Svolgimento dei quiz dell'esame di Analisi Matematica II del 5 settembre 2022 ore 17

Versione: V1

Quiz 1. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = (x + y)^6, \ 0 \le x \le 1, \ -x \le y \le 0\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{z - 8xy}{\sqrt{72(x + y)^{10} + 1}}\, d\sigma$ vale

A $-\dfrac{57}{56}$.

B $-\dfrac{2}{3}$.

C $-\dfrac{57}{28}$.

D $\dfrac{57}{28}$.

E $\dfrac{57}{56}$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $z = (x + y)^6$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ -x \le y \le 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = \big(x, y, (x + y)^6\big)$.

Posto $f(x, y, z) = \dfrac{z - 8xy}{\sqrt{72(x + y)^{10} + 1}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{z - 8xy}{\sqrt{72(x + y)^{10} + 1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y))\, \|N(x, y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) = \left(-6(x + y)^5, -6(x + y)^5, 1\right).$$

Quindi $\|N(x, y)\| = \sqrt{72(x + y)^{10} + 1}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{z - 8xy}{\sqrt{72(x + y)^{10} + 1}}\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y))\, \|N(x, y)\|\, dx\, dy = \int_K \left[(x + y)^6 - 8xy\right]\, dx\, dy =$$

essendo K un insieme y-semplice si ottiene

$$= \int_0^1 \left(\int_{-x}^0 \left[(x + y)^6 - 8xy\right]\, dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{7}(x + y)^7 - 4xy^2\right]_{-x}^0 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{7}x^7 + 4x^3\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{56}x^8 + x^4\right]_0^1 = \frac{57}{56}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 2. Sia $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1 + \frac{1}{2}y, \ 0 \le y \le 1 + \frac{1}{2}x\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega 3xy\, dx\, dy$ vale

A 17.

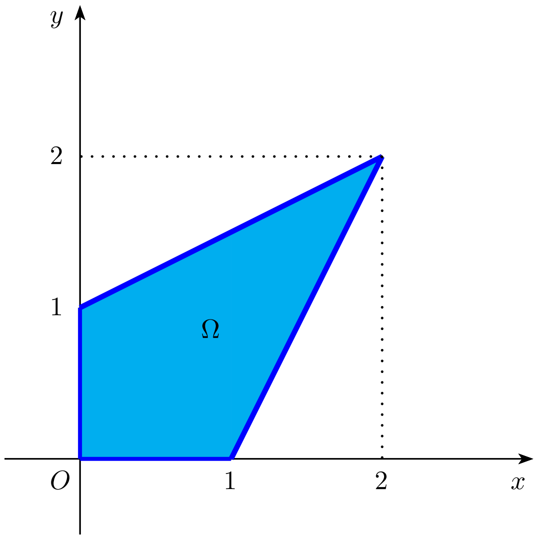
B 4.

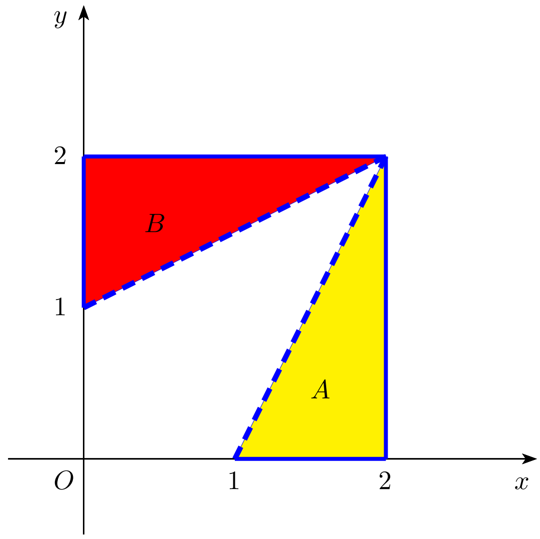
C 10.

D 5.

E 12.

SVOLGIMENTO





Osserviamo che $\Omega = Q \setminus (A \cup B)$, dove $Q = [0,2]^2$ e

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x \le 2, \ 0 \le y < 2(x-1)\right\}, \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le y \le 2, \ 0 \le x < 2(y-1)\right\}.$$

Quindi

$$\int_\Omega 3xy\,dx\,dy = \int_Q 3xy\,dx\,dy - \left(\int_A 3xy\,dx\,dy + \int_B 3xy\,dx\,dy\right).$$

Si ha che

$$\int_Q 3xy\,dx\,dy = 3\left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^2 y\,dy\right) = 3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = 12,$$

ed essendo A un insieme y-semplice

$$\int_A 3xy\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_0^{2(x-1)} 3xy\,dy\right)dx = 3\int_1^2 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2(x-1)} dx = 6\int_1^2 x(x-1)^2\,dx =$$

$$= 6\int_1^2\left(x^3 - 2x^2 + x\right)\,dx = 6\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{7}{2},$$

$$\int_B 3xy\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_0^{2(y-1)} 3xy\,dx\right)dy = \int_A 3xy\,dx\,dy = \frac{7}{2}.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega 3xy\,dx\,dy = \int_Q 3xy\,dx\,dy - \left(\int_A 3xy\,dx\,dy + \int_B 3xy\,dx\,dy\right) = 12 - 7 = 5.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 3. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se F non è conservativo in Ω, allora Ω non è semplicemente connesso.

$\boxed{B}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{C}$ Se F è conservativo in Ω, allora F è irrotazionale in Ω.

$\boxed{D}$ Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo in Ω.

$\boxed{E}$ Se F è irrotazionale in Ω, allora F è conservativo in Ω.

SVOLGIMENTO

Per la Condizione necessaria per i campi conservativi di classe C^1, se F è conservativo in Ω, allora F è irrotazionale in Ω. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 4. Siano (a_n) una successione reale e $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $\lim_n a_n = L > 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{B}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{C}$ Se la successione (S_n) è limitata, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{D}$ Se $\lim_n S_n = +\infty$, allora $\lim_n a_n \neq 0$.

$\boxed{E}$ Se non esiste $\lim_n a_n$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è indeterminata.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$. Infatti, se $\lim_n a_n = L > 0$, allora per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge. Inoltre, per la definizione di limite, preso $\varepsilon = L/2$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha che $|a_n - L| < \varepsilon = L/2$, ovvero $-L/2 < a_n - L < L/2$, da cui segue che $a_n > L - L/2 = L/2 > 0$. Quindi, eventuamente a parte un numero finito di valori di a_n, risulta che $a_n > 0$. Ne segue che la serie di a_n è a termini positivi, e poiché non vale la condizione necessaria, risulta che questa serie diverge positivamente, e quindi diverge.

Le altre affermazioni sono errate. Infatti, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ ha limite zero ma la sua serie (serie armonica) diverge positivamente, e quindi $\boxed{\text{B}}$ e $\boxed{\text{D}}$ sono errate. Inoltre, la successione $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ non ha limite ma la sua serie diverge, e quindi $\boxed{\text{E}}$ è errata.

Infine, la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ è limitata (infatti $S_n = 1$ per n pari, $S_n = 0$ per n dispari) ma la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ è indeterminata, e quindi $\boxed{\text{C}}$ è errata.

Quiz 5. La serie numerica $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n^2 - n^3 \sin \frac{4}{n}}{(n+1)\log(n+1)}$

$\boxed{A}$ diverge negativamente.

$\boxed{B}$ diverge positivamente.

$\boxed{C}$ converge ad un numero reale $S > 0$.

$\boxed{D}$ converge ad un numero reale $S < 0$.

$\boxed{E}$ converge a 0.

