

ESAME ONLINE

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V1	L'	A	L	G	E	B	R	A

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}yz^2 + \log(1 + 12x^6), \frac{1}{2}xz^2 - e^{y^4+y^8}, 2xyz + \sqrt{1+z^4} \right)$$

lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2 + y^2)^2, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{3}{2}yz^2 + \log(1 + 12x^6) & \frac{1}{2}xz^2 - e^{y^4+y^8} & 2xyz + \sqrt{1+z^4} \end{vmatrix} = (xz, yz, -z^2).$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, (x^2 + y^2)^2)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-4x(x^2 + y^2), -4y(x^2 + y^2), 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(-4x(x^2 + y^2), -4y(x^2 + y^2), 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F(x, y, (x^2 + y^2)^2) \cdot \left(-4x(x^2 + y^2), -4y(x^2 + y^2), 1 \right) = \\ &= \left(x(x^2 + y^2)^2, y(x^2 + y^2)^2, -(x^2 + y^2)^4 \right) \cdot \left(-4x(x^2 + y^2), -4y(x^2 + y^2), 1 \right) = -5(x^2 + y^2)^4. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = -5 \int_K (x^2 + y^2)^4 \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= -5 \int_{K'=[0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \rho^9 \, d\rho \, d\vartheta = -\frac{5}{2}\pi \int_0^1 \rho^9 \, d\rho = -\frac{5}{2}\pi \left[\frac{1}{10}\rho^{10} \right]_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V2	E'	L'	U	N	I	C	A	C

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\log(1 + 6x^8) - \frac{3}{2}yz^2, e^{y^4 - y^8} - \frac{1}{2}xz^2, \sqrt{1 + z^8} - 2xyz \right)$$

lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -(x^2 + y^2)^2, x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0, y \leq 0 \right\}$$

orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \log(1 + 6x^8) - \frac{3}{2}yz^2 & e^{y^4 - y^8} - \frac{1}{2}xz^2 & \sqrt{1 + z^8} - 2xyz \end{vmatrix} = (-xz, -yz, z^2).$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = -(x^2 + y^2)^2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0, y \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, -(x^2 + y^2)^2)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (4x(x^2 + y^2), 4y(x^2 + y^2), 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = (4x(x^2 + y^2), 4y(x^2 + y^2), 1).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \text{rot} F(x, y, -(x^2 + y^2)^2) \cdot (4x(x^2 + y^2), 4y(x^2 + y^2), 1) = \\ &= (x(x^2 + y^2)^2, y(x^2 + y^2)^2, (x^2 + y^2)^4) \cdot (4x(x^2 + y^2), 4y(x^2 + y^2), 1) = 5(x^2 + y^2)^4. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = 5 \int_K (x^2 + y^2)^4 \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= 5 \int_{K'=[0,1] \times [\pi, \frac{3}{2}\pi]} \rho^9 \, d\rho \, d\vartheta = \frac{5}{2}\pi \int_0^1 \rho^9 \, d\rho = \frac{5}{2}\pi \left[\frac{1}{10}\rho^{10} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V3	O	S	A	C	H	E	C	O

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(3yz^2 - \log(1 + 4x^8), \quad xz^2 - e^{y^8 - y^4}, \quad 4xyz - \sqrt{1 + z^6} \right)$$

lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2 + y^2)^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \leq 0 \right\}$$

orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3yz^2 - \log(1 + 4x^8) & xz^2 - e^{y^8 - y^4} & 4xyz - \sqrt{1 + z^6} \end{vmatrix} = (2xz, 2yz, -2z^2).$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, (x^2 + y^2)^2)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-4x(x^2 + y^2), -4y(x^2 + y^2), 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(-4x(x^2 + y^2), -4y(x^2 + y^2), 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F(x, y, (x^2 + y^2)^2) \cdot \left(-4x(x^2 + y^2), -4y(x^2 + y^2), 1 \right) = \\ &= \left(2x(x^2 + y^2)^2, 2y(x^2 + y^2)^2, -2(x^2 + y^2)^4 \right) \cdot \left(-4x(x^2 + y^2), -4y(x^2 + y^2), 1 \right) = -10(x^2 + y^2)^4. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = -10 \int_K (x^2 + y^2)^4 \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= -10 \int_{K'=[0,1] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]} \rho^9 \, d\rho \, d\vartheta = -5\pi \int_0^1 \rho^9 \, d\rho = -5\pi \left[\frac{1}{10} \rho^{10} \right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}.$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V4	N	T	A	G	N	A	R	I

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\log(1 + 8x^4) - 3yz^2, e^{y^4+y^8} - xz^2, \sqrt{1+z^2} - 4xyz \right)$$

lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -(x^2 + y^2)^2, x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0, y \geq 0 \right\}$$

orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Stokes (o del rotore) si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \log(1 + 8x^4) - 3yz^2 & e^{y^4+y^8} - xz^2 & \sqrt{1+z^2} - 4xyz \end{vmatrix} = (-2xz, -2yz, 2z^2).$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = -(x^2 + y^2)^2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0, y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, -(x^2 + y^2)^2)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(4x(x^2 + y^2), 4y(x^2 + y^2), 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(4x(x^2 + y^2), 4y(x^2 + y^2), 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F(x, y, -(x^2 + y^2)^2) \cdot \left(4x(x^2 + y^2), 4y(x^2 + y^2), 1 \right) = \\ &= \left(2x(x^2 + y^2)^2, 2y(x^2 + y^2)^2, 2(x^2 + y^2)^4 \right) \cdot \left(4x(x^2 + y^2), 4y(x^2 + y^2), 1 \right) = 10(x^2 + y^2)^4. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = 10 \int_K (x^2 + y^2)^4 \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= 10 \int_{K'=[0,1] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]} \rho^9 \, d\rho \, d\vartheta = 5\pi \int_0^1 \rho^9 \, d\rho = 5\pi \left[\frac{1}{10} \rho^{10} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$