Svolgimento dei quiz dell'esame di Analisi Matematica II del 13 giugno 2022 ore 14

Versione: V1

Quiz 1. Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1 + \frac{1}{2}y, \ 0 \le y \le 1 + \frac{1}{2}x\right\}$. L'integrale $\int_\Omega 3xy\,dx\,dy$ vale

$\boxed{A}$ 17.

$\boxed{B}$ 4.

$\boxed{C}$ 10.

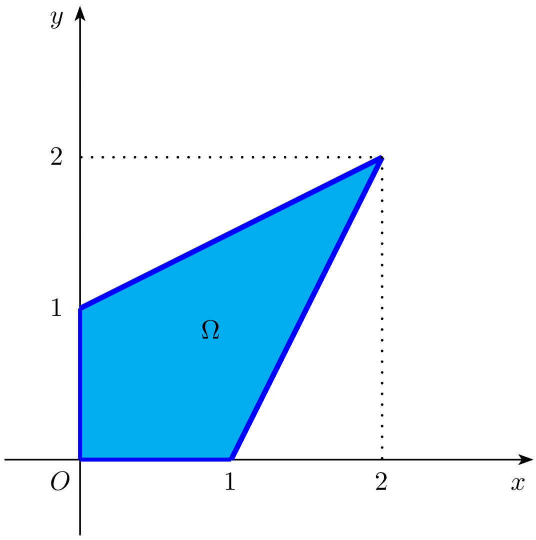
$\boxed{D}$ 5.

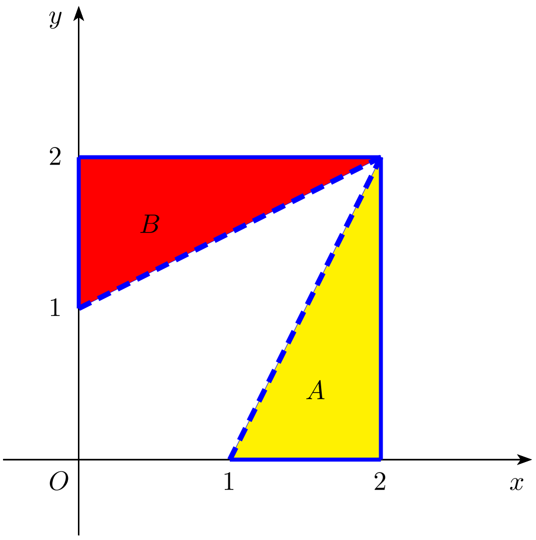
$\boxed{E}$ 12.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\Omega = Q \setminus (A \cup B)$, dove $Q = [0,2]^2$ e

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x \le 2, \ 0 \le y < 2(x-1)\right\}, \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le y \le 2, \ 0 \le x < 2(y-1)\right\}.$$





Quindi

$$\int_\Omega 3xy\,dx\,dy = \int_Q 3xy\,dx\,dy - \left(\int_A 3xy\,dx\,dy + \int_B 3xy\,dx\,dy\right).$$

Si ha che

$$\int_Q 3xy\,dx\,dy = 3\left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^2 y\,dy\right) = 3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = 12,$$

ed essendo A un insieme y-semplice

$$\int_A 3xy\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^{2(x-1)} 3xy\,dy\right) dx = 3\int_1^2 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2(x-1)} dx = 6\int_1^2 x(x-1)^2\,dx =$$

$$= 6\int_1^2 \left(x^3 - 2x^2 + x\right) dx = 6\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{7}{2},$$

$$\int_B 3xy\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^{2(y-1)} 3xy\,dx\right) dy = \int_A 3xy\,dx\,dy = \frac{7}{2}.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega 3xy\,dx\,dy = \int_Q 3xy\,dx\,dy - \left(\int_A 3xy\,dx\,dy + \int_B 3xy\,dx\,dy\right) = 12 - 7 = 5.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 2. Sia $R > 0$. Il flusso uscente del campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(3x^2y + e^{y^2-z^2},\ \log\left(1 + x^2z^2\right) - 3xy^2,\ 5z^2 - xy\right)$ dal bordo dell'insieme $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 > R^2,\ 0 \le z \le 2R - 2\sqrt{x^2 + y^2}\right\}$ vale

$\boxed{A}$ $\frac{5}{3}\pi R^4$.

$\boxed{B}$ $\frac{63}{25}\pi R^4$.

$\boxed{C}$ 0.

$\boxed{D}$ $\frac{5}{6}\pi R^4$.

$\boxed{E}$ $\frac{63}{50}\pi R^4$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div}F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \qquad \mathrm{div}F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = 10z.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse z si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div}F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega} 10z\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} 10z\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dz,$$

dove $\Omega' = \left\{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le \rho < \frac{3}{5}R,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi,\ \sqrt{R^2 - \rho^2} < z \le 2R - 2\rho\right\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = 10 \int_{\Omega'} z\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dz = 20\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \rho \left(\int_{\sqrt{R^2-\rho^2}}^{2R-2\rho} z\, dz \right) d\rho = 20\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \rho \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{\sqrt{R^2-\rho^2}}^{2R-2\rho} d\rho =$$

$$= 10\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \rho \left(3R^2 - 8R\rho + 5\rho^2\right) d\rho = 10\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \left(3R^2\rho - 8R\rho^2 + 5\rho^3\right) d\rho =$$

$$= 10\pi \left[\frac{3}{2}R^2\rho^2 - \frac{8}{3}R\rho^3 + \frac{5}{4}\rho^4\right]_0^{\frac{3}{5}R} = \frac{63}{50}\pi R^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 3. Sia $p > 0$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(2^p - 1\right)^n$

$\boxed{A}$ non converge per ogni $p > 0$.

$\boxed{B}$ converge al numero $S = 2^{-p}$ per ogni $p > 0$.

$\boxed{C}$ converge al numero $S = 2^{-p}$ se e solo se $0 < p < 1$.

$\boxed{D}$ converge al numero $S = 2^{-p} - 1$ se e solo se $0 < p < 1$.

$\boxed{E}$ converge al numero $S = 2^{-p} - 1$ per ogni $p > 0$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(2^p - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - 2^p\right)^n$$

che è una serie geometrica di ragione $a = 1 - 2^p$.

Poiché la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge se e solo se $|b|<1$, e in tal caso la sua somma è $\frac{1}{1-b}$, essendo $|a| = |1-2^p| = 2^p - 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge se e solo se $2^p - 1 < 1$, cioè se e solo se $2^p < 2$, ovvero $p < 1$. Quindi la serie data converge se $0 < p < 1$ e la sua somma è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-2^p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-2^p)^n - (1-2^p)^0 = \frac{1}{1-(1-2^p)} - 1 = 2^{-p} - 1.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 4. La funzione $f(x,y) = \left(x^2 - 3\right) e^{-x^2 - y^2}$

$\boxed{A}$ ha due punti stazionari: uno di minimo locale e uno di massimo locale.

$\boxed{B}$ ha tre punti stazionari: uno di massimo locale e due di minimo locale.

$\boxed{C}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale, uno di massimo locale e uno di sella.

$\boxed{D}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale e due di massimo locale.