SVOLGIMENTO

Utilizzando lo sviluppo di Maclaurin della funzione $\sin x$ si ha che

$$4n^2 - n^3 \sin \frac{4}{n} = 4n^2 - n^3 \left[\frac{4}{n} - \frac{32}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = 4n^2 - 4n^2 + \frac{32}{3} + o(1) = \frac{32}{3} + o(1), \qquad n \to +\infty.$$

Quindi

$$\frac{4n^2 - n^3 \sin \frac{4}{n}}{(n+1)\log(n+1)} \sim \frac{32}{3(n+1)\log(n+1)}, \qquad n \to +\infty.$$

Quindi la serie data è a termini positivi. Per il Criterio di Maclaurin la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ diverge. Per il Criterio del confronto asintotico la serie data diverge positivamente. La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 6. La derivata della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4(x-1)\,y^2}{(x-1)^2 + y^2} + 8x + 3y & \text{se } (x,y) \neq (1,0) \\ 8 & \text{se } (x,y) = (1,0) \end{cases}$ nel punto $(1,0)$ rispetto al vettore $v = (1,-1)$

$\boxed{A}$ non esiste.

$\boxed{B}$ vale 3.

$\boxed{C}$ vale 0.

$\boxed{D}$ vale 7.

$\boxed{E}$ vale 8.

SVOLGIMENTO

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(1,0)$ rispetto al vettore $v = (1,-1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((1,0)+tv\Big) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((1,0)+t(1,-1)\Big) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t,-t) - f(1,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{7t}{t} = 7.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 7. Sia $R > 0$. Il flusso uscente del campo vettoriale $F(x,y,z) = \dfrac{2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,(x,y,z)$ dal bordo di

$\Omega = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le R^2\big\}$ vale

$\boxed{A}$ 4π.

$\boxed{B}$ 0.

$\boxed{C}$ 8π.

$\boxed{D}$ 2π.

$\boxed{E}$ 16π.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ e quindi $\Omega \not\subseteq \mathrm{dom}\,(F)$ mentre $\partial\Omega \subseteq \mathrm{dom}\,(F)$.

Il bordo di Ω è la superficie sferica di centro l'origine e raggio R nello spazio $\mathbb{R}^3$. Una parametrizzazione di $\partial\Omega$ è $\sigma : [0,\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definta da

$$\sigma(\vartheta,\varphi) = \big(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta\big).$$

Quindi, posto $K = [0,\pi]\times[0,2\pi]$, si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta,\varphi))\cdot N(\vartheta,\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi,$$

dove N è un vettore normale a $\partial\Omega$ uscente da Ω. Un vettore normale a $\partial\Omega$ è

$$N_\sigma(\vartheta,\varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta,\varphi)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & -R\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \big(R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi,\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi,\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\big).$$

Osserviamo che questo vettore è uscente da Ω. Infatti, scelto ad esempio $(\vartheta_0,\varphi_0) = (\pi/2,\pi/2)$, si ha che

$$\sigma(\vartheta_0,\varphi_0) = \sigma(\pi/2,\pi/2) = (0,R,0), \qquad N_\sigma(\vartheta_0,\varphi_0) = N_\sigma(\pi/2,\pi/2) = (0,R^2,0).$$

Disegnando la sfera Ω e applicando il vettore $N_\sigma(\vartheta_0,\varphi_0)$ nel punto $\sigma(\vartheta_0,\varphi_0)$ si osserva che questo vettore punta verso l'esterno di Ω. Quindi prendiamo $N(\vartheta,\varphi) = N_\sigma(\vartheta,\varphi)$.

Si ha che

$$F(\sigma(\vartheta,\varphi))\cdot N(\vartheta,\varphi) = F\big(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta\big)\cdot\big(R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi,\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi,\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\big) =$$

$$= \frac{2}{R^3}\big(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta\big)\cdot\big(R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi,\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi,\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\big) =$$

$$= 2\sin\vartheta.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta,\varphi))\cdot N(\vartheta,\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi = \int_K 2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

essendo K un rettangolo con lati paralleli agli assi ϑ e φ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ϑ e una di φ, si ottiene

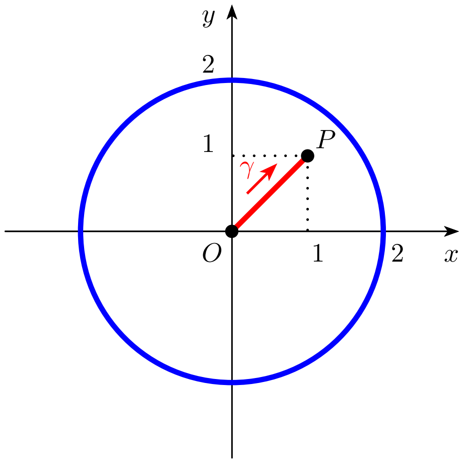
$$= 4\pi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta = 8\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 8. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(x\left|4 - x^2 - y^2\right|,\ 3 - x^2 y\right)$ lungo il segmento di estremi $O(0,0)$ e $P(1,1)$ percorso da O a P vale

$\boxed{A}$ $\frac{1}{4}$. $\boxed{B}$ $\frac{17}{4}$. $\boxed{C}$ $-\frac{17}{4}$. $\boxed{D}$ 0. $\boxed{E}$ $-\frac{1}{4}$.

SVOLGIMENTO



Si ha che

$$F(x,y) = \left(x\left|4 - x^2 - y^2\right|,\ 3 - x^2 y\right) = \begin{cases} F_1(x,y) = \Big(x\left(4 - x^2 - y^2\right),\ 3 - x^2 y\Big) & \text{se } x^2 + y^2 < 4 \\ F_2(x,y) = \Big(x\left(x^2 + y^2 - 4\right),\ 3 - x^2 y\Big) & \text{se } x^2 + y^2 \geq 4. \end{cases}$$

Il segmento OP è tutto contenuto nella palla aperta $B_2(0,0)$ di centro $O(0,0)$ e raggio 2.

In questa palla il campo vettoriale F è conservativo. Infatti, il campo F sulla palla è di classe C^1, la palla è semplicemente connessa e, posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\forall (x,y) \in B_2(0,0): \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -2xy = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi per la Condizione sufficiente per i campi vettoriali di classe C^1 il campo F è conservativo sulla palla.

Per le proprietà dei campi conservativi si ha che, se f è un potenziale di F sulla palla, allora l'integrale di linea di F lungo il segmento di estremi $O(0,0)$ e $P(1,1)$ percorso da O a P è uguale a

$$f(1,1) - f(0,0).$$

Si osserva facilmente che un potenziale di F su $B_2(0,0)$ è

$$f(x,y) = 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 y^2 + 3y.$$

Quindi l'integrale vale

$$f(1,1) - f(0,0) = \frac{17}{4}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Metodo alternativo. La curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t,t)$ è una parametrizzazione del segmento OP da O a P. Ne segue che, essendo $F = F_1$ sul sostegno di γ,

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (1,1)$ per ogni $t \in [0,1]$,

$$\forall t \in [0,1]: \qquad F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \Big(t\left(4 - 2t^2\right),\ \ 3 - t^3\Big) \cdot (1,1) = 4t - 3t^3 + 3,$$

si ottiene

$$= \int_0^1 \left(4t - 3t^3 + 3\right)\, dt = \left[2t^2 - \frac{3}{4}t^4 + 3t\right]_0^1 = \frac{17}{4}.$$

Versione V2

Quiz 1. Siano (a_n) una successione reale e $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$.

$\boxed{B}$ Se non esiste $\lim_n a_n$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è indeterminata.

$\boxed{C}$ Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge, allora $\lim_n a_n \neq 0$.

$\boxed{D}$ Se la successione (S_n) è illimitata, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{E}$ Se $\lim_n a_n = L > 1$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$. Infatti, se $\lim_n a_n = L > 1$, allora per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge. Inoltre, per la definizione di limite, preso $\varepsilon = L - 1$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha che $|a_n - L| < \varepsilon = L - 1$, ovvero $1 - L < a_n - L < L - 1$, da cui segue che $a_n > L + 1 - L = 1 > 0$. Quindi, eventuamente a parte un numero finito di valori di a_n, risulta che $a_n > 0$. Ne segue che la serie di a_n è a termini positivi, e poiché non vale la condizione necessaria, risulta che questa serie diverge positivamente, e quindi diverge.

