfrac{(n+2)^{2n}}{(2n+1)!\,e^{2n}}$, si ha che

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+3)^{2n+2}}{(2n+3)!\,e^{2n+2}} \cdot \frac{(2n+1)!\,e^{2n}}{(n+2)^{2n}} = \frac{(n+3)^2(n+3)^{2n}}{(2n+3)(2n+2)\cdot(2n+1)!\,e^2\,e^{2n}} \cdot \frac{(2n+1)!\,e^{2n}}{(n+2)^{2n}} =$$

$$= \frac{(n+3)^2}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{2n} \cdot e^2 = \frac{(n+3)^2}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\right]^2 \cdot \frac{1}{e^2}.$$

Poiché $\displaystyle\lim_n \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n = e$, si ha che

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{(n+3)^2}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\right]^2 \cdot \frac{1}{e^2} = \frac{1}{4}.$$

Per il Teorema del rapporto il raggio di convergenza della serie è $R = 4$. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Versione V4

Quiz 1. Siano $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ e $f(x,y) = \dfrac{1}{n+2}\left(x^{n+2} + y^{n+2}\right) - xy$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se n è dispari la funzione f ha due punti di massimo locale.

$\boxed{B}$ Se n è dispari la funzione f ha due punti di minimo locale.

$\boxed{C}$ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ la funzione f ha solo due punti stazionari: uno di sella e uno di minimo locale.

$\boxed{D}$ Se n è pari la funzione f ha due punti di massimo locale.

$\boxed{E}$ Se n è pari la funzione f ha due punti di minimo locale.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^{n+1} - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^{n+1} - x.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^{n+1} - y = 0 \\ y^{n+1} - x = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = x^{n+1} \\ x = x^{(n+1)^2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = x^{n+1} \\ x\left(1 - x^{(n+1)^2-1}\right) = 0. \end{cases}$$

Si ha che

$$x\left(1 - x^{(n+1)^2-1}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \qquad x^{(n+1)^2-1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ x = \pm 1 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono: se n è dispari $(0,0)$, $(1,1)$; se n è pari $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (n+1)x^n, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (n+1)y^n, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1.$$

Si ha che

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} n+1 & -1 \\ -1 & n+1 \end{pmatrix},$$

e solo per n pari

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} n+1 & -1 \\ -1 & n+1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice $H_f(0,0)$ sono discordi, mentre gli autovalori delle matrici $H_f(1,1)$ e $H_f(-1,-1)$ (che sono uguali) sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $(\lambda - n - 1)^2 - 1 = 0$, cioè $\lambda_{1,2} = n + 1 \pm 1$, ovvero $\lambda_1 = n+2$ e $\lambda_2 = n$. Essendo $n \geq 2$ si ha che $\lambda_{1,2} > 0$.

Ne segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ il punto $(0,0)$ è di sella per f, il punto $(1,1)$ è di minimo locale per f, e, solo nel caso n pari, il punto $(-1,-1)$ è di minimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 2. Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{y^4 + y^2 + 10} \leq x \leq \sqrt{y^4 + 2y^2 + 1}, \ \ 0 \leq y \leq 4\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{16x}{y+3}\,dx\,dy$ vale

$\boxed{A}$ 4.

$\boxed{B}$ 8.

$\boxed{C}$ -2.

$\boxed{D}$ -32.

$\boxed{E}$ -16.

SVOLGIMENTO

Poiché $\sqrt{y^4+y^2+10} \leq \sqrt{y^4+2y^2+1} \iff |y| \geq 3$, si ha che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{y^4+y^2+10} \leq x \leq \sqrt{y^4+2y^2+1},\ \ 3 \leq y \leq 4\right\}.$$

Essendo Ω un insieme x-semplice, si ha che

$$\int_\Omega \frac{16x}{y+3}\,dx\,dy = 16\int_3^4 \frac{1}{y+3}\left(\int_{\sqrt{y^4+y^2+10}}^{\sqrt{y^4+2y^2+1}} x\,dx\right)dy = 16\int_3^4 \frac{1}{y+3}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\sqrt{y^4+y^2+10}}^{\sqrt{y^4+2y^2+1}} dy =$$

$$= 8\int_3^4 \frac{1}{y+3}\left(y^2-9\right)\,dy = 8\int_3^4 (y-3)\,dy = 8\left[\frac{1}{2}(y-3)^2\right]_3^4 = 4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. Siano $0 < R < a$, $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ \ y \leq R\right\}$. Il volume di Ω vale

$\boxed{A}$ $\frac{2}{3}\pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a R^2$.