$\boxed{E}$ non ha punti stazionari.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\left(4 - x^2\right) e^{-x^2 - y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\left(x^2 - 3\right) e^{-x^2 - y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x\left(4 - x^2\right) = 0 \\ y\left(x^2 - 3\right) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \;\; x = \pm 2 \\ y = 0, \;\; x = \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono $(0,0)$, $(2,0)$ e $(-2,0)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left[\left(2 - 4x^2\right)\left(4 - x^2\right) - 4x^2\right] e^{-x^2 - y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(4y^2 - 2\right)\left(x^2 - 3\right) e^{-x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xy\left(4 - x^2\right) e^{-x^2 - y^2}.$$

Si ha che

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad H_f(\pm 2, 0) = \begin{pmatrix} -16\, e^{-4} & 0 \\ 0 & -2\, e^{-4} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il punto $(0,0)$ è di minimo locale per f mentre i punti $(2,0)$ e $(-2,0)$ sono di massimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 3x^2 - \pi x$, e siano a_n, b_n, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, i coefficienti di Fourier di f.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a $\frac{1}{15}\pi^4$.

$\boxed{B}$ converge a $\frac{49}{15}\pi^4$.

$\boxed{C}$ converge a $\frac{14}{15}\pi^4$.

$\boxed{D}$ converge a $\frac{34}{15}\pi^4$.

$\boxed{E}$ converge a π^4.

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(3x^2 - \pi x\right)^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(9x^4 - 6\pi x^3 + \pi^2 x^2\right) \, dx = \left[\frac{9}{5}x^5 - \frac{3}{2}\pi x^4 + \frac{1}{3}\pi^2 x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{64}{15}\pi^5,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(3x^2 - \pi x\right) \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[x^3 - \frac{1}{2}\pi x^2\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi^2.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - 2a_0^2 = \frac{64}{15}\pi^4 - 2\pi^4 = \frac{34}{15}\pi^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 6. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette tutte le derivate parziali in ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{B}$ Se f non è differenziabile in x_0, allora f non è continua in x_0.

$\boxed{C}$ Se f non è differenziabile in x_0, allora almeno una delle derivate parziali di f non è continua in x_0.

$\boxed{D}$ Se almeno una delle derivate parziali di f non è continua in x_0, allora f non è continua in x_0.

$\boxed{E}$ Se f è differenziabile in x_0, allora tutte le derivate parziali di f sono continue in x_0.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$. Infatti, se per assurdo tutte le derivate parziali di f fossero continue in x_0, allora per il Teorema del differenziale totale risulterebbe che f è differenziabile in x_0, contraddicendo l'ipotesi di non differenziabilità.

Inoltre, esistono funzioni che ammettono le derivate parziali in tutti i punti e che in un punto non sono continue ma che in quel punto sono diferenzialibili: per esempio per $n = 2$ la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

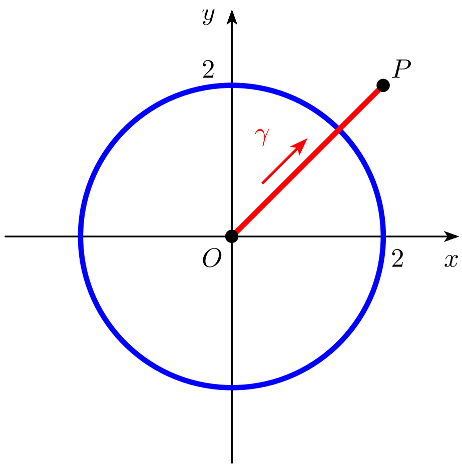
in $(x_0, y_0) = (0, 0)$, da cui segue che $\boxed{\text{E}}$ è errata e anche $\boxed{\text{D}}$ è errata perché essendo f differenziabile in questo punto risulta essere anche continua in esso.

Esistono anche funzioni continue in un punto che non sono differenziabili in quel punto: per esempio $f(x) = \|x\|$ in $x_0 = 0_{\mathbb{R}^n}$, da cui segue che $\boxed{\text{B}}$ è errata. Ovviamente $\boxed{\text{A}}$ è errata perché $\boxed{\text{C}}$ è corretta.

Quiz 7. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(x \left|4 - x^2 - y^2\right|, \; 3 - x^2 y\right)$ lungo il segmento di estremi $O(0, 0)$ e $P(2, 2)$ percorso da O a P vale

$\boxed{A}$ 12. $\boxed{B}$ 6. $\boxed{C}$ 0. $\boxed{D}$ 3. $\boxed{E}$ 2.

SVOLGIMENTO



Si ha che

$$F(x,y) = \left(x\left|4-x^2-y^2\right|,\ 3-x^2y\right) = \begin{cases} F_1(x,y) = \Big(x\left(4-x^2-y^2\right),\ 3-x^2y\Big) & \text{se } x^2+y^2 \leq 4 \\ F_2(x,y) = \Big(x\left(x^2+y^2-4\right),\ 3-x^2y\Big) & \text{se } x^2+y^2 > 4. \end{cases}$$

Il segmento OP non è tutto contenuto nel cerchio $\mathcal{C}$ di centro O e raggio 2.

La curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (2t, 2t)$ è una parametrizzazione del segmento OP da O a P.

Si ha che $\gamma(t) \in \mathcal{C}$ se e solo se $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ne segue che

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (2,2)$ per ogni $t \in [0,1]$,

$$\forall t \in \left[0, \sqrt{2}/2\right] : \qquad F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \Big(2t\left(4-8t^2\right),\ 3-8t^3\Big) \cdot (2,2) = 16t - 48t^3 + 6,$$

$$\forall t \in \left(\sqrt{2}/2, 1\right] : \qquad F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \Big(2t\left(8t^2-4\right),\ 3-8t^3\Big) \cdot (2,2) = 16t^3 - 16t + 6,$$

si ottiene

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(16t - 48t^3 + 6\right) dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (16t^3 - 16t + 6)\, dt =$$

$$= \left[8t^2 - 12t^4 + 6t\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[4t^4 - 8t^2 + 6t\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = 6.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 8. Sia $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ il campo vettoriale definito da $F(x) = \dfrac{18\|x\|}{1+\|x\|^2}\, x$, dove $\|x\|$ è la norma di x in $\mathbb{R}^n$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \|x\| - \arctan(\|x\|)$.

$\boxed{B}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = 18\|x\| - 18\arctan(\|x\|)$.

$\boxed{C}$ Il campo vettoriale F non è conservativo.

$\boxed{D}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = 18\|x\| - \arctan(\|x\|)$.

$\boxed{E}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = 18\|x\| + \arctan(\|x\|)$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è radiale, essendo della forma $F(x) = \varphi(\|x\|)\, x$, dove in questo caso $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è la funzione

$$\varphi(t) = \frac{18t}{1+t^2}.$$

Essendo φ continua, anche F è continuo, e per le proprietà dei campi radiali e continui, risulta che F è conservativo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Inoltre, un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \Phi(\|x\|)$, dove $\Phi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che $\Phi'(t) = t\varphi(t)$ per ogni $t > 0$, ovvero

$$\Phi'(t) = \frac{18t^2}{1+t^2}.$$

Ne segue che

$$\Phi(t) = \int \frac{18t^2}{1+t^2}\,dt = 18\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 18(t - \arctan t) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F è

$$f(x) = \Phi(\|x\|) = 18\|x\| - 18\arctan(\|x\|).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Versione V2

Quiz 1. Sia $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ il campo vettoriale definito da $F(x) = \dfrac{1}{18 + \|x\|}\, x$, dove $\|x\|$ è la norma di x in $\mathbb{R}^n$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \|x\| - \log(18 + \|x\|)$.