Le altre affermazioni sono errate. Infatti, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ ha limite zero ma la sua serie (serie armonica) diverge positivamente, e quindi $\boxed{\text{A}}$ e $\boxed{\text{C}}$ sono errate. Inoltre, la successione $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ non ha limite ma la sua serie diverge, e quindi $\boxed{\text{B}}$ è errata.

Infine, la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k$ è illimitata (infatti $S_n = \frac{1+2^{n+1}}{3}$ per n pari, $S_n = \frac{1-2^{n+1}}{3}$ per n dispari) ma la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n$ è indeterminata perché la successione (S_n) non ha limite, e quindi $\boxed{\text{D}}$ è errata.

Quiz 2. Sia $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 1 + \frac{1}{2}y, \; 0 \leq y \leq 1 + \frac{1}{2}x \right\}$. L'integrale $\int_{\Omega} 9xy \, dx \, dy$ vale

$\boxed{A}$ 36.

$\boxed{B}$ 17.

$\boxed{C}$ 12.

$\boxed{D}$ 15.

$\boxed{E}$ 30.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\Omega = Q \setminus (A \cup B)$, dove $Q = [0,2]^2$ e

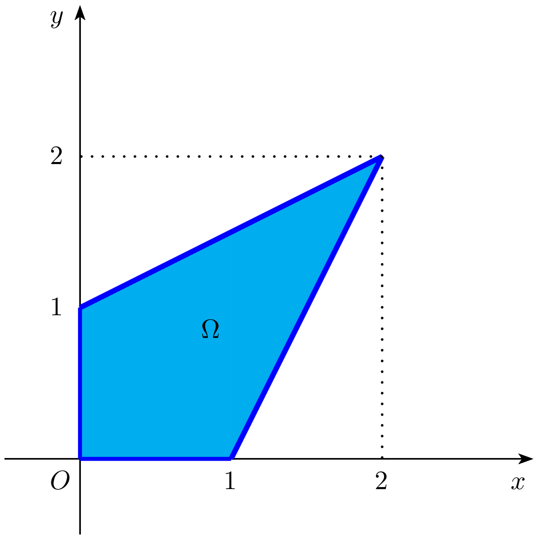
$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \leq x \leq 2, \; 0 \leq y < 2(x-1) \right\}, \qquad B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \leq y \leq 2, \; 0 \leq x < 2(y-1) \right\}.$$

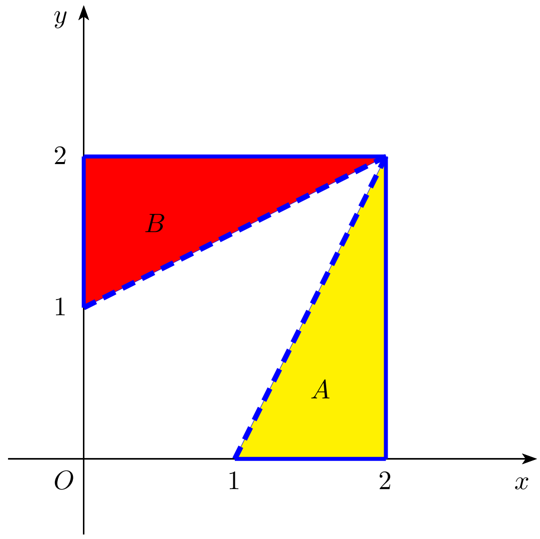
Quindi

$$\int_{\Omega} 9xy \, dx \, dy = \int_{Q} 9xy \, dx \, dy - \left(\int_{A} 9xy \, dx \, dy + \int_{B} 9xy \, dx \, dy \right).$$

Si ha che

$$\int_{Q} 9xy \, dx \, dy = 9 \left(\int_0^2 x \, dx \right) \left(\int_0^2 y \, dy \right) = 9 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^2 = 36,$$





ed essendo A un insieme y-semplice

$$\int_A 9xy\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^{2(x-1)} 9xy\,dy \right) dx = 9 \int_1^2 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{2(x-1)} dx = 18 \int_1^2 x(x-1)^2\,dx =$$

$$= 18 \int_1^2 \left(x^3 - 2x^2 + x \right) dx = 18 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = \frac{21}{2},$$

$$\int_B 9xy\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^{2(y-1)} 9xy\,dx \right) dy = \int_A 9xy\,dx\,dy = \frac{21}{2}.$$

Ne segue che

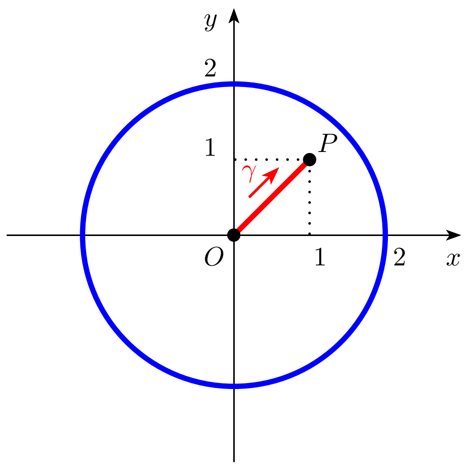
$$\int_\Omega 9xy\,dx\,dy = \int_Q 9xy\,dx\,dy - \left(\int_A 3xy\,dx\,dy + \int_B 9xy\,dx\,dy \right) = 36 - 21 = 15.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(x \left| 4 - x^2 - y^2 \right|,\ 2 - x^2 y \right)$ lungo il segmento di estremi $O(0,0)$ e $P(1,1)$ percorso da O a P vale

$\boxed{A}$ $\frac{7}{4}$. $\boxed{B}$ $-\frac{13}{4}$. $\boxed{C}$ $\frac{13}{4}$. $\boxed{D}$ $-\frac{7}{4}$. $\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO



Si ha che

$$F(x,y) = \left(x \left| 4 - x^2 - y^2 \right|,\ 2 - x^2 y \right) = \begin{cases} F_1(x,y) = \left(x \left(4 - x^2 - y^2 \right),\ 2 - x^2 y \right) & \text{se } x^2 + y^2 < 4 \\ F_2(x,y) = \left(x \left(x^2 + y^2 - 4 \right),\ 2 - x^2 y \right) & \text{se } x^2 + y^2 \geq 4. \end{cases}$$

Il segmento OP è tutto contenuto nella palla aperta $B_2(0,0)$ di centro $O(0,0)$ e raggio 2.

In questa palla il campo vettoriale F è conservativo. Infatti, il campo F sulla palla è di classe C^1, la palla è semplicemente connessa e, posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\forall (x,y) \in B_2(0,0): \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -2xy = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi per la Condizione sufficiente per i campi vettoriali di classe C^1 il campo F è conservativo sulla palla.

Per le proprietà dei campi conservativi si ha che, se f è un potenziale di F sulla palla, allora l'integrale di linea di F lungo il segmento di estremi $O(0,0)$ e $P(1,1)$ percorso da O a P è uguale a

$$f(1,1) - f(0,0).$$

Si osserva facilmente che un potenziale di F su $B_2(0,0)$ è

$$f(x,y) = 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 + 2y.$$

Quindi l'integrale vale

$$f(1,1) - f(0,0) = \frac{13}{4}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Metodo alternativo. La curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t,t)$ è una parametrizzazione del segmento OP da O a P. Ne segue che, essendo $F = F_1$ sul sostegno di γ,

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (1,1)$ per ogni $t \in [0,1]$,

$$\forall t \in [0,1]: \qquad F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \Big(t\left(4 - 2t^2\right),\ 2 - t^3\Big) \cdot (1,1) = 4t - 3t^3 + 2,$$

si ottiene

$$= \int_0^1 \left(4t - 3t^3 + 2\right) dt = \left[2t^2 - \frac{3}{4}t^4 + 2t\right]_0^1 = \frac{13}{4}.$$

Quiz 4. Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = (x+y)^7, \ 0 \le y \le 1, \ -y \le x \le 0\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{z + 8xy}{\sqrt{98(x+y)^{12} + 1}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ $\frac{71}{36}$.

