Svolgimento dei quiz dell'esame di Analisi Matematica II del 20 febbraio 2021 ore 13

ESAME ONLINE

Versione: V1

Quiz 1. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} \right]$

$\boxed{G}$ converge al numero reale S tale che $\frac{1}{2} < S < 1$.

$\boxed{A}$ converge al numero reale S tale che $\frac{1}{4} < S < \frac{1}{2}$.

$\boxed{L'}$ converge al numero reale S tale che $0 < S < \frac{1}{4}$.

$\boxed{E}$ converge a 0.

$\boxed{R}$ diverge positivamente.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} \right] = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n\, 2^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\, 2^{n+1}} \right].$$

Quindi la serie è telescopica. La somma parziale n-esima della serie è

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{(-1)^k}{k\, 2^k} - \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\, 2^{k+1}} \right] = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \dots + \frac{(-1)^n}{n\, 2^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\, 2^{n+1}} = \frac{1}{8} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\, 2^{n+1}}.$$

Ne segue che

$$\lim_n S_n = \lim_n \left[\frac{1}{8} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\, 2^{n+1}} \right] = \frac{1}{8}.$$

Quindi la serie converge a $S = \frac{1}{8}$. La risposta corretta è $\boxed{\text{L'}}$.

Quiz 2. L'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{2^n + 3} (x-1)^n$ è

$\boxed{R}$ $\mathbb{R}$.

$\boxed{L}$ un intervallo chiuso limitato.

$\boxed{G}$ un intervallo limitato contenente l'estremo di sinistra ma non quello di destra.

$\boxed{E}$ un intervallo limitato contenente l'estremo di destra ma non quello di sinistra.

$\boxed{A}$ un intervallo aperto limitato.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 1$. Posto $t = x - 1$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{2^n + 3} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{2^n + 3} t^n.$$

Posto $a_n = (-1)^n \frac{\arctan n}{2^n + 3}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{\arctan n}{2^n + 3}} = \frac{1}{2}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = 2$. Quindi la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{2^n + 3} t^n$ converge assolutamente, e quindi anche puntualmente, in $(-2, 2)$.

Per $t=-2$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan n}{2^n+3}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+3} \arctan n$$

che è a termini positivi. Poiché

$$\lim_n \frac{2^n}{2^n+3} \arctan n = \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

non vale la condizione necessaria per la convergenza di una serie e quindi la serie in $t=-2$ diverge positivamente.

Per $t=2$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan n}{2^n+3} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{2^n+3} \arctan n$$

che è a termini di segno alterno. Poiché

$$\lim_n (-1)^n \frac{2^n}{2^n+3} \arctan n \ \nexists,$$

non vale la condizione necessaria per la convergenza di una serie e quindi la serie in $t=2$ non converge.

Ne segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan n}{2^n+3} t^n$ converge puntualmente in $(-2,2)$. Essendo $t=x-1$, ovvero $x=t+1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan n}{2^n+3}(x-1)^n$ converge puntualmente in $(-1,3)$. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ \sqrt{3}\,z \geq 3\sqrt{x^2+y^2}\right\}$. L'integrale $\int_\Omega \frac{16z}{(x^2+y^2+z^2)^4}\,dx\,dy\,dz$ vale

$\boxed{A}$ $\frac{21}{8}\pi$.

$\boxed{L}$ $\frac{15}{16}\pi$.

$\boxed{G}$ $\frac{15}{8}\pi$.

$\boxed{E}$ $\frac{21}{16}\pi$.

$\boxed{R}$ $\frac{15}{4}\pi$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate polari nello spazio centrate nell'origine con la colatitudine misurata dall'asse z si ottiene

$$\int_\Omega \frac{16z}{(x^2+y^2+z^2)^4}\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \frac{16\cos\vartheta\sin\vartheta}{\rho^5}\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ è l'insieme Ω scritto in coordinate polari. Si ha che

$$(x,y,z)\in\Omega \iff \begin{cases} 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ \sqrt{3}\,z \geq 3\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ \sqrt{3}\rho\cos\vartheta \geq 3\rho\sin\vartheta \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = [1,2]\times\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\times[0,2\pi]$. Si ha che

$$\int_\Omega \frac{16z}{(x^2+y^2+z^2)^4}\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \frac{16\cos\vartheta\sin\vartheta}{\rho^5}\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi = 32\pi\left(\int_1^2 \frac{1}{\rho^5}\,d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\right) =$$

$$= 32\pi\left[-\frac{1}{4\rho^4}\right]_1^2\left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{15}{16}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{L}}$.

Quiz 4. Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z = 2\sqrt{2}\,x^2+7y+6,\ x \geq 0,\ 2\sqrt{2}\,x \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{z-2\sqrt{2}\,x^2-6}{(2+3x)\sqrt{32x^2+50}}\,d\sigma$ vale

$\boxed{A}$ 6.