$\boxed{B}$ Il campo vettoriale F non è conservativo.

$\boxed{C}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \|x\| - 18\log(18 + \|x\|)$.

$\boxed{D}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \|x\| + \log(18 + \|x\|)$.

$\boxed{E}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \|x\| + 18\log(18 + \|x\|)$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è radiale, essendo della forma $F(x) = \varphi(\|x\|)\, x$, dove in questo caso $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è la funzione

$$\varphi(t) = \frac{1}{18 + t}.$$

Essendo φ continua, anche F è continuo, e per le proprietà dei campi radiali e continui, risulta che F è conservativo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Inoltre, un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \Phi(\|x\|)$, dove $\Phi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che $\Phi'(t) = t\varphi(t)$ per ogni $t > 0$, ovvero

$$\Phi'(t) = \frac{t}{18 + t}.$$

Ne segue che

$$\Phi(t) = \int \frac{t}{18 + t}\, dt = \int \left(1 - \frac{18}{18 + t}\right) dt = t - 18\log(18 + t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F è

$$f(x) = \Phi(\|x\|) = \|x\| - 18\log(18 + \|x\|).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 2. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(x\left|x^2 + y^2 - 1\right|,\ x^2 y + 2\right)$ lungo il segmento di estremi $O(0, 0)$ e $P(1, 1)$ percorso da O a P vale

$\boxed{A}$ $\frac{5}{2}$.

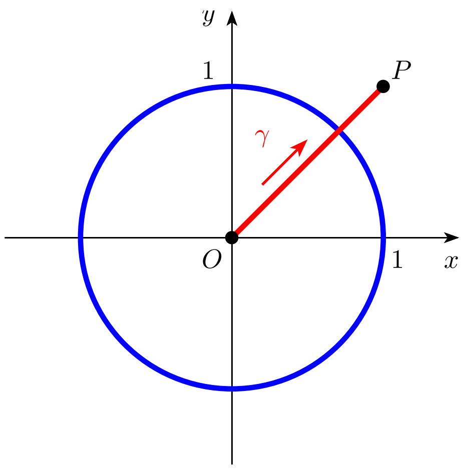
$\boxed{B}$ $\frac{7}{2}$.

$\boxed{C}$ 0.

$\boxed{D}$ $\frac{7}{4}$.

$\boxed{E}$ $\frac{5}{4}$.

SVOLGIMENTO



Si ha che

$$F(x,y) = \left(x\left|x^2+y^2-1\right|,\ \ x^2y+2\right) = \begin{cases} F_1(x,y) = \left(x\left(1-x^2-y^2\right),\ \ x^2y+2\right) & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ F_2(x,y) = \left(x\left(x^2+y^2-1\right),\ \ x^2y+2\right) & \text{se } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

Il segmento OP non è tutto contenuto nel cerchio $\mathcal{C}$ di centro O e raggio 1.

La curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t,t)$ è una parametrizzazione del segmento OP da O a P.

Si ha che $\gamma(t) \in \mathcal{C}$ se e solo se $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ne segue che

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (1,1)$ per ogni $t \in [0,1]$,

$$\forall t \in \left[0, \sqrt{2}/2\right]: \qquad F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \left(t\left(1-2t^2\right),\ \ t^3+2\right) \cdot (1,1) = t - t^3 + 2,$$

$$\forall t \in \left(\sqrt{2}/2, 1\right]: \qquad F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \left(t\left(2t^2-1\right),\ \ t^3+2\right) \cdot (1,1) = 3t^3 - t + 2,$$

si ottiene

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(t - t^3 + 2\right)\, dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left(3t^3 - t + 2\right)\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 + 2t\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 2t\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \frac{5}{2}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 0 \le x \le 1 + \frac{1}{2}y,\ \ 0 \le y \le 1 + \frac{1}{2}x\right\}$. L'integrale $\int_\Omega 9xy\, dx\, dy$ vale

$\boxed{A}$ 17.

$\boxed{B}$ 12.

$\boxed{C}$ 30.

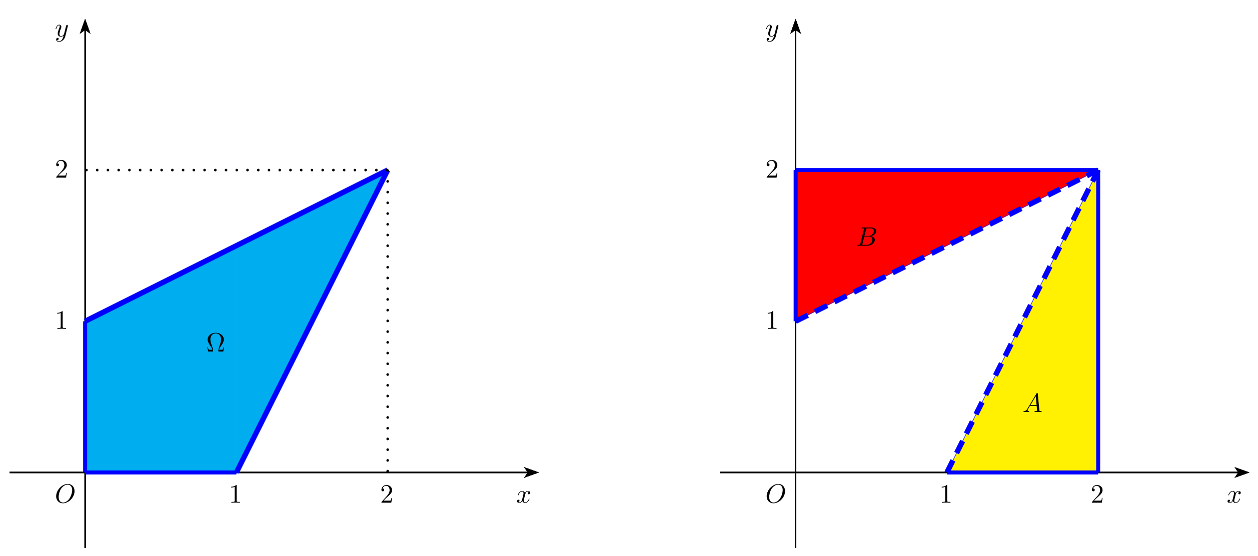
$\boxed{D}$ 15.

$\boxed{E}$ 36.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\Omega = Q \setminus (A \cup B)$, dove $Q = [0,2]^2$ e

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 1 \le x \le 2,\ \ 0 \le y < 2(x-1)\right\}, \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 1 \le y \le 2,\ \ 0 \le x < 2(y-1)\right\}.$$



Quindi

$$\int_\Omega 9xy\,dx\,dy = \int_Q 9xy\,dx\,dy - \left(\int_A 9xy\,dx\,dy + \int_B 9xy\,dx\,dy\right).$$

Si ha che

$$\int_Q 9xy\,dx\,dy = 9\left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^2 y\,dy\right) = 9\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = 36,$$

ed essendo A un insieme y-semplice

$$\int_A 9xy\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_0^{2(x-1)} 9xy\,dy\right)dx = 9\int_1^2 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2(x-1)}dx = 18\int_1^2 x(x-1)^2\,dx =$$

$$= 18\int_1^2\left(x^3-2x^2+x\right)dx = 18\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{21}{2},$$

$$\int_B 9xy\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_0^{2(y-1)} 9xy\,dx\right)dy = \int_A 9xy\,dx\,dy = \frac{21}{2}.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega 9xy\,dx\,dy = \int_Q 9xy\,dx\,dy - \left(\int_A 3xy\,dx\,dy + \int_B 9xy\,dx\,dy\right) = 36-21 = 15.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 4. La funzione $f(x,y) = \left(y^2-8\right)e^{-x^2-y^2}$

$\boxed{A}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale, uno di massimo locale e uno di sella.