$\boxed{B}$ $-\frac{2}{3}$.

$\boxed{C}$ $-\frac{71}{36}$.

$\boxed{D}$ $-\frac{71}{72}$.

$\boxed{E}$ $\frac{71}{72}$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $z = (x+y)^7$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 1, \ -y \le x \le 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, (x+y)^7\right)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{z + 8xy}{\sqrt{98(x+y)^{12} + 1}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{z + 8xy}{\sqrt{98(x+y)^{12} + 1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\, \|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-7(x+y)^6, -7(x+y)^6, 1\right).$$

Quindi $\|N(x,y)\| = \sqrt{98(x+y)^{12}+1}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{z+8xy}{\sqrt{98(x+y)^{12}+1}}\,d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\,\|N(x,y)\|\,dx\,dy = \int_K \left[(x+y)^7 + 8xy\right]\,dx\,dy =$$

essendo K un insieme x-semplice si ottiene

$$= \int_0^1 \left(\int_{-y}^0 \left[(x+y)^7 + 8xy\right]\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{8}(x+y)^8 + 4x^2y \right]_{-y}^0 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{8}y^8 - 4y^3 \right) dy =$$

$$= \left[\frac{1}{72}y^9 - y^4 \right]_0^1 = -\frac{71}{72}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 5. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^6 \sin\frac{2}{n^2} - 2n^4}{(n+1)\log^2(n+1)}$

$\boxed{A}$ converge a 0.

$\boxed{B}$ diverge positivamente.

$\boxed{C}$ converge ad un numero reale $S < 0$.

$\boxed{D}$ diverge negativamente.

$\boxed{E}$ converge ad un numero reale $S > 0$.

SVOLGIMENTO

Utilizzando lo sviluppo di Maclaurin della funzione $\sin x$ si ha che

$$n^6 \sin\frac{2}{n^2} - 2n^4 = n^6\left[\frac{2}{n^2} - \frac{4}{3n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right] - 2n^4 = 2n^4 - \frac{4}{3} + o(1) - 2n^4 = -\frac{4}{3} + o(1), \qquad n \to +\infty.$$

Quindi

$$\frac{n^6 \sin\frac{2}{n^2} - 2n^4}{(n+1)\log^2(n+1)} \sim -\frac{4}{3(n+1)\log^2(n+1)}, \qquad n \to +\infty.$$

Quindi la serie data è a termini negativi. Considerando la serie dei termini opposti $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(-\frac{n^6 \sin\frac{2}{n^2} - 2n^4}{(n+1)\log^2(n+1)}\right)$, che è a termini positivi, si ha che

$$-\frac{n^6 \sin\frac{2}{n^2} - 2n^4}{(n+1)\log^2(n+1)} \sim \frac{4}{3(n+1)\log^2(n+1)}, \qquad n \to +\infty.$$

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}$ definita su $[3,+\infty)$. Questa funzione è positiva e decrescente. Valutiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\,dx.$$

Posto $t = \log(x+1)$, da cui $dt = \frac{1}{x+1}\,dx$, si ha che

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_3^c \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_{\log 4}^{\log(c+1)} \frac{1}{t^2}\,dt = \int_{\log 4}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$$

che converge. Quindi, per il Criterio di Maclaurin la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{3(n+1)\log^2(n+1)}$ converge. Ne segue che per il Criterio del confronto asintotico la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(-\frac{n^6 \sin\frac{2}{n^2} - 2n^4}{(n+1)\log^2(n+1)}\right)$ converge ad un numero reale $T > 0$ e di conseguenza la serie data converge ad un numero reale $S = -T < 0$. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 6. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se F non è conservativo in Ω, allora Ω non è semplicemente connesso.

$\boxed{B}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{C}$ Se F non è irrotazionale in Ω, allora F non è conservativo in Ω.

$\boxed{D}$ Se F è irrotazionale in Ω, allora F è conservativo in Ω.

$\boxed{E}$ Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo in Ω.

SVOLGIMENTO

Per la Condizione necessaria per i campi vettoriali conservativi di classe C^1, se F è conservativo in Ω, allora F è irrotazionale in Ω. Ne segue che se F non è irrotazionale in Ω, allora F non è conservativo in Ω. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 7. Sia $R > 0$. Il flusso uscente del campo vettoriale $F(x, y, z) = \dfrac{4}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$ dal bordo di

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$ vale

$\boxed{A}$ 8π. $\boxed{B}$ 24π. $\boxed{C}$ 32π. $\boxed{D}$ 0. $\boxed{E}$ 16π.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\operatorname{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e quindi $\Omega \not\subseteq \operatorname{dom}(F)$ mentre $\partial\Omega \subseteq \operatorname{dom}(F)$.

Il bordo di Ω è la superficie sferica di centro l'origine e raggio R nello spazio $\mathbb{R}^3$. Una parametrizzazione di $\partial\Omega$ è $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definta da

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \big(R \sin\vartheta \cos\varphi, \ R \sin\vartheta \sin\varphi, \ R \cos\vartheta\big).$$

Quindi, posto $K = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) \, d\vartheta \, d\varphi,$$

dove N è un vettore normale a $\partial\Omega$ uscente da Ω. Un vettore normale a $\partial\Omega$ è

$$N_\sigma(\vartheta, \varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta, \varphi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta, \varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & -R\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \big(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi, \ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi, \ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\big).$$

Osserviamo che questo vettore è uscente da Ω. Infatti, scelto ad esempio $(\vartheta_0, \varphi_0) = (\pi/2, \pi/2)$, si ha che

$$\sigma(\vartheta_0, \varphi_0) = \sigma(\pi/2, \pi/2) = (0, R, 0), \qquad N_\sigma(\vartheta_0, \varphi_0) = N_\sigma(\pi/2, \pi/2) = (0, R^2, 0).$$

Disegnando la sfera Ω e applicando il vettore $N_\sigma(\vartheta_0, \varphi_0)$ nel punto $\sigma(\vartheta_0, \varphi_0)$ si osserva che questo vettore punta verso l'esterno di Ω. Quindi prendiamo $N(\vartheta, \varphi) = N_\sigma(\vartheta, \varphi)$.

Si ha che

$$F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) = F\big(R \sin\vartheta \cos\varphi, \ R \sin\vartheta \sin\varphi, \ R \cos\vartheta\big) \cdot \big(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi, \ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi, \ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\big) =$$

$$= \frac{4}{R^3}\big(R \sin\vartheta \cos\varphi, \ R \sin\vartheta \sin\varphi, \ R \cos\vartheta\big) \cdot \big(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi, \ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi, \ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\big) =$$

$$= 4 \sin\vartheta.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) \, d\vartheta \, d\varphi = \int_K 4 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi =$$

essendo K un rettangolo con lati paralleli agli assi ϑ e φ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ϑ e una di φ, si ottiene

$$= 8\pi \int_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta = 16\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 8. La derivata della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^2\,(y-1)}{x^2+(y-1)^2} + 5x + 9y & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ 9 & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$ nel punto $(0,1)$ rispetto al vettore $v = (-1,1)$

$\boxed{A}$ vale 3.

$\boxed{B}$ vale 9.

$\boxed{C}$ vale 0.

$\boxed{D}$ vale 7.

$\boxed{E}$ non esiste.

SVOLGIMENTO

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(0,1)$ rispetto al vettore $v = (-1,1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,1)+tv\Big) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,1)+t(-1,1)\Big) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(-t,1+t) - f(0,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{7t}{t} = 7.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Versione V3

Quiz 1. Siano (a_n) una successione reale e $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se non esiste $\lim_n a_n$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è indeterminata.

$\boxed{B}$ Se $\lim_n S_n = +\infty$, allora $\lim_n a_n \neq 0$.