$\boxed{B}$ 3.

$\boxed{L}$ $\frac{14}{3}$.

$\boxed{G}$ $\frac{7}{3}$.

$\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g: K\to\mathbb{R}$ definita da $g(x,y)=2\sqrt{2}\,x^2+7y+6$, dove

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\ge 0,\ 2\sqrt{2}\,x\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le\frac{2}{3},\ 2\sqrt{2}\,x\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$$

Quindi $\Sigma=\sigma(K)$, dove $\sigma: K\to\mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y)=(x,y,g(x,y))=\big(x,y,2\sqrt{2}\,x^2+7y+6\big)$.

Posto $f(x,y,z)=\dfrac{z-2\sqrt{2}\,x^2-6}{(2+3x)\sqrt{32x^2+50}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{z-2\sqrt{2}\,x^2-6}{(2+3x)\sqrt{32x^2+50}}\,d\sigma=\int_\Sigma f\,d\sigma=\int_K f(\sigma(x,y))\,\|N(x,y)\|\,dx\,dy,$$

dove $N(x,y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x,y)=\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)=\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),1\right)=\left(-4\sqrt{2}x,-7,1\right).$$

Quindi $\|N(x,y)\|=\sqrt{32x^2+50}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{z-2\sqrt{2}\,x^2-6}{(2+3x)\sqrt{32x^2+50}}\,d\sigma=\int_K f(\sigma(x,y))\,\|N(x,y)\|\,dx\,dy=\int_K\frac{7y}{2+3x}\,dx\,dy=$$

essendo K un insieme y-semplice si ottiene

$$=7\int_0^{2/3}\frac{1}{2+3x}\left(\int_{2\sqrt{2}\,x}^{\sqrt{4-x^2}}y\,dy\right)dx=\frac{7}{2}\int_0^{2/3}\frac{4-9x^2}{2+3x}\,dx=\frac{7}{2}\int_0^{2/3}(2-3x)\,dx=$$

$$=\frac{7}{2}\left[-\frac{1}{6}(2-3x)^2\right]_0^{2/3}=\frac{7}{3}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{G}}$.

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y,z)=\big(3z-6,\ 2y+1,\ 2-2x\big)$ lungo la curva parametrica $\gamma:[0,\log 3]\to\mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t)=\big(t^2+1,\ e^t,\ t^3+2\big)$ vale

$\boxed{R}$ 0.

$\boxed{B}$ 12.

$\boxed{L}$ 18.

$\boxed{A}$ 21.

$\boxed{E}$ 10.

SVOLGIMENTO

Per definizione l'integrale di linea di F lungo la curva γ è dato da

$$\int_\gamma F\cdot dP=\int_0^{\log 3}F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\Big(t^2+1,\ e^t,\ t^3+2\Big) \cdot \Big(2t,\ e^t,\ 3t^2\Big) = \Big(3t^3,\ 2e^t+1,\ -2t^2\Big) \cdot \Big(2t,\ e^t,\ 3t^2\Big) = 2e^{2t}+e^t,$$

si ottiene

$$= \int_0^{\log 3} \left(2e^{2t}+e^t\right)\, dt = \Big[e^{2t}+e^t\Big]_0^{\log 3} = 10.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 6. La derivata della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4(x-1)\,y^2}{(x-1)^2+y^2} + 7x + 3y & \text{se } (x,y) \neq (1,0) \\ 7 & \text{se } (x,y) = (1,0) \end{cases}$ nel punto $(1,0)$ rispetto al vettore $v = (1,-1)$

$\boxed{L}$ vale 0.

$\boxed{B}$ vale 6.

$\boxed{A}$ non esiste.

$\boxed{G}$ vale 7.

$\boxed{R}$ vale 2.

SVOLGIMENTO

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(1,0)$ rispetto al vettore $v = (1,-1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((1,0)+tv\Big) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((1,0)+t(1,-1)\Big) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t,-t) - f(1,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{6t}{t} = 6.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 7. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{E}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{L}$ Se F è irrotazionale in Ω, allora F è conservativo in Ω.

$\boxed{A}$ Se F non è conservativo in Ω, allora Ω non è semplicemente connesso.

$\boxed{G}$ Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo in Ω.

$\boxed{R}$ Se F è conservativo in Ω, allora F è irrotazionale in Ω.

SVOLGIMENTO

Per il Teorema noto come condizione necessaria per i campi conservativi di classe C^1, se F è conservativo in Ω, allora F è irrotazionale in Ω. La risposta corretta è $\boxed{\text{R}}$.