$\boxed{B}$ $\frac{2}{3}\pi a^3 + \frac{1}{3}\pi a^2 R + \frac{1}{3}\pi R^3$.

$\boxed{C}$ $\frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a^2 R - \frac{1}{3}\pi R^3$.

$\boxed{D}$ $\frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a R^2 - \frac{1}{3}\pi R^3$.

$\boxed{E}$ $\frac{2}{3}\pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a^2 R$.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è costituito dai punti della sfera di centro l'origine e raggio a con ordinata $y \leq R$. Passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y si ha che il volume di Ω è

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho\,d\rho\,d\vartheta\,dy,$$

dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,y) \in \mathbb{R}^3 : \ \ \rho^2+y^2 \leq a^2,\ \ y \leq R,\ \ \rho \geq 0,\ \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\right\}.$$

Osserviamo che

$$\begin{cases} \rho^2+y^2 \leq a^2 \\ y \leq R \\ \rho \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{a^2-y^2} \\ -a \leq y \leq a,\ \ y \leq R \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{a^2-y^2} \\ -a \leq y \leq R. \end{cases}$$

Ne segue che

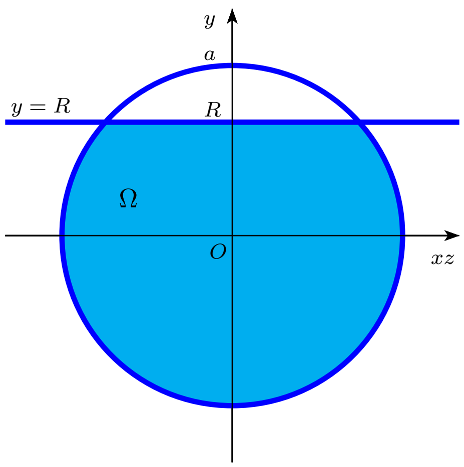
$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,y) \in \mathbb{R}^3 : \ \ 0 \leq \rho \leq \sqrt{a^2-y^2},\ \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,\ \ -a \leq y \leq R\right\}.$$

Quindi

$$m(\Omega) = \int_{\Omega'} \rho\,d\rho\,d\vartheta\,dy = 2\pi\int_{-a}^R \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \rho\,d\rho\right)dy =$$

$$= 2\pi\int_{-a}^R \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dy = \pi\int_{-a}^R \left(a^2-y^2\right)\,dy =$$

$$= \pi\left[a^2y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-a}^R = \pi\left(a^2R - \frac{1}{3}R^3 + \frac{2}{3}a^3\right).$$



La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 4. Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, f_3)$, $K = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2+z^2 \le 25\}$, $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; (y,z) \in K, \; -6 \le x \le 2\}$, $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2+z^2 = 25, \; -6 \le x \le 2\}$.

Il flusso del rotore di F attraverso la superficie Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ sia uscente da Ω, vale

$\boxed{A}$ $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial z}(-6,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial z}(2,y,z)\right] dy\,dz + \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-6,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial y}(2,y,z)\right] dy\,dz.$

$\boxed{B}$ $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-6,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial y}(2,y,z)\right] dy\,dz - \int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial z}(-6,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial z}(2,y,z)\right] dy\,dz.$

$\boxed{C}$ $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial z}(-6,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(2,y,z)\right] dy\,dz - \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-6,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial y}(2,y,z)\right] dy\,dz.$

$\boxed{D}$ $\displaystyle\int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-6,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial y}(2,y,z)\right] dy\,dz - \int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial z}(-6,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(2,y,z)\right] dy\,dz.$

$\boxed{E}$ 0.