$\boxed{C}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{D}$ Se la successione (S_n) è limitata, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{E}$ Se $\lim_n a_n = L < 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$. Infatti, se $\lim_n a_n = L < 0$, allora per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge. Inoltre, per la definizione di limite, preso $\varepsilon = -L/2$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha che $|a_n - L| < \varepsilon = -L/2$, ovvero $L/2 < a_n - L < -L/2$, da cui segue che $a_n < L - L/2 = L/2 < 0$. Quindi, eventuamente a parte un numero finito di valori di a_n, risulta che $a_n < 0$. Ne segue che la serie di a_n è a termini negativi, e poiché non vale la condizione necessaria, risulta che questa serie diverge negativamente, e quindi diverge.

Le altre affermazioni sono errate. Infatti, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ ha limite zero ma la sua serie (serie armonica) diverge positivamente, e quindi $\boxed{\text{B}}$ e $\boxed{\text{C}}$ sono errate. Inoltre, la successione $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ non ha limite ma la sua serie diverge, e quindi $\boxed{\text{A}}$ è errata.

Infine, la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ è limitata (infatti $S_n = 1$ per n pari, $S_n = 0$ per n dispari) ma la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ è indeterminata, e quindi $\boxed{\text{D}}$ è errata.

Quiz 2. Sia $R > 0$. Il flusso uscente del campo vettoriale $F(x, y, z) = \frac{6}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$ dal bordo di

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ vale

$\boxed{A}$ 36π. $\boxed{B}$ 0. $\boxed{C}$ 24π. $\boxed{D}$ 48π. $\boxed{E}$ 12π.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\mathrm{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e quindi $\Omega \not\subseteq \mathrm{dom}\,(F)$ mentre $\partial\Omega \subseteq \mathrm{dom}\,(F)$.

Il bordo di Ω è la superficie sferica di centro l'origine e raggio R nello spazio $\mathbb{R}^3$. Una parametrizzazione di $\partial\Omega$ è $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definta da

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \big(R \sin\vartheta \cos\varphi, \ R \sin\vartheta \sin\varphi, \ R \cos\vartheta\big).$$

Quindi, posto $K = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) \, d\vartheta \, d\varphi,$$

dove N è un vettore normale a $\partial\Omega$ uscente da Ω. Un vettore normale a $\partial\Omega$ è

$$N_\sigma(\vartheta, \varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta, \varphi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta, \varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & -R\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \big(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi, \ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi, \ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\big).$$

Osserviamo che questo vettore è uscente da Ω. Infatti, scelto ad esempio $(\vartheta_0, \varphi_0) = (\pi/2, \pi/2)$, si ha che

$$\sigma(\vartheta_0, \varphi_0) = \sigma(\pi/2, \pi/2) = (0, R, 0), \qquad N_\sigma(\vartheta_0, \varphi_0) = N_\sigma(\pi/2, \pi/2) = (0, R^2, 0).$$

Disegnando la sfera Ω e applicando il vettore $N_\sigma(\vartheta_0, \varphi_0)$ nel punto $\sigma(\vartheta_0, \varphi_0)$ si osserva che questo vettore punta verso l'esterno di Ω. Quindi prendiamo $N(\vartheta, \varphi) = N_\sigma(\vartheta, \varphi)$.

Si ha che

$$F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi) = F\big(R \sin\vartheta \cos\varphi,\ R \sin\vartheta \sin\varphi,\ R\cos\vartheta\big) \cdot \big(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi,\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi,\ R^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\big) =$$

$$= \frac{6}{R^3}\big(R \sin\vartheta \cos\varphi,\ R \sin\vartheta \sin\varphi,\ R\cos\vartheta\big) \cdot \big(R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi,\ R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi,\ R^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\big) =$$

$$= 6\sin\vartheta.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta, \varphi)) \cdot N(\vartheta, \varphi)\, d\vartheta\, d\varphi = \int_K 6 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

essendo K un rettangolo con lati paralleli agli assi ϑ e φ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ϑ e una di φ, si ottiene

$$= 12\pi \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta = 24\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 3. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{B}$ Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo in Ω.

$\boxed{C}$ Se F è conservativo in Ω, allora F è irrotazionale in Ω.

$\boxed{D}$ Se F è irrotazionale in Ω, allora F è conservativo in Ω.

$\boxed{E}$ Se F non è conservativo in Ω, allora Ω non è semplicemente connesso.

SVOLGIMENTO

Per la Condizione necessaria per i campi conservativi di classe C^1, se F è conservativo in Ω, allora F è irrotazionale in Ω. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 4. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^3 \sin\frac{3}{n} - 3n^2}{(n-1)\log(n-1)}$

$\boxed{A}$ diverge negativamente.

$\boxed{B}$ converge ad un numero reale $S > 0$.

$\boxed{C}$ converge a 0.

$\boxed{D}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ converge ad un numero reale $S < 0$.

SVOLGIMENTO

Utilizzando lo sviluppo di Maclaurin della funzione $\sin x$ si ha che

$$n^3 \sin\frac{3}{n} - 3n^2 = n^3\left[\frac{3}{n} - \frac{9}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - 3n^2 = 3n^2 - \frac{9}{2} + o(1) - 3n^2 = -\frac{9}{2} + o(1), \qquad n \to +\infty.$$

Quindi

$$\frac{n^3 \sin\frac{3}{n} - 3n^2}{(n-1)\log(n-1)} \sim -\frac{9}{2(n-1)\log(n-1)}, \qquad n \to +\infty.$$

Quindi la serie data è a termini negativi.

Consideriamo la serie dei termini opposti $\sum_{n=4}^{\infty}\left(-\frac{n^3\sin\frac{3}{n}-3n^2}{(n-1)\log(n-1)}\right)$. Si ha che

$$-\frac{n^3\sin\frac{3}{n}-3n^2}{(n-1)\log(n-1)}\sim\frac{9}{2(n-1)\log(n-1)},\qquad n\to+\infty.$$

Per il Criterio di Maclaurin la serie $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\log(n-1)}$ diverge positivamente. Per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=4}^{\infty}\left(-\frac{n^3\sin\frac{3}{n}-3n^2}{(n-1)\log(n-1)}\right)$ diverge positivamente e quindi la serie data diverge negativamente.

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 5. Sia $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{1}{2}y-1\le x\le 0,\ \frac{1}{2}x-1\le y\le 0\right\}$. L'integrale $\int_\Omega 6xy\,dx\,dy$ vale

$\boxed{A}$ 17.

$\boxed{B}$ 10.

$\boxed{C}$ 9.

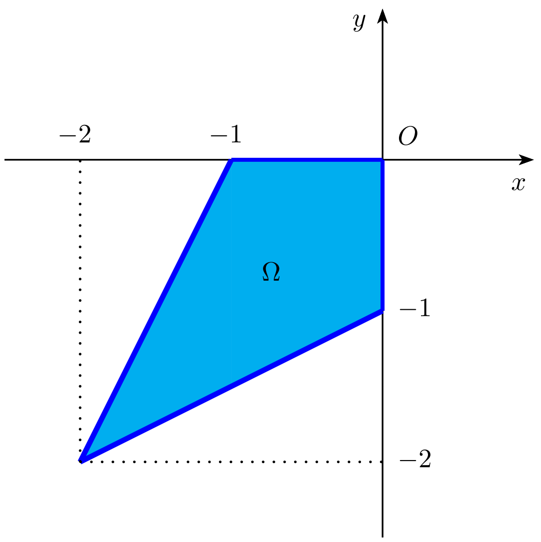
$\boxed{D}$ 20.