Quiz 8. Sia (a_n) la successione definita nel seguente modo: $\quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{3}{n!} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{2}{(n+1)!} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{G}$ Esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{L}$ Non esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{A}$ Esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{E}$ Non esiste $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{R}$ Non esistono $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e non si può concludere nulla sulla convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

SVOLGIMENTO

La serie è a termini positivi. Si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{3}{n!}} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sqrt[n]{\frac{2}{(n+1)!}} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi

$$n \text{ pari} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{2}{(n+1)!}} \leq \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3}{n!}},$$

$$n \text{ dispari} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{2}{(n+1)!}} = \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{3}{n!}}.$$

Ne segue che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[n]{\frac{2}{(n+1)!}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{3}{n!}}.$$

Poiché

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{2}{(n+1)!}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{3}{n!}} = 0,$$

per il Secondo teorema del confronto sui limiti anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 0$. Per il Criterio della radice la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Si osservi che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{2}{3(n+1)(n+2)} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{3}{2} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi non esiste $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Versione V2

Quiz 1. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{3(n+1)} \right]$

$\boxed{C}$ diverge positivamente.

$\boxed{U}$ converge al numero reale S tale che $\frac{1}{9} < S < \frac{1}{3}$.

$\boxed{N}$ converge al numero reale S tale che $\frac{1}{3} < S < 1$.

$\boxed{I}$ converge a 0.

$\boxed{E'}$ converge al numero reale S tale che $0 < S < \frac{1}{9}$.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{3(n+1)} \right] = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n\,3^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} \right].$$

Quindi la serie è telescopica. La somma parziale n-esima della serie è

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{(-1)^k}{k\,3^k} - \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\,3^{k+1}} \right] = \frac{1}{18} + \frac{1}{81} - \frac{1}{81} - \frac{1}{324} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n\,3^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} = \frac{1}{18} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}}.$$

Ne segue che

$$\lim_n S_n = \lim_n \left[\frac{1}{18} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} \right] = \frac{1}{18}.$$

Quindi la serie converge a $S = \frac{1}{18}$. La risposta corretta è $\boxed{\text{E'}}$.

Quiz 2. L'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n^2}}{3^n+2} (x+1)^n$ è

$\boxed{N}$ un intervallo limitato contenente l'estremo di sinistra ma non quello di destra.

$\boxed{U}$ un intervallo aperto limitato.

$\boxed{L'}$ un intervallo chiuso limitato.

$\boxed{I}$ un intervallo limitato contenente l'estremo di destra ma non quello di sinistra.

$\boxed{E}$ $\mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = -1$. Posto $t = x+1$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n^2}}{3^n+2} (x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n^2}}{3^n+2} t^n.$$

Posto $a_n = (-1)^n \dfrac{\arctan \frac{1}{n^2}}{3^n+2}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{\arctan \frac{1}{n^2}}{3^n+2}} = \frac{1}{3}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = 3$. Quindi la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n^2}}{3^n+2} t^n$ converge assolutamente, e quindi anche puntualmente, in $(-3, 3)$.

Per $t=-3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan\frac{1}{n^2}}{3^n+2}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+2}\arctan\frac{1}{n^2}$$

che è a termini positivi. Poiché

$$\frac{3^n}{3^n+2}\arctan\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}, \qquad n\to+\infty$$

e la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, per il Criterio del confronto asitotico la serie in $t=-3$ converge.

Per $t=3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan\frac{1}{n^2}}{3^n+2}3^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{3^n+2}\arctan\frac{1}{n^2}$$

che è a termini di segno alterno e che converge assolutamente per quanto detto precedentemente nel caso $t=-3$. Ne segue che la serie in $t=3$ converge. Quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan\frac{1}{n^2}}{3^n+2}t^n$ converge puntualmente in $[-3,3]$). Essendo $t=x+1$, ovvero $x=t-1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan\frac{1}{n^2}}{3^n+2}(x+1)^n$ converge puntualmente in $[-4,2]$. La risposta corretta è $\boxed{\text{L'}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \frac{1}{4}\le x^2+y^2+z^2\le 1,\ \sqrt{3}\,z\ge 3\sqrt{x^2+y^2}\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^4}\,dx\,dy\,dz$ vale

$\boxed{U}$ $\frac{15}{8}\pi$.

$\boxed{L'}$ 21π.

$\boxed{N}$ $\frac{15}{4}\pi$.

$\boxed{I}$ $\frac{21}{2}\pi$.