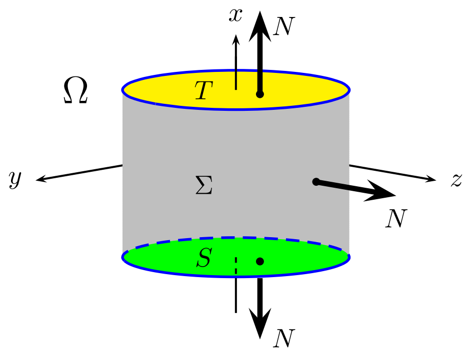
SVOLGIMENTO

Il bordo di Ω è la porzione del cilindro retto di equazione $y^2+z^2 = 25$ compreso fra i piani $x = -5$ e $x = 3$.

Quindi $\partial\Omega = \Sigma \cup S \cup T$, dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2+z^2 \le 25, \; x = -6\},$$

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2+z^2 \le 25, \; x = 2\}.$$



Poiché F è di classe C^1, il flusso uscente del rotore di F dal bordo di Ω è zero. Quindi

$$0 = \int_{\partial\Omega} \operatorname{rot}F \cdot n\,d\sigma = \int_\Sigma \operatorname{rot}F \cdot n\,d\sigma + \int_S \operatorname{rot}F \cdot n\,d\sigma + \int_T \operatorname{rot}F \cdot n\,d\sigma \quad \Longrightarrow \quad \int_\Sigma \operatorname{rot}F \cdot n\,d\sigma = -\int_S \operatorname{rot}F \cdot n\,d\sigma - \int_T \operatorname{rot}F \cdot n\,d\sigma,$$

dove le superfici Σ, S, T sono tutte orientate secondo il verso uscente da Ω.

Si ha che $S = \sigma_S(K)$, dove $\sigma_S(y,z) = (-6,y,z)$ e $T = \sigma_T(K)$, dove $\sigma_T(y,z) = (2,y,z)$.

Si ha che

$$\int_S \operatorname{rot}F \cdot n\,d\sigma = \int_K \operatorname{rot}F(\sigma_S(y,z)) \cdot N(y,z)\,dy\,dz,$$

dove $N(y,z)$ è un vettore normale a S uscente da Ω.

Un vettore normale a S è

$$N_S(y,z) = \frac{\partial\sigma_S}{\partial y}(y,z) \wedge \frac{\partial\sigma_S}{\partial z}(y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$$

che è entrante in Ω. Quindi un vettore uscente è $N(y,z) = -N_S(y,z) = (-1,0,0)$. Essendo

$$\operatorname{rot}F(x,y,z) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z), \; \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z), \; \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)\right),$$

si ha che

$$\int_S \operatorname{rot}F \cdot n\,d\sigma = \int_K \operatorname{rot}F(\sigma_S(y,z)) \cdot N(y,z)\,dy\,dz = -\int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-6,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(-6,y,z)\right] dy\,dz.$$

Similmente si ha che

$$\int_T \operatorname{rot}F \cdot n\,d\sigma = \int_K \operatorname{rot}F(\sigma_T(y,z)) \cdot N(y,z)\,dy\,dz,$$

dove $N(y,z)$ è un vettore normale a T uscente da Ω.

Un vettore normale a T è

$$N_T(y,z) = \frac{\partial\sigma_T}{\partial y}(y,z) \wedge \frac{\partial\sigma_T}{\partial z}(y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$$

che è uscente da Ω. Quindi $N(y,z) = N_T(y,z) = (1,0,0)$. Ne segue che

$$\int_T \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_K \mathrm{rot}F(\sigma_T(y,z)) \cdot N(y,z)\, dy\, dz = \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(2,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(2,y,z)\right] dy\, dz.$$

In conclusione si ottiene

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = -\int_S \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma - \int_T \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma =$$

$$= \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-6,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(-6,y,z)\right] dy\, dz - \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(2,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(2,y,z)\right] dy\, dz =$$

$$= \int_K \left[\frac{\partial f_3}{\partial y}(-6,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial y}(2,y,z)\right] dx\, dz - \int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial z}(-6,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(2,y,z)\right] dx\, dz.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 5. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{3n}}{(3n+1)!\, e^{3n}} (x+3)^n$ vale

$\boxed{A}$ $\dfrac{1}{e}$.