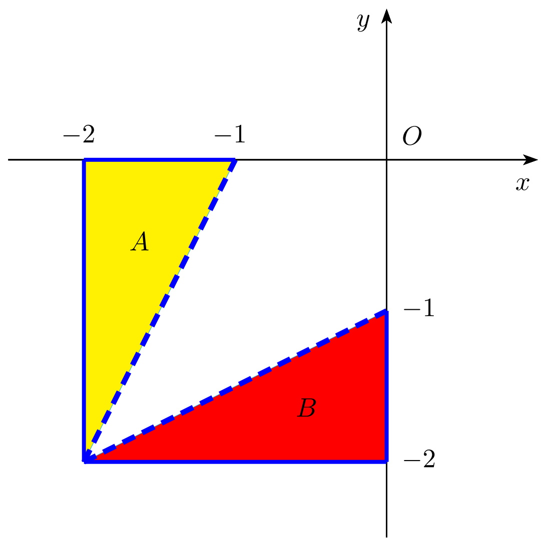
$\boxed{E}$ 8.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\Omega=Q\setminus(A\cup B)$, dove $Q=[-2,0]^2$ e

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -2\le x\le -1,\ 2(x+1)<y\le 0\right\},\qquad B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -2\le y\le -1,\ 2(y+1)<x\le 0\right\}.$$





Quindi

$$\int_\Omega 6xy\,dx\,dy=\int_Q 6xy\,dx\,dy-\left(\int_A 6xy\,dx\,dy+\int_B 6xy\,dx\,dy\right).$$

Si ha che

$$\int_Q 6xy\,dx\,dy=6\left(\int_{-2}^0 x\,dx\right)\left(\int_{-2}^0 y\,dy\right)=6\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^0\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-2}^0=24,$$

ed essendo A un insieme y-semplice

$$\int_A 6xy\,dx\,dy=\int_{-2}^{-1}\left(\int_{2(x+1)}^0 6xy\,dy\right)dx=6\int_{-2}^{-1}x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{2(x+1)}^0 dx=-12\int_{-2}^{-1}x(x+1)^2\,dx=$$

$$=-12\int_{-2}^{-1}\left(x^3+2x^2+x\right)dx=-12\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}=7,$$

$$\int_B 6xy\,dx\,dy=\int_{-2}^{-1}\left(\int_{2(y+1)}^0 6xy\,dx\right)dy=\int_A 6xy\,dx\,dy=7.$$

Ne segue che

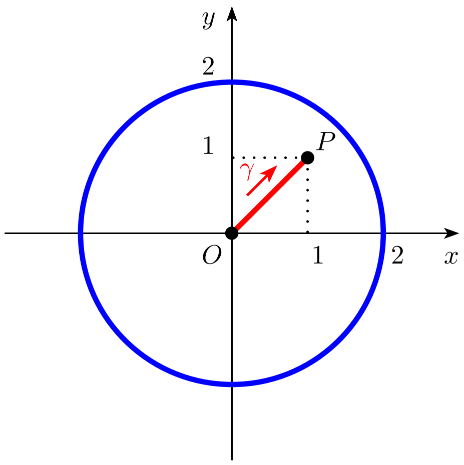
$$\int_\Omega 6xy\,dx\,dy = \int_Q 6xy\,dx\,dy - \left(\int_A 6xy\,dx\,dy + \int_B 6xy\,dx\,dy\right) = 24 - 14 = 10.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 6. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \left(3 - xy^2,\ y\left|4 - x^2 - y^2\right|\right)$ lungo il segmento di estremi $O(0,0)$ e $P(1,1)$ percorso da O a P vale

$\boxed{A}$ $\frac{17}{4}$. $\boxed{B}$ $-\frac{17}{4}$. $\boxed{C}$ $-\frac{1}{4}$. $\boxed{D}$ 0. $\boxed{E}$ $\frac{1}{4}$.

SVOLGIMENTO



Si ha che

$$F(x,y) = \left(3 - xy^2,\ y\left|4 - x^2 - y^2\right|\right) = \begin{cases} F_1(x,y) = \left(3 - xy^2,\ y\left(4 - x^2 - y^2\right)\right) & \text{se } x^2 + y^2 < 4 \\ F_2(x,y) = \left(3 - xy^2,\ y\left(x^2 + y^2 - 4\right)\right) & \text{se } x^2 + y^2 \ge 4. \end{cases}$$

Il segmento OP è tutto contenuto nella palla aperta $B_2(0,0)$ di centro $O(0,0)$ e raggio 2.

In questa palla il campo vettoriale F è conservativo. Infatti, il campo F sulla palla è di classe C^1, la palla è semplicemente connessa e, posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\forall (x,y) \in B_2(0,0): \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -2xy = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi per la Condizione sufficiente per i campi vettoriali di classe C^1 il campo F è conservativo sulla palla.

Per le proprietà dei campi conservativi si ha che, se f è un potenziale di F sulla palla, allora l'integrale di linea di F lungo il segmento di estremi $O(0,0)$ e $P(1,1)$ percorso da O a P è uguale a

$$f(1,1) - f(0,0).$$

Si osserva facilmente che un potenziale di F su $B_2(0,0)$ è

$$f(x,y) = 3x - \frac{1}{2}x^2y^2 + 2y^2 - \frac{1}{4}y^4.$$

Quindi l'integrale vale

$$f(1,1) - f(0,0) = \frac{17}{4}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

<u>Metodo alternativo</u>. La curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t,t)$ è una parametrizzazione del segmento OP da O a P. Ne segue che, essendo $F = F_1$ sul sostegno di γ,

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (1,1)$ per ogni $t \in [0,1]$,

$$\forall t \in [0,1]: \qquad F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \left(3 - t^3,\ t\left(4 - 2t^2\right)\right) \cdot (1,1) = 3 - 3t^3 + 4t,$$

si ottiene

$$= \int_0^1 \left(3 - 3t^3 + 4t\right)\, dt = \left[3t - \frac{3}{4}t^4 + 2t^2\right]_0^1 = \frac{17}{4}.$$

Quiz 7. Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = (x+y)^8,\ -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le -x\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{z - 8xy}{\sqrt{128(x+y)^{14}+1}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ $\frac{91}{45}$. $\boxed{B}$ $\frac{91}{90}$. $\boxed{C}$ $\frac{2}{3}$. $\boxed{D}$ $\frac{90}{91}$. $\boxed{E}$ $\frac{45}{91}$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $z = (x+y)^8$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le -x\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,(x+y)^8\right)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{z - 8xy}{\sqrt{7128(x+y)^{14}+1}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{z - 8xy}{\sqrt{128(x+y)^{14}+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\, \|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-8(x+y)^7, -8(x+y)^7, 1\right).$$

Quindi $\|N(x,y)\| = \sqrt{128(x+y)^{14}+1}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{z - 8xy}{\sqrt{128(x+y)^{14}+1}}\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\, \|N(x,y)\|\, dx\, dy = \int_K \left[(x+y)^8 - 8xy\right]\, dx\, dy =$$

essendo K un insieme y-semplice si ottiene

$$= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{-x} \left[(x+y)^8 - 8xy\right]\, dy\right) dx = \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{9}(x+y)^9 - 4xy^2\right]_0^{-x} dx = \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{9}x^9 - 4x^3\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{90}x^8 - x^4\right]_{-1}^0 = \frac{91}{90}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 8. La derivata della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4(x+1)\,y^2}{(x+1)^2+y^2} - 7x + 3y & \text{se } (x,y) \ne (-1,0) \\ 7 & \text{se } (x,y) = (-1,0) \end{cases}$ nel punto $(-1,0)$ rispetto al vettore $v = (-1,1)$

$\boxed{A}$ non esiste.

$\boxed{B}$ vale 2.

$\boxed{C}$ vale 7.

$\boxed{D}$ vale 0.

$\boxed{E}$ vale 8.

SVOLGIMENTO

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(-1,0)$ rispetto al vettore $v = (-1,1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((-1,0) + tv\Big) - f(-1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((-1,0) + t(-1,1)\Big) - f(-1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(-1-t,t) - f(-1,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{8t}{t} = 8.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Versione V4

Quiz 1. Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; \frac{1}{2}y - 1 \le x \le 0, \;\; \frac{1}{2}x - 1 \le y \le 0\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega 12xy\,dx\,dy$ vale

$\boxed{A}$ 18.

$\boxed{B}$ 17.