$\boxed{B}$ ha due punti stazionari: uno di minimo locale e uno di massimo locale.

$\boxed{C}$ non ha punti stazionari.

$\boxed{D}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale e due di massimo locale.

$\boxed{E}$ ha tre punti stazionari: uno di massimo locale e due di minimo locale.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x\left(y^2-8\right)e^{-x^2-y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\left(9-y^2\right)e^{-x^2-y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x\left(y^2-8\right) = 0 \\ y\left(9-y^2\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \;\; y = \pm 2\sqrt{2} \\ y = 0, \;\; y = \pm 3. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono $(0,0)$, $(0,3)$ e $(0,-3)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(4x^2-2\right)\left(y^2-8\right)e^{-x^2-y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left[\left(2-4y^2\right)\left(9-y^2\right)-4y^2\right]e^{-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xy\left(9-y^2\right)e^{-x^2-y^2}.$$

Si ha che

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,\pm 3) = \begin{pmatrix} -2\,e^{-9} & 0 \\ 0 & -36\,e^{-9} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il punto $(0,0)$ è di minimo locale per f mentre i punti $(0,3)$ e $(0,-3)$ sono di massimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 5. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g:[-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ definita da $g(x) = 5x^2-\pi x$, e siano a_n, b_n, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, i coefficienti di Fourier di f.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a $\frac{46}{9}\,\pi^4$.

$\boxed{B}$ converge a $\frac{1}{9}\,\pi^4$.

$\boxed{C}$ converge a $\frac{34}{9}\,\pi^4$.

$\boxed{D}$ converge a $\frac{23}{9}\,\pi^4$.

$\boxed{E}$ converge a π^4.

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx-2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(5x^2-\pi x\right)^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(25x^4-10\pi x^3+\pi^2x^2\right)\,dx=\left[5x^5-\frac{5}{4}\pi x^4+\frac{1}{3}\pi^2x^3\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{32}{3}\pi^5,$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(5x^2-\pi x\right)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{2}\pi x^2\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{5}{3}\pi^2.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx-2a_0^2=\frac{32}{3}\pi^4-\frac{50}{9}\pi^4=\frac{46}{9}\pi^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 6. Sia $p>0$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ (4^p-1)^n$

$\boxed{A}$ non converge per ogni $p>0$.

$\boxed{B}$ converge al numero $S=4^{-p}$ se e solo se $0<p<\frac{1}{2}$.

$\boxed{C}$ converge al numero $S=4^{-p}$ per ogni $p>0$.

$\boxed{D}$ converge al numero $S=4^{-p}-1$ per ogni $p>0$.

$\boxed{E}$ converge al numero $S=4^{-p}-1$ se e solo se $0<p<\frac{1}{2}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ (4^p-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(1-4^p)^n$$

che è una serie geometrica di ragione $a=1-4^p$.

Poiché la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty}b^n$ converge se e solo se $|b|<1$, e in tal caso la sua somma è $\frac{1}{1-b}$, essendo $|a|=|1-4^p|=4^p-1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a^n$ converge se e solo se $4^p-1<1$, cioè se e solo se $2^{2p}<2$, ovvero $p<\frac{1}{2}$. Quindi la serie data converge se $0<p<\frac{1}{2}$ e la sua somma è

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-4^p)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-4^p)^n-(1-4^p)^0=\frac{1}{1-(1-4^p)}-1=4^{-p}-1.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 7. Sia $R > 0$. Il flusso uscente del campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(e^{y^2+z^2} - 5x^2y,\ \log\left(2 + x^2z^2\right) + 5xy^2,\ 10z^2 + xy\right)$ dal bordo dell'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 > R^2,\ 2\sqrt{x^2+y^2} - 2R \le z \le 0\right\}$ vale

$\boxed{A}$ $-\frac{21}{25}\pi R^4$. $\boxed{B}$ $-\frac{25}{36}\pi R^4$. $\boxed{C}$ $-\frac{63}{25}\pi R^4$. $\boxed{D}$ $-\frac{25}{12}\pi R^4$. $\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \qquad \mathrm{div} F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 20z.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse z si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega} 20z\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} 20z\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dz,$$

dove $\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le \rho < \frac{3}{5}R,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi,\ 2\rho - 2R \le z < -\sqrt{R^2 - \rho^2}\right\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = 20 \int_{\Omega'} z\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dz = 40\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \rho \left(\int_{2\rho-2R}^{-\sqrt{R^2-\rho^2}} z\, dz \right) d\rho = 40\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \rho \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{2\rho-2R}^{-\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho =$$

$$= 20\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \rho \left(8R\rho - 5\rho^2 - 3R^2\right) d\rho = 20\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \left(8R\rho^2 - 5\rho^3 - 3R^2\rho\right) d\rho =$$

$$= 20\pi \left[\frac{8}{3}R\rho^3 - \frac{5}{4}\rho^4 - \frac{3}{2}R^2\rho^2\right]_0^{\frac{3}{5}R} = -\frac{63}{25}\pi R^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 8. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette tutte le derivate parziali in ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{B}$ Se f non è differenziabile in x_0, allora f non è continua in x_0.

$\boxed{C}$ Se almeno una delle derivate parziali di f non è continua in x_0, allora f non è continua in x_0.

$\boxed{D}$ Se f è differenziabile in x_0, allora tutte le derivate parziali di f sono continue in x_0.

$\boxed{E}$ Se f non è continua in x_0, allora almeno una delle derivate parziali di f non è continua in x_0.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$. Infatti, se per assurdo tutte le derivate parziali di f fossero continue in x_0, allora per il Teorema del differenziale totale risulterebbe che f è differenziabile in x_0, e quindi anche continua in x_0, contraddicendo l'ipotesi di non continuità.

Inoltre, esistono funzioni che ammettono le derivate parziali in tutti i punti e che in un punto non sono continue ma che in quel punto sono diferenzialibili: per esempio per $n = 2$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0,0)$, da cui segue che $\boxed{\text{D}}$ è errata e anche $\boxed{\text{C}}$ è errata perché essendo f differenziabile in questo punto risulta essere anche continua in esso.

Esistono anche funzioni continue in un punto che non sono differenziabili in quel punto: per esempio $f(x) = \|x\|$ in $x_0 = 0_{\mathbb{R}^n}$, da cui segue che $\boxed{\text{B}}$ è errata. Ovviamente $\boxed{\text{A}}$ è errata perché $\boxed{\text{E}}$ è corretta.

Versione V3

Quiz 1. Sia $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ il campo vettoriale definito da $F(x) = \dfrac{19\|x\|}{1+\|x\|^2}\, x$, dove $\|x\|$ è la norma di x in $\mathbb{R}^n$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \|x\| - \arctan(\|x\|)$.

$\boxed{B}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = 19\|x\| + \arctan(\|x\|)$.

$\boxed{C}$ Il campo vettoriale F non è conservativo.

$\boxed{D}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = 19\|x\| - 19\arctan(\|x\|)$.