$\boxed{B}$ e.

$\boxed{C}$ $\dfrac{1}{27}$.

$\boxed{D}$ 3.

$\boxed{E}$ 27.

SVOLGIMENTO

È una serie di potenze centrata in $x_0 = -3$. Posto $t = x+3$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{3n}}{(3n+1)!\, e^{3n}} (x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{3n}}{(3n+1)!\, e^{3n}} t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0.

Posto $a_n = (-1)^n \dfrac{(n+1)^{3n}}{(3n+1)!\, e^{3n}}$, si ha che

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+2)^{3n+3}}{(3n+4)!\, e^{3n+3}} \cdot \frac{(3n+1)!\, e^{3n}}{(n+1)^{3n}} = \frac{(n+2)^3\, (n+2)^{3n}}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)\cdot (3n+1)!\, e^3\, e^{3n}} \cdot \frac{(3n+1)!\, e^{3n}}{(n+1)^{3n}} =$$

$$= \frac{(n+2)^3}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3n} e^3 = \frac{(n+2)^3}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n\right]^3 \cdot \frac{1}{e^3}.$$

Poiché $\displaystyle\lim_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$, si ha che

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{(n+2)^3}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n\right]^3 \cdot \frac{1}{e^3} = \frac{1}{27}.$$

Per il Teorema del rapporto il raggio di convergenza della serie è $R = 27$. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 6. Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = (x+y)^9, \; -1 \le y \le 0, \; 0 \le x \le -y\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{z + 8xy}{\sqrt{162(x+y)^{16}+1}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ $-\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{B}$ $-\dfrac{110}{111}$.

$\boxed{C}$ $-\dfrac{111}{110}$.

$\boxed{D}$ $-\dfrac{55}{111}$.

E $-\dfrac{111}{55}$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $z = (x+y)^9$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le y \le 0, \ 0 \le x \le -y\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \big(x, y, (x+y)^9\big)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{z + 8xy}{\sqrt{162(x+y)^{16}+1}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{z+8xy}{\sqrt{162(x+y)^{16}+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\, \|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-9(x+y)^8, -9(x+y)^8, 1\right).$$

Quindi $\|N(x,y)\| = \sqrt{162(x+y)^{16}+1}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{z+8xy}{\sqrt{162(x+y)^{16}+1}}\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\, \|N(x,y)\|\, dx\, dy = \int_K \left[(x+y)^9 + 8xy\right] dx\, dy =$$

essendo K un insieme x-semplice si ottiene

$$= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{-y} \left[(x+y)^9 + 8xy\right] dx \right) dy = \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{10}(x+y)^{10} + 4x^2 y\right]_0^{-y} dy = \int_{-1}^0 \left(4y^3 - \frac{1}{10}y^{10}\right) dy =$$

$$= \left[y^4 - \frac{1}{110}y^{11}\right]_{-1}^0 = -\frac{111}{110}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 7. Siano $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $F(x,y) = \begin{cases} \left(y,\, 3\left(x^2+y^2-1\right)\right) & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ \left(y,\, x^2+y^2-1\right) & \text{se } x^2+y^2 > 1, \end{cases}$

$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 4, \ x \ge 0\right\}$. L'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω percorso in senso antiorario vale

A $\dfrac{40}{3} - 2\pi$.

B $\dfrac{44}{3} - 2\pi$.

C $\dfrac{88}{3} - 2\pi$.

D $\dfrac{176}{3} - 2\pi$.

E $12 - 2\pi$.