$\boxed{C}$ 16.

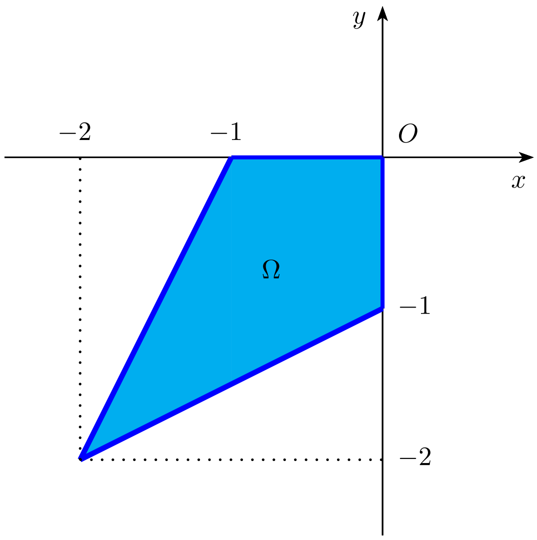
$\boxed{D}$ 20.

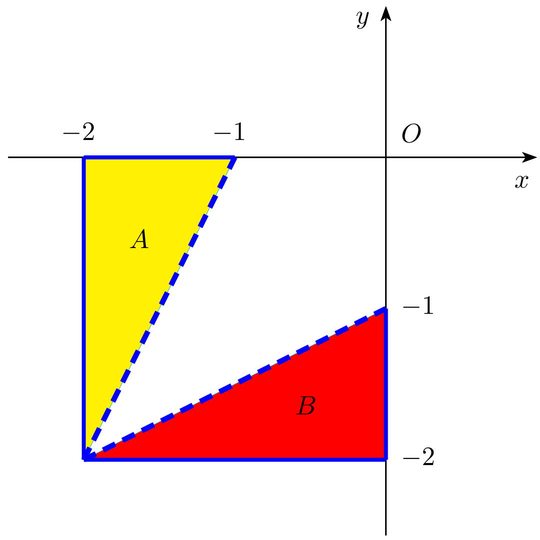
$\boxed{E}$ 40.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\Omega = Q \setminus (A \cup B)$, dove $Q = [-2,0]^2$ e

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; -2 \le x \le -1, \;\; 2(x+1) < y \le 0\right\}, \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; -2 \le y \le -1, \;\; 2(y+1) < x \le 0\right\}.$$





Quindi

$$\int_\Omega 12xy\,dx\,dy = \int_Q 12xy\,dx\,dy - \left(\int_A 12xy\,dx\,dy + \int_B 12xy\,dx\,dy\right).$$

Si ha che

$$\int_Q 12xy\,dx\,dy = 12\left(\int_{-2}^0 x\,dx\right)\left(\int_{-2}^0 y\,dy\right) = 12\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^0 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-2}^0 = 48,$$

ed essendo A un insieme y-semplice

$$\int_A 12xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{-1}\left(\int_{2(x+1)}^0 12xy\,dy\right)dx = 12\int_{-2}^{-1} x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{2(x+1)}^0 dx = -24\int_{-2}^{-1} x(x+1)^2\,dx =$$

$$= -24\int_{-2}^{-1}\left(x^3 + 2x^2 + x\right)dx = -24\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} = 14,$$

$$\int_B 12xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{-1}\left(\int_{2(y+1)}^0 12xy\,dx\right)dy = \int_A 12xy\,dx\,dy = 14.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega 9xy\,dx\,dy = \int_Q 9xy\,dx\,dy - \left(\int_A 9xy\,dx\,dy + \int_B 9xy\,dx\,dy\right) = 48 - 28 = 20.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 2. Siano (a_n) una successione reale e $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$.

$\boxed{B}$ Se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge, allora $\lim_n a_n \neq 0$.

$\boxed{C}$ Se non esiste $\lim_n a_n$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è indeterminata.

$\boxed{D}$ Se la successione (S_n) è illimitata, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{E}$ Se $\lim_n a_n = L < -1$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$. Infatti, se $\lim_n a_n = L < -1$, allora per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge. Inoltre, per la definizione di limite, preso $\varepsilon = -L-1$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha che $|a_n - L| < \varepsilon = -L-1$, ovvero $1 + L < a_n - L < -L - 1$, da cui segue che $a_n < -L - 1 + L = -1 < 0$. Quindi, eventuamente a parte un numero finito di valori di a_n, risulta che $a_n < 0$. Ne segue che la serie di a_n è a termini negativi, e poiché non vale la condizione necessaria, risulta che questa serie diverge negativamente, e quindi diverge.

Le altre affermazioni sono errate. Infatti, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ ha limite zero ma la sua serie (serie armonica) diverge positivamente, e quindi $\boxed{\text{A}}$ e $\boxed{\text{B}}$ sono errate. Inoltre, la successione $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ non ha limite ma la sua serie diverge, e quindi $\boxed{\text{C}}$ è errata.

Infine, la successione $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-2)^k$ è illimitata (infatti $S_n = \frac{1+2^{n+1}}{3}$ per n pari, $S_n = \frac{1-2^{n+1}}{3}$ per n dispari) ma la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n$ è indeterminata perché la successione (S_n) non ha limite, e quindi $\boxed{\text{D}}$ è errata.

Quiz 3. Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = (x+y)^9, \ -1 \leq y \leq 0, \ 0 \leq x \leq -y\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{z + 8xy}{\sqrt{162(x+y)^{16}+1}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ $-\dfrac{110}{111}$. $\boxed{B}$ $-\dfrac{2}{3}$. $\boxed{C}$ $-\dfrac{111}{110}$. $\boxed{D}$ $-\dfrac{111}{55}$. $\boxed{E}$ $-\dfrac{55}{111}$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $z = (x+y)^9$, dove

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq y \leq 0, \ 0 \leq x \leq -y\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \big(x,y,(x+y)^9\big)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{z+8xy}{\sqrt{162(x+y)^{16}+1}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{z+8xy}{\sqrt{162(x+y)^{16}+1}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\, \|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-9(x+y)^8, -9(x+y)^8, 1\right).$$

Quindi $\|N(x,y)\| = \sqrt{162(x+y)^{16}+1}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{z+8xy}{\sqrt{162(x+y)^{16}+1}}\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\, \|N(x,y)\|\, dx\, dy = \int_K \left[(x+y)^9 + 8xy\right]\, dx\, dy =$$

essendo K un insieme x-semplice si ottiene

$$= \int_{-1}^{0} \left(\int_0^{-y} \left[(x+y)^9 + 8xy\right]\, dx \right) dy = \int_{-1}^{0} \left[\frac{1}{10}(x+y)^{10} + 4x^2 y\right]_0^{-y} dy = \int_{-1}^{0} \left(4y^3 - \frac{1}{10}y^{10}\right) dy =$$

$$= \left[y^4 - \frac{1}{110}y^{11}\right]_{-1}^{0} = -\frac{111}{110}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 4. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Se F non è irrotazionale in Ω, allora F non è conservativo in Ω.

$\boxed{B}$ Se F è irrotazionale in Ω, allora F è conservativo in Ω.

$\boxed{C}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{D}$ Se F non è conservativo in Ω, allora Ω non è semplicemente connesso.

$\boxed{E}$ Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo in Ω.

SVOLGIMENTO

Per la Condizione necessaria per i campi vettoriali conservativi di classe C^1, se F è conservativo in Ω, allora F è irrotazionale in Ω. Ne segue che se F non è irrotazionale in Ω, allora F non è conservativo in Ω. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = \big(2 - xy^2,\ y\,|4 - x^2 - y^2|\big)$ lungo il segmento di estremi $O(0,0)$ e $P(1,1)$ percorso da O a P vale

$\boxed{A}$ $\frac{7}{4}$.