$\boxed{E}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = 19\|x\| - \arctan(\|x\|)$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è radiale, essendo della forma $F(x) = \varphi(\|x\|)\, x$, dove in questo caso $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è la funzione

$$\varphi(t) = \frac{19t}{1+t^2}.$$

Essendo φ continua, anche F è continuo, e per le proprietà dei campi radiali e continui, risulta che F è conservativo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Inoltre, un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \Phi(\|x\|)$, dove $\Phi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che $\Phi'(t) = t\varphi(t)$ per ogni $t > 0$, ovvero

$$\Phi'(t) = \frac{19t^2}{1+t^2}.$$

Ne segue che

$$\Phi(t) = \int \frac{19t^2}{1+t^2}\, dt = 19 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 19(t - \arctan t) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F è

$$f(x) = \Phi(\|x\|) = 19\|x\| - 19\arctan(\|x\|).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \pi x - 3x^2$, e siano a_n, b_n, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, i coefficienti di Fourier di f.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a $\dfrac{49}{15}\pi^4$.

$\boxed{B}$ converge a π^4.

$\boxed{C}$ converge a $\dfrac{1}{15}\pi^4$.

$\boxed{D}$ converge a $\dfrac{14}{15}\pi^4$.

$\boxed{E}$ converge a $\dfrac{34}{15}\pi^4$.

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi x - 3x^2\right)^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(9x^4 - 6\pi x^3 + \pi^2 x^2\right)\,dx = \left[\frac{9}{5}x^5 - \frac{3}{2}\pi x^4 + \frac{1}{3}\pi^2 x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{64}{15}\pi^5,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi x - 3x^2\right)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\pi x^2 - x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = -\pi^2.$$

Quindi

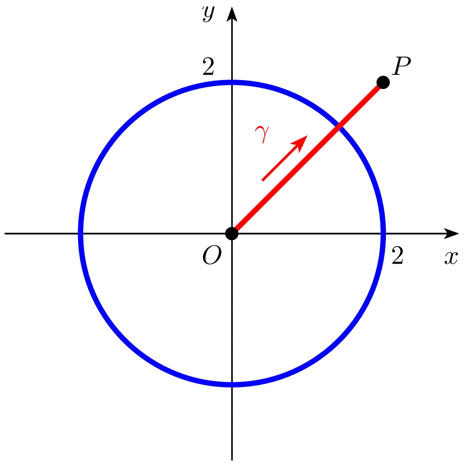
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx - 2a_0^2 = \frac{64}{15}\pi^4 - 2\pi^4 = \frac{34}{15}\pi^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(5 - xy^2,\ y\left|4 - x^2 - y^2\right|\right)$ lungo il segmento di estremi $O(0,0)$ e $P(2,2)$ percorso da O a P vale

$\boxed{A}$ 6. $\boxed{B}$ 5. $\boxed{C}$ 0. $\boxed{D}$ 10. $\boxed{E}$ 3.

SVOLGIMENTO



Si ha che

$$F(x,y) = \left(5 - xy^2,\ y\left|4 - x^2 - y^2\right|\right) = \begin{cases} F_1(x,y) = \left(5 - xy^2,\ y\left(4 - x^2 - y^2\right)\right) & \text{se } x^2 + y^2 \le 4 \\ F_2(x,y) = \left(5 - xy^2,\ y\left(x^2 + y^2 - 4\right)\right) & \text{se } x^2 + y^2 > 4. \end{cases}$$

Il segmento OP non è tutto contenuto nel cerchio $\mathcal{C}$ di centro O e raggio 2.

La curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (2t, 2t)$ è una parametrizzazione del segmento OP da O a P.

Si ha che $\gamma(t) \in \mathcal{C}$ se e solo se $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ne segue che

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (2,2)$ per ogni $t \in [0,1]$,

$$\forall t \in \left[0, \sqrt{2}/2\right]: \qquad F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \left(5 - 8t^3,\ 2t\left(4 - 8t^2\right)\right) \cdot (2,2) = 16t - 48t^3 + 10,$$

$$\forall t \in \left(\sqrt{2}/2, 1\right]: \qquad F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \left(5 - 8t^3,\ 2t\left(8t^2 - 4\right)\right) \cdot (2,2) = 16t^3 - 16t + 10,$$

si ottiene

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(16t - 48t^3 + 10\right)\,dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left(16t^3 - 16t + 10\right)dt =$$

$$= \left[8t^2 - 12t^4 + 10t\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[4t^4 - 8t^2 + 10t\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = 10.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 4. Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{2}y - 1 \leq x \leq 0, \ \frac{1}{2}x - 1 \leq y \leq 0\right\}$. L'integrale $\int_\Omega 6xy\,dx\,dy$ vale

$\boxed{A}$ 17.

$\boxed{B}$ 10.

$\boxed{C}$ 9.

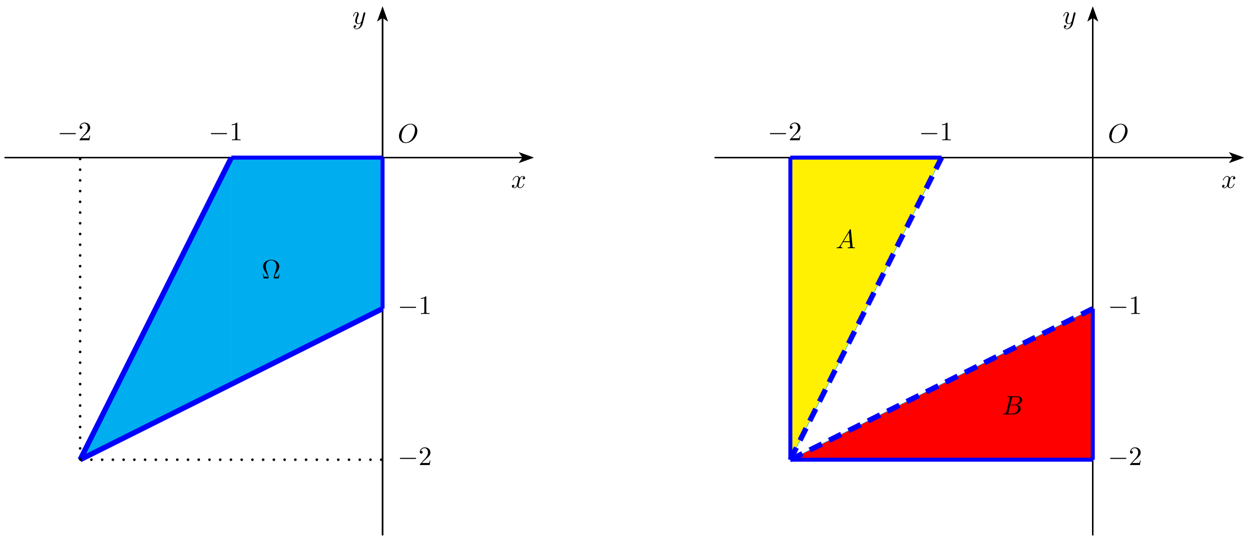
$\boxed{D}$ 20.