SVOLGIMENTO

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(2\cos t, 2\sin t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t, 3) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(6\cos t - 4\sin^2 t\right) dt = \Big[6\sin t - 2(t - \sin t\cos t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 12 - 2\pi,$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 F(0, 2-t) \cdot (0,-1)\, dt = \int_0^1 \left(2-t, (t-2)^2 - 1\right) \cdot (0,-1)\, dt =$$

$$= -\int_0^1 \left[(t-2)^2 - 1\right] dt = -\left[\frac{1}{3}(t-2)^3 - t\right]_0^1 = -\frac{4}{3},$$

Si osserva che $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (vedi figura). Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP + \int_{\Gamma_3} F \cdot dP + \int_{\Gamma_4} F \cdot dP.$$

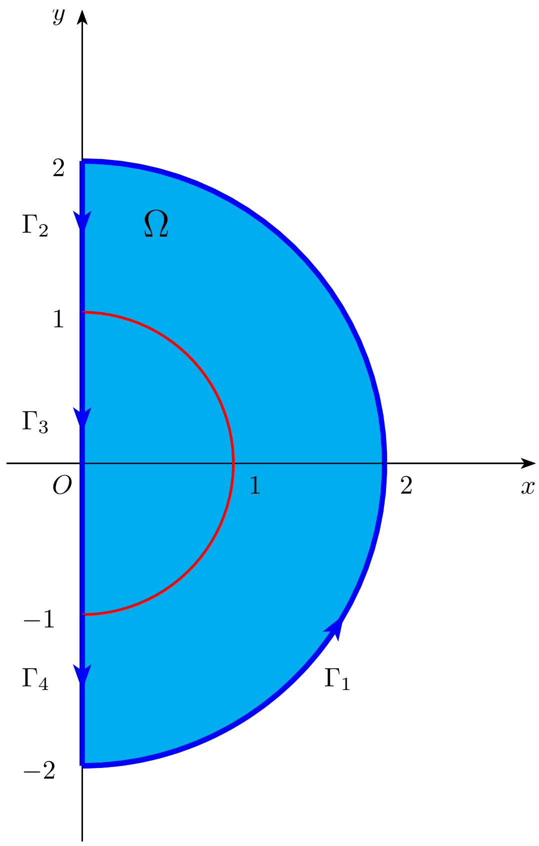
Si ha che

$$\Gamma_1 = \mathrm{im}(\gamma_1), \quad \gamma_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (2\cos t, 2\sin t),$$

$$\Gamma_2 = \mathrm{im}(\gamma_2), \quad \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (0, 2-t),$$

$$\Gamma_3 = \mathrm{im}(\gamma_3), \quad \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (0, 1-2t),$$

$$\Gamma_4 = \mathrm{im}(\gamma_4), \quad \gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_4(t) = (0, -1-t).$$



$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dP = \int_0^1 F(0, 1-2t) \cdot (0,-2)\, dt = \int_0^1 \left(1-2t, 3\left[(2t-1)^2 - 1\right]\right) \cdot (0,-2)\, dt =$$

$$= -6 \int_0^1 \left[(2t-1)^2 - 1\right]\, dt = -6\left[\frac{1}{6}(2t-1)^3 - t\right]_0^1 = 4,$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 F(0, -1-t) \cdot (0,-1)\, dt = \int_0^1 \left(-1-t, (1+t)^2 - 1\right) \cdot (0,-1)\, dt =$$

$$= -\int_0^1 \left[(1+t)^2 - 1\right]\, dt = -\left[\frac{1}{3}(1+t)^3 - t\right]_0^1 = -\frac{4}{3}.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP + \int_{\Gamma_3} F \cdot dP + \int_{\Gamma_4} F \cdot dP = \frac{40}{3} - 2\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Svolgimento alternativo

Osserviamo che il campo vettoriale F è continuo e che, posto $F = (f_1, f_2)$, la seconda componente f_2 non ammette derivata parziale rispetto a x nei punti (x,y) tali che $x^2 + y^2 = 1$ con $x > 0$. Osserviamo anche che $\Omega = A \cup B$, dove

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ x \ge 0\right\}, \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 1, \ x \ge 0\right\}.$$