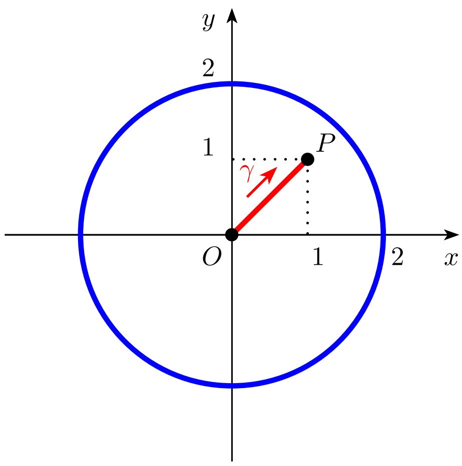
$\boxed{B}$ 0.

$\boxed{C}$ $-\frac{13}{4}$.

$\boxed{D}$ $-\frac{7}{4}$.

$\boxed{E}$ $\frac{13}{4}$.

SVOLGIMENTO



Si ha che

$$F(x,y) = \big(2 - xy^2,\ y\,|4 - x^2 - y^2|\big) = \begin{cases} F_1(x,y) = \Big(2 - xy^2,\ y\left(4 - x^2 - y^2\right)\Big) & \text{se } x^2 + y^2 < 4 \\ F_2(x,y) = \Big(2 - xy^2,\ y\left(x^2 + y^2 - 4\right)\Big) & \text{se } x^2 + y^2 \geq 4. \end{cases}$$

Il segmento OP è tutto contenuto nella palla aperta $B_2(0,0)$ di centro $O(0,0)$ e raggio 2.

In questa palla il campo vettoriale F è conservativo. Infatti, il campo F sulla palla è di classe C^1, la palla è semplicemente connessa e, posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\forall (x,y) \in B_2(0,0): \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -2xy = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi per la Condizione sufficiente per i campi vettoriali di classe C^1 il campo F è conservativo sulla palla.

Per le proprietà dei campi conservativi si ha che, se f è un potenziale di F sulla palla, allora l'integrale di linea di F lungo il segmento di estremi $O(0,0)$ e $P(1,1)$ percorso da O a P è uguale a

$$f(1,1) - f(0,0).$$

Si osserva facilmente che un potenziale di F su $B_2(0,0)$ è

$$f(x,y) = 2x - \frac{1}{2}x^2y^2 + 2y^2 - \frac{1}{4}y^4.$$

Quindi l'integrale vale

$$f(1,1) - f(0,0) = \frac{13}{4}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

<u>Metodo alternativo</u>. La curva parametrica $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t,t)$ è una parametrizzazione del segmento OP da O a P. Ne segue che, essendo $F = F_1$ sul sostegno di γ,

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (1,1)$ per ogni $t \in [0,1]$,

$$\forall t \in [0,1]: \qquad F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \left(2 - t^3,\ t\left(4 - 2t^2\right)\right) \cdot (1,1) = 2 - 3t^3 + 4t,$$

si ottiene

$$= \int_0^1 \left(2 - 3t^3 + 4t\right) dt = \left[2t - \frac{3}{4}t^4 + 2t^2\right]_0^1 = \frac{13}{4}.$$

Quiz 6. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{6n^4 - n^6 \sin \frac{6}{n^2}}{(n+1)\log^2(n+1)}$

$\boxed{A}$ converge ad un numero reale $S < 0$.

$\boxed{B}$ diverge negativamente.

$\boxed{C}$ diverge positivamente.

$\boxed{D}$ converge a 0.

$\boxed{E}$ converge ad un numero reale $S > 0$.

SVOLGIMENTO

Utilizzando lo sviluppo di Maclaurin della funzione $\sin x$ si ha che

$$6n^4 - n^6 \sin \frac{6}{n^2} = 6n^4 - n^6\left[\frac{6}{n^2} - \frac{36}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right] = 6n^4 - 6n^4 + 36 + o(1) = 36 + o(1), \qquad n \to +\infty.$$

Quindi

$$\frac{6n^4 - n^6 \sin \frac{6}{n^2}}{(n+1)\log^2(n+1)} \sim \frac{36}{(n+1)\log^2(n+1)}, \qquad n \to +\infty.$$

Quindi la serie data è a termini positivi.

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}$ definita su $[3,+\infty)$. Questa funzione è positiva e decrescente. Valutiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} f(x)\, dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\, dx.$$

Posto $t = \log(x+1)$, da cui $dt = \frac{1}{x+1}\, dx$, si ha che

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_3^c \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_{\log 4}^{\log(c+1)} \frac{1}{t^2}\, dt = \int_{\log 4}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$$

che converge. Quindi, per il Criterio di Maclaurin la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{36}{(n+1)\log^2(n+1)}$ converge e di conseguenza per il Criterio del Confroto asintotico la serie data converge ad un numero reale $S > 0$. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 7. La derivata della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{6x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} + 5x - 9y & \text{se } (x,y) \neq (0,-1) \\ 9 & \text{se } (x,y) = (0,-1) \end{cases}$ nel punto $(0,-1)$ rispetto al vettore $v = (1,-1)$

$\boxed{A}$ vale 11.

$\boxed{B}$ vale 0.

$\boxed{C}$ vale 3.

$\boxed{D}$ vale 9.

$\boxed{E}$ non esiste.

SVOLGIMENTO

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(0,-1)$ rispetto al vettore $v = (1,-1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,-1) = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,-1)+tv\Big) - f(0,-1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,-1)+t(1,-1)\Big) - f(0,-1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,-1-t) - f(0,-1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{11t}{t} = 11.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 8. Sia $R > 0$. Il flusso uscente del campo vettoriale $F(x,y,z) = \frac{8}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$ dal bordo di

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ vale

$\boxed{A}$ 0. $\boxed{B}$ 16π. $\boxed{C}$ 64π. $\boxed{D}$ 32π. $\boxed{E}$ 24π.

SVOLGIMENTO

Si ha che $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ e quindi $\Omega \not\subseteq \text{dom}(F)$ mentre $\partial\Omega \subseteq \text{dom}(F)$.

Il bordo di Ω è la superficie sferica di centro l'origine e raggio R nello spazio $\mathbb{R}^3$. Una parametrizzazione di $\partial\Omega$ è $\sigma : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definta da

$$\sigma(\vartheta,\varphi) = \big(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta\big).$$

Quindi, posto $K = [0,\pi]\times[0,2\pi]$, si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta,\varphi)) \cdot N(\vartheta,\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi,$$

dove N è un vettore normale a $\partial\Omega$ uscente da Ω. Un vettore normale a $\partial\Omega$ è

$$N_\sigma(\vartheta,\varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\vartheta,\varphi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & -R\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \big(R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi,\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi,\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\big).$$

Osserviamo che questo vettore è uscente da Ω. Infatti, scelto ad esempio $(\vartheta_0,\varphi_0) = (\pi/2,\pi/2)$, si ha che

$$\sigma(\vartheta_0,\varphi_0) = \sigma(\pi/2,\pi/2) = (0,R,0), \qquad N_\sigma(\vartheta_0,\varphi_0) = N_\sigma(\pi/2,\pi/2) = (0,R^2,0).$$

Disegnando la sfera Ω e applicando il vettore $N_\sigma(\vartheta_0,\varphi_0)$ nel punto $\sigma(\vartheta_0,\varphi_0)$ si osserva che questo vettore punta verso l'esterno di Ω. Quindi prendiamo $N(\vartheta,\varphi) = N_\sigma(\vartheta,\varphi)$.

Si ha che

$$F(\sigma(\vartheta,\varphi)) \cdot N(\vartheta,\varphi) = F\big(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta\big) \cdot \big(R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi,\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi,\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\big) =$$

$$= \frac{8}{R^3}\big(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta\big)\cdot\big(R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi,\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi,\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\big) =$$

$$= 8\sin\vartheta.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(\vartheta,\varphi))\cdot N(\vartheta,\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi = \int_K 8\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

essendo K un rettangolo con lati paralleli agli assi ϑ e φ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ϑ e una di φ, si ottiene

$$= 16\pi \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta = 32\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.