$\boxed{E}$ 8.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\Omega = Q \setminus (A \cup B)$, dove $Q = [-2,0]^2$ e

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2 \leq x \leq -1, \ 2(x+1) < y \leq 0\right\}, \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2 \leq y \leq -1, \ 2(y+1) < x \leq 0\right\}.$$



Quindi

$$\int_\Omega 6xy\,dx\,dy = \int_Q 6xy\,dx\,dy - \left(\int_A 6xy\,dx\,dy + \int_B 6xy\,dx\,dy\right).$$

Si ha che

$$\int_Q 6xy\,dx\,dy = 6\left(\int_{-2}^0 x\,dx\right)\left(\int_{-2}^0 y\,dy\right) = 6\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^0 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-2}^0 = 24,$$

ed essendo A un insieme y-semplice

$$\int_A 6xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{-1}\left(\int_{2(x+1)}^0 6xy\,dy\right)dx = 6\int_{-2}^{-1} x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{2(x+1)}^0 dx = -12\int_{-2}^{-1} x(x+1)^2\,dx =$$

$$= -12\int_{-2}^{-1}\left(x^3 + 2x^2 + x\right)dx = -12\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} = 7,$$

$$\int_B 6xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{-1}\left(\int_{2(y+1)}^0 6xy\,dx\right)dy = \int_A 6xy\,dx\,dy = 7.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega 6xy\,dx\,dy = \int_Q 6xy\,dx\,dy - \left(\int_A 6xy\,dx\,dy + \int_B 6xy\,dx\,dy\right) = 24 - 14 = 10.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 5. Sia $R > 0$. Il flusso uscente del campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(4x^2y + e^{z^2-y^2}, \ \log\left(1 + x^2z^2\right) - 4xy^2, \ xy - 25z^2\right)$ dal bordo dell'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 > R^2, \ 0 \leq z \leq 2R - 2\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ vale

$\boxed{A}$ $-\dfrac{63}{10}\pi R^4$.

$\boxed{B}$ $-\dfrac{25}{3}\pi R^4$.

$\boxed{C}$ $-\dfrac{63}{5}\pi R^4$.

$\boxed{D}$ 0.

$\boxed{E}$ $-\dfrac{25}{6}\pi R^4$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \qquad \mathrm{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = -50z.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse z si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = -50 \int_\Omega z \, dx \, dy \, dz = -50 \int_{\Omega'} z\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dz,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le \rho < \frac{3}{5}R, \ 0 \le \vartheta \le 2\pi, \ \sqrt{R^2 - \rho^2} < z \le 2R - 2\rho \right\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = -50 \int_{\Omega'} z\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dz = -100\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \rho \left(\int_{\sqrt{R^2-\rho^2}}^{2R-2\rho} z \, dz \right) d\rho = -100\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \rho \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{\sqrt{R^2-\rho^2}}^{2R-2\rho} d\rho =$$

$$= -50\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \rho \left(3R^2 - 8R\rho + 5\rho^2 \right) d\rho = -50\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \left(3R^2\rho - 8R\rho^2 + 5\rho^3 \right) d\rho =$$

$$= -50\pi \left[\frac{3}{2} R^2 \rho^2 - \frac{8}{3} R \rho^3 + \frac{5}{4} \rho^4 \right]_0^{\frac{3}{5}R} = -\frac{63}{10}\pi R^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 6. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette tutte le derivate parziali in ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se f non è differenziabile in x_0, allora almeno una delle derivate parziali di f non è continua in x_0.

$\boxed{B}$ Se f non è differenziabile in x_0, allora f non è continua in x_0.

$\boxed{C}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{D}$ Se f è differenziabile in x_0, allora tutte le derivate parziali di f sono continue in x_0.

$\boxed{E}$ Se almeno una delle derivate parziali di f non è continua in x_0, allora f non è continua in x_0.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$. Infatti, se per assurdo tutte le derivate parziali di f fossero continue in x_0, allora per il Teorema del differenziale totale risulterebbe che f è differenziabile in x_0, contraddicendo l'ipotesi di non differenziabilità.

Inoltre, esistono funzioni che ammettono le derivate parziali in tutti i punti e che in un punto non sono continue ma che in quel punto sono diferenzialibili: per esempio per $n = 2$ la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2 \right) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \ne (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0,0)$, da cui segue che $\boxed{\text{D}}$ è errata e anche $\boxed{\text{E}}$ è errata perché essendo f differenziabile in questo punto risulta essere anche continua in esso.

Esistono anche funzioni continue in un punto che non sono differenziabili in quel punto: per esempio $f(x) = \|x\|$ in $x_0 = 0_{\mathbb{R}^n}$, da cui segue che $\boxed{\text{B}}$ è errata. Ovviamente $\boxed{\text{C}}$ è errata perché $\boxed{\text{A}}$ è corretta.

Quiz 7. Sia $p > 0$. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, (8^p - 1)^n$

$\boxed{A}$ converge al numero $S = 8^{-p}$ se e solo se $0 < p < \dfrac{1}{3}$.

$\boxed{B}$ converge al numero $S = 8^{-p} - 1$ per ogni $p > 0$.

$\boxed{C}$ non converge per ogni $p > 0$.

$\boxed{D}$ converge al numero $S = 8^{-p}$ per ogni $p > 0$.

$\boxed{E}$ converge al numero $S = 8^{-p} - 1$ se e solo se $0 < p < \dfrac{1}{3}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, (8^p - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 8^p)^n$$

che è una serie geometrica di ragione $a = 1 - 8^p$.

Poiché la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge se e solo se $|b| < 1$, e in tal caso la sua somma è $\dfrac{1}{1-b}$, essendo $|a| = |1 - 8^p| = 8^p - 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge se e solo se $8^p - 1 < 1$, cioè se e solo se $2^{3p} < 2$, ovvero $p < \frac{1}{3}$. Quindi la serie data converge se $0 < p < \frac{1}{3}$ e la sua somma è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 8^p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 8^p)^n - (1 - 8^p)^0 = \frac{1}{1 - (1 - 8^p)} - 1 = 8^{-p} - 1.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 8. La funzione $f(x, y) = \left(3 - x^2\right) e^{-x^2 - y^2}$

$\boxed{A}$ ha tre punti stazionari: uno di massimo locale e due di minimo locale.

$\boxed{B}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale, uno di massimo locale e uno di sella.

$\boxed{C}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale e due di massimo locale.

$\boxed{D}$ ha due punti stazionari: uno di minimo locale e uno di massimo locale.

$\boxed{E}$ non ha punti stazionari.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x \left(4 - x^2\right) e^{-x^2 - y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \left(3 - x^2\right) e^{-x^2 - y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \quad \iff \quad \begin{cases} x \left(4 - x^2\right) = 0 \\ y \left(3 - x^2\right) = 0 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x = 0, \;\; x = \pm 2 \\ y = 0, \;\; x = \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \left[\left(4x^2 - 2\right)\left(4 - x^2\right) + 4x^2\right] e^{-x^2 - y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \left(4y^2 - 2\right)\left(3 - x^2\right) e^{-x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4xy\left(4 - x^2\right) e^{-x^2 - y^2}.$$

Si ha che

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \qquad H_f(\pm 2, 0) = \begin{pmatrix} 16\, e^{-4} & 0 \\ 0 & 2\, e^{-4} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il punto $(0, 0)$ è di massimo locale per f mentre i punti $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ sono di minimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Versione V4

Quiz 1. Sia $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{2}y - 1 \le x \le 0, \ \frac{1}{2}x - 1 \le y \le 0\right\}$. L'integrale $\int_\Omega 12xy\,dx\,dy$ vale

$\boxed{A}$ 40.

$\boxed{B}$ 16.