Posto $\widetilde{F}(x,y) = \left(y,\, x^2 + y^2 - 1\right)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha che $\widetilde{F}(x,y) = F(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2 + y^2 > 1$. Inoltre $\widetilde{F}$ è di classe C^1. Posto $\widetilde{F} = (\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2})$, per il Teorema di Green

$$\int_A \left[\frac{\partial \widetilde{f_2}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \widetilde{f_1}}{\partial y}(x,y)\right] dx\, dy = \int_{\partial A} \widetilde{F} \cdot dP =$$

essendo $\widetilde{F} = F$ su ∂A

$$= \int_{\partial A} F \cdot dP.$$

Similmente, posto $\overline{F}(x,y) = \left(y,\, 3\left(x^2 + y^2 - 1\right)\right)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha che $\overline{F}(x,y) = F(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2 + y^2 \le 1$. Inoltre $\overline{F}$ è di classe C^1. Posto $\overline{F} = (\overline{f_1}, \overline{f_2})$, per il Teorema di Green

$$\int_B \left[\frac{\partial \overline{f_2}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial y}(x,y)\right] dx\, dy = \int_{\partial B} \overline{F} \cdot dP =$$

essendo $\overline{F} = F$ su ∂B

$$= \int_{\partial B} F \cdot dP.$$

Per le proprietà dell'integrale di linea di un campo vettoriale

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\partial A} F \cdot dP + \int_{\partial B} F \cdot dP = \int_A \left[\frac{\partial \widetilde{f}_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \widetilde{f}_1}{\partial y}(x,y) \right] dx\, dy + \int_B \left[\frac{\partial \overline{f_2}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial y}(x,y) \right] dx\, dy =$$

$$= \int_A (2x-1)\, dx\, dy + \int_B (6x-1)\, dx\, dy = 2\int_A x\, dx\, dy + 6\int_B x\, dx\, dy - m(A) - m(B) =$$

passando in coordinate polari nel piano

$$= 2\int_{[1,2]\times[-\pi/2,\pi/2]} \rho^2 \cos\vartheta\, d\rho\, d\vartheta + 6\int_{[0,1]\times[-\pi/2,\pi/2]} \rho^2 \cos\vartheta\, d\rho\, d\vartheta - m(\Omega) =$$

$$= 2\left(\int_1^2 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta\right) + 6\left(\int_0^1 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta\right) - 2\pi =$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_1^2 \left[\sin\vartheta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 6\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^1 \left[\sin\vartheta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - 2\pi = \frac{40}{3} - 2\pi.$$

Quiz 8. Siano (a_n) una successione reale e $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se la successione (S_n) è illimitata, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{B}$ Se non esiste $\lim_n a_n$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è indeterminata.

$\boxed{C}$ Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge, allora $\lim_n a_n \neq 0$.

$\boxed{D}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$.

$\boxed{E}$ Se $\lim_n a_n = L < -1$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$. Infatti, se $\lim_n a_n = L < -1$, allora per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge. Inoltre, per la definizione di limite, preso $\varepsilon = -L-1$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha che $|a_n - L| < \varepsilon = -L-1$, ovvero $L+1 < a_n - L < -L-1$, da cui segue che $a_n < L - L - 1 = -1 < 0$. Quindi, eventuamente a parte un numero finito di valori di a_n, risulta che $a_n < 0$. Ne segue che la serie di a_n è a termini negativi, e poiché non vale la condizione necessaria, risulta che questa serie diverge negativamente, e quindi diverge.

Le altre affermazioni sono errate. Infatti, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ ha limite zero ma la sua serie (serie armonica) diverge positivamente, e quindi $\boxed{\text{C}}$ e $\boxed{\text{D}}$ sono errate. Inoltre, la successione $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ non ha limite ma la sua serie diverge, e quindi $\boxed{\text{B}}$ è errata.

Infine, la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k$ è illimitata (infatti $S_n = \frac{1+2^{n+1}}{3}$ per n pari, $S_n = \frac{1-2^{n+1}}{3}$ per n dispari) ma la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n$ è indeterminata perché la successione (S_n) non ha limite, e quindi $\boxed{\text{A}}$ è errata.