$\boxed{C}$ 20.

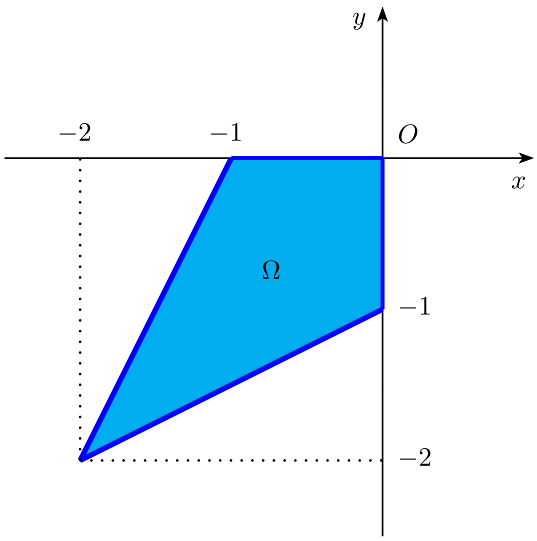
$\boxed{D}$ 17.

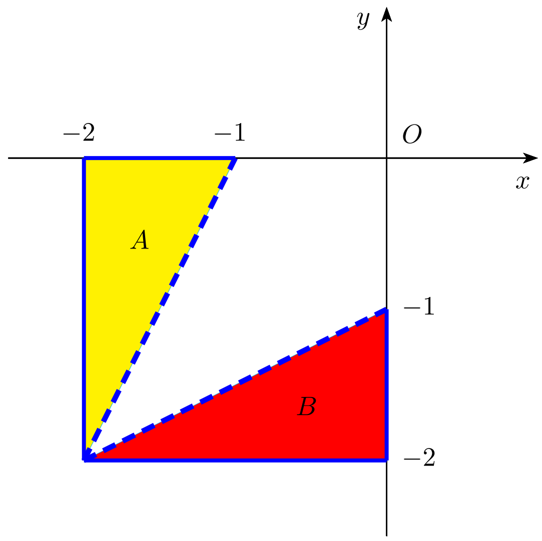
$\boxed{E}$ 18.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\Omega = Q \setminus (A \cup B)$, dove $Q = [-2, 0]^2$ e

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2 \le x \le -1, \ 2(x+1) < y \le 0\right\}, \qquad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2 \le y \le -1, \ 2(y+1) < x \le 0\right\}.$$





Quindi

$$\int_\Omega 12xy\,dx\,dy = \int_Q 12xy\,dx\,dy - \left(\int_A 12xy\,dx\,dy + \int_B 12xy\,dx\,dy\right).$$

Si ha che

$$\int_Q 12xy\,dx\,dy = 12\left(\int_{-2}^0 x\,dx\right)\left(\int_{-2}^0 y\,dy\right) = 12\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^0\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-2}^0 = 48,$$

ed essendo A un insieme y-semplice

$$\int_A 12xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{-1}\left(\int_{2(x+1)}^0 12xy\,dy\right)dx = 12\int_{-2}^{-1} x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{2(x+1)}^0 dx = -24\int_{-2}^{-1} x(x+1)^2\,dx =$$

$$= -24\int_{-2}^{-1}\left(x^3 + 2x^2 + x\right)dx = -24\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} = 14,$$

$$\int_B 12xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{-1}\left(\int_{2(y+1)}^0 12xy\,dx\right)dy = \int_A 12xy\,dx\,dy = 14.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega 9xy\,dx\,dy = \int_Q 9xy\,dx\,dy - \left(\int_A 9xy\,dx\,dy + \int_B 9xy\,dx\,dy\right) = 48 - 28 = 20.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 2. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(x^2y - 2, \ y\left|x^2 + y^2 - 1\right|\right)$ lungo il segmento di estremi $O(0, 0)$ e $P(1, 1)$ percorso da O a P vale

$\boxed{A}$ 0.

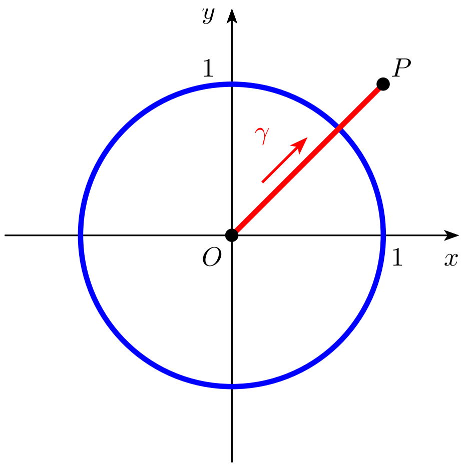
$\boxed{B}$ $-\dfrac{7}{2}$.

$\boxed{C}$ $-\dfrac{7}{4}$.

$\boxed{D}$ $-\dfrac{3}{4}$.

$\boxed{E}$ $-\dfrac{3}{2}$.

SVOLGIMENTO



Si ha che

$$F(x,y) = \left(x^2y-2,\ \ y\left|x^2+y^2-1\right|\right) = \begin{cases} F_1(x,y) = \Big(x^2y-2,\ \ y\left(1-x^2-y^2\right)\Big) & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ F_2(x,y) = \Big(x^2y-2,\ \ y\left(x^2+y^2-1\right)\Big) & \text{se } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

Il segmento OP non è tutto contenuto nel cerchio $\mathcal{C}$ di centro O e raggio 1.

La curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t,t)$ è una parametrizzazione del segmento OP da O a P.

Si ha che $\gamma(t) \in \mathcal{C}$ se e solo se $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ne segue che

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (1,1)$ per ogni $t \in [0,1]$,

$$\forall t \in \left[0, \sqrt{2}/2\right]: \qquad F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \Big(t^3-2,\ \ t\left(1-2t^2\right)\Big) \cdot (1,1) = t - t^3 - 2,$$

$$\forall t \in \left(\sqrt{2}/2, 1\right]: \qquad F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \Big(t^3-2,\ \ t\left(2t^2-1\right)\Big) \cdot (1,1) = 3t^3 - t - 2,$$

si ottiene

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(t - t^3 - 2\right)\,dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left(3t^3 - t - 2\right)\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 - 2t\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 - 2t\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = -\frac{3}{2}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 3. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette tutte le derivate parziali in ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se f è differenziabile in x_0, allora tutte le derivate parziali di f sono continue in x_0.

$\boxed{B}$ Se f non è continua in x_0, allora almeno una delle derivate parziali di f non è continua in x_0.

$\boxed{C}$ Se f non è differenziabile in x_0, allora f non è continua in x_0.

$\boxed{D}$ Se almeno una delle derivate parziali di f non è continua in x_0, allora f non è continua in x_0.

$\boxed{E}$ Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$. Infatti, se per assurdo tutte le derivate parziali di f fossero continue in x_0, allora per il Teorema del differenziale totale risulterebbe che f è differenziabile in x_0, e quindi anche continua in x_0, contraddicendo l'ipotesi di non continuità.

Inoltre, esistono funzioni che ammettono le derivate parziali in tutti i punti e che in un punto non sono continue ma che in quel punto sono diferenzialibili: per esempio per $n = 2$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(x_0, y_0) = (0,0)$, da cui segue che $\boxed{\text{A}}$ è errata e anche $\boxed{\text{D}}$ è errata perché essendo f differenziabile in questo punto risulta essere anche continua in esso.

Esistono anche funzioni continue in un punto che non sono differenziabili in quel punto: per esempio $f(x) = \|x\|$ in $x_0 = 0_{\mathbb{R}^n}$, da cui segue che $\boxed{\text{C}}$ è errata. Ovviamente $\boxed{\text{E}}$ è errata perché $\boxed{\text{B}}$ è corretta.

Quiz 4. La funzione $f(x,y) = \left(8-y^2\right)\, e^{-x^2-y^2}$

$\boxed{A}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale e due di massimo locale.

$\boxed{B}$ ha due punti stazionari: uno di minimo locale e uno di massimo locale.

$\boxed{C}$ ha tre punti stazionari: uno di massimo locale e due di minimo locale.

$\boxed{D}$ non ha punti stazionari.

$\boxed{E}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale, uno di massimo locale e uno di sella.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x\left(8-y^2\right)e^{-x^2-y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\left(y^2-9\right)e^{-x^2-y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad\iff\quad \begin{cases} x\left(8-y^2\right) = 0 \\ y\left(y^2-9\right) = 0 \end{cases} \quad\iff\quad \begin{cases} x = 0, \;\; y = \pm 2\sqrt{2} \\ y = 0, \;\; y = \pm 3. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari di f sono $(0,0)$, $(0,3)$ e $(0,-3)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(4x^2-2\right)\left(8-y^2\right)e^{-x^2-y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left[\left(2-4y^2\right)\left(y^2-9\right)+4y^2\right]e^{-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xy\left(y^2-9\right)e^{-x^2-y^2}.$$

Si ha che

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,\pm 3) = \begin{pmatrix} 2\,e^{-9} & 0 \\ 0 & 36\,e^{-9} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il punto $(0,0)$ è di massimo locale per f mentre i punti $(0,3)$ e $(0,-3)$ sono di minimo locale per f.

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 5. Sia $p > 0$. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(16^p - 1\right)^n$

$\boxed{A}$ converge al numero $S = 16^{-p}$ per ogni $p > 0$.

$\boxed{B}$ converge al numero $S = 16^{-p} - 1$ per ogni $p > 0$.

$\boxed{C}$ non converge per ogni $p > 0$.

$\boxed{D}$ converge al numero $S = 16^{-p} - 1$ se e solo se $0 < p < \dfrac{1}{4}$.

$\boxed{E}$ converge al numero $S = 16^{-p}$ se e solo se $0 < p < \dfrac{1}{4}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, (16^p - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 16^p)^n$$

che è una serie geometrica di ragione $a = 1 - 16^p$.

Poiché la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge se e solo se $|b| < 1$, e in tal caso la sua somma è $\dfrac{1}{1-b}$, essendo $|a| = |1 - 16^p| = 16^p - 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge se e solo se $16^p - 1 < 1$, cioè se e solo se $2^{4p} < 2$, ovvero $p < \frac{1}{4}$. Quindi la serie data converge se $0 < p < \frac{1}{4}$ e la sua somma è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 16^p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 16^p)^n - (1 - 16^p)^0 = \frac{1}{1 - (1 - 16^p)} - 1 = 16^{-p} - 1.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \pi x - 5x^2$, e siano a_n, b_n, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, i coefficienti di Fourier di f.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a π^4.

$\boxed{B}$ converge a $\dfrac{23}{9}\,\pi^4$.

$\boxed{C}$ converge a $\dfrac{1}{9}\,\pi^4$.

$\boxed{D}$ converge a $\dfrac{34}{9}\,\pi^4$.

$\boxed{E}$ converge a $\dfrac{46}{9}\,\pi^4$.

SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi x - 5x^2\right)^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(25x^4 - 10\pi x^3 + \pi^2 x^2\right) \, dx = \left[5x^5 - \frac{5}{4}\pi x^4 + \frac{1}{3}\pi^2 x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{32}{3}\pi^5,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi x - 5x^2\right) \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2}\pi x^2 - \frac{5}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{5}{3}\pi^2.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - 2a_0^2 = \frac{32}{3}\pi^4 - \frac{50}{9}\pi^4 = \frac{46}{9}\pi^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 7. Sia $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ il campo vettoriale definito da $F(x) = \dfrac{1}{19 + \|x\|}\, x$, dove $\|x\|$ è la norma di x in $\mathbb{R}^n$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \|x\| + \log(19 + \|x\|)$.

$\boxed{B}$ Il campo vettoriale F non è conservativo.

$\boxed{C}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \|x\| + 19\log(19 + \|x\|)$.

$\boxed{D}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \|x\| - 19\log(19 + \|x\|)$.

$\boxed{E}$ Il campo vettoriale F è conservativo e un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \|x\| - \log(19 + \|x\|)$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è radiale, essendo della forma $F(x) = \varphi(\|x\|)\, x$, dove in questo caso $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è la funzione

$$\varphi(t) = \frac{1}{19 + t}.$$

Essendo φ continua, anche F è continuo, e per le proprietà dei campi radiali e continui, risulta che F è conservativo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Inoltre, un potenziale di F su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $f(x) = \Phi(\|x\|)$, dove $\Phi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che $\Phi'(t) = t\varphi(t)$ per ogni $t > 0$, ovvero

$$\Phi'(t) = \frac{t}{19 + t}.$$

Ne segue che

$$\Phi(t) = \int \frac{t}{19 + t}\, dt = \int \left(1 - \frac{19}{19 + t}\right) dt = t - 19\log(19 + t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F è

$$f(x) = \Phi(\|x\|) = \|x\| - 19\log(19 + \|x\|).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 8. Sia $R > 0$. Il flusso uscente del campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(e^{y^2+z^2} - 6x^2y,\ \log\left(2 + x^2z^2\right) + 6xy^2,\ xy - 50z^2\right)$ dal bordo dell'insieme $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 > R^2,\ 2\sqrt{x^2 + y^2} - 2R \le z \le 0\right\}$ vale

$\boxed{A}$ $\dfrac{21}{5}\pi R^4$. $\boxed{B}$ $\dfrac{63}{5}\pi R^4$. $\boxed{C}$ $\dfrac{25}{9}\pi R^4$. $\boxed{D}$ $\dfrac{25}{3}\pi R^4$. $\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div}F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \qquad \mathrm{div}F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = -100z.$$

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse z si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div}F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = -100\int_\Omega z\, dx\, dy\, dz = -100\int_{\Omega'} z\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dz,$$

dove $\Omega' = \left\{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le \rho < \frac{3}{5}R,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi,\ 2\rho - 2R \le z < -\sqrt{R^2 - \rho^2}\right\}$.

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = -100\int_{\Omega'} z\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dz = -200\pi\int_0^{\frac{3}{5}R} \rho\left(\int_{2\rho - 2R}^{-\sqrt{R^2-\rho^2}} z\, dz\right) d\rho = -200\pi\int_0^{\frac{3}{5}R} \rho\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{2\rho-2R}^{-\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho =$$

$$= -100\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \rho \left(8R\rho - 5\rho^2 - 3R^2\right)\, d\rho = -100\pi \int_0^{\frac{3}{5}R} \left(8R\rho^2 - 5\rho^3 - 3R^2\rho\right)\, d\rho =$$

$$= -100\pi \left[\frac{8}{3}R\rho^3 - \frac{5}{4}\rho^4 - \frac{3}{2}R^2\rho^2\right]_0^{\frac{3}{5}R} = \frac{63}{5}\pi R^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.