$\boxed{E}$ $\frac{15}{2}\pi$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate polari nello spazio centrate nell'origine con la colatitudine misurata dall'asse z si ottiene

$$\int_\Omega \frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^4}\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'}\frac{2\cos\vartheta\sin\vartheta}{\rho^5}\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi,$$

dove $\Omega'\subseteq\mathbb{R}^3$ è l'insieme Ω scritto in coordinate polari. Si ha che

$$(x,y,z)\in\Omega \iff \begin{cases}\frac{1}{4}\le x^2+y^2+z^2\le 1\\ \sqrt{3}\,z\ge 3\sqrt{x^2+y^2}\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{1}{2}\le\rho\le 1\\ \sqrt{3}\rho\cos\vartheta\ge 3\rho\sin\vartheta\\ 0\le\vartheta\le\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{1}{2}\le\rho\le 1\\ 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{6}\\ 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$$

Quindi $\Omega'=\left[\frac{1}{2},1\right]\times\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\times[0,2\pi]$. Si ha che

$$\int_\Omega \frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^4}\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'}\frac{2\cos\vartheta\sin\vartheta}{\rho^5}\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi = 4\pi\left(\int_{1/2}^{1}\frac{1}{\rho^5}\,d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\right) =$$

$$= 4\pi\left[-\frac{1}{4\rho^4}\right]_{1/2}^{1}\left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{15}{8}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{U}}$.

Quiz 4. Sia $\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=2\sqrt{6}\,x^2+8y+5,\ x\ge 0,\ 2\sqrt{6}\,x\le y\le\sqrt{16-x^2}\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{z-2\sqrt{6}\,x^2-5}{(4+5x)\sqrt{96x^2+65}}\,d\sigma$ vale

$\boxed{U}$ $\frac{16}{5}$.

$\boxed{A}$ 96.

$\boxed{N}$ $\frac{32}{5}$.

$\boxed{C}$ 48.

$\boxed{I}$ 0.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = 2\sqrt{6}\,x^2 + 8y + 5$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ x \geq 0,\ \ 2\sqrt{6}\,x \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 0 \leq x \leq \frac{4}{5},\ \ 2\sqrt{6}\,x \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\right\}$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,2\sqrt{6}\,x^2+8y+5\right)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{z-2\sqrt{6}\,x^2-5}{(4+5x)\sqrt{96x^2+65}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{z-2\sqrt{6}\,x^2-5}{(4+5x)\sqrt{96x^2+65}}\,d\sigma = \int_\Sigma f\,d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\,\|N(x,y)\|\,dx\,dy,$$

dove $N(x,y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-4\sqrt{6}x, -8, 1\right).$$

Quindi $\|N(x,y)\| = \sqrt{96x^2+65}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{z-2\sqrt{6}\,x^2-5}{(4+5x)\sqrt{96x^2+65}}\,d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\,\|N(x,y)\|\,dx\,dy = \int_K \frac{8y}{4+5x}\,dx\,dy =$$

essendo K un insieme y-semplice si ottiene

$$= 8\int_0^{4/5} \frac{1}{4+5x}\left(\int_{2\sqrt{6}\,x}^{\sqrt{16-x^2}} y\,dy\right)dx = 4\int_0^{4/5} \frac{16-25x^2}{4+5x}\,dx = 4\int_0^{4/5}(4-5x)\,dx =$$

$$= 4\left[-\frac{1}{10}(4-5x)^2\right]_0^{4/5} = \frac{32}{5}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{N}}$.

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(3z-3,\ \ 2y+2,\ \ 4-2x\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, \log 2] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = \left(t^2+2,\ e^t,\ t^3+1\right)$ vale

$\boxed{U}$ 8.

$\boxed{I}$ 5.

$\boxed{N}$ 9.

$\boxed{A}$ 12.

$\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

Per definizione l'integrale di linea di F lungo la curva γ è dato da

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{\log 2} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = F\Big(t^2+2,\ e^t,\ t^3+1\Big)\cdot\Big(2t,\ e^t,\ 3t^2\Big) = \Big(3t^3,\ 2e^t+2,\ -2t^2\Big)\cdot\Big(2t,\ e^t,\ 3t^2\Big) = 2e^{2t}+2e^t,$$

si ottiene

$$= \int_0^{\log 2}\left(2e^{2t}+2e^t\right)\,dt = \Big[e^{2t}+2e^t\Big]_0^{\log 2} = 5.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{I}}$.

Quiz 6. La derivata della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^2\,(y-1)}{x^2+(y-1)^2}+5x+9y & \text{se } (x,y)\neq(0,1) \\ 9 & \text{se } (x,y)=(0,1) \end{cases}$ nel punto $(0,1)$ rispetto al vettore $v=(-1,1)$

$\boxed{E}$ vale 3.

$\boxed{A}$ vale 0.

$\boxed{N}$ non esiste.

$\boxed{I}$ vale 9.

$\boxed{C}$ vale 7.

SVOLGIMENTO

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(0,1)$ rispetto al vettore $v=(-1,1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \lim_{t\to0}\frac{f\Big((0,1)+tv\Big)-f(0,1)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{f\Big((0,1)+t(-1,1)\Big)-f(0,1)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{f(-t,1+t)-f(0,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{7t}{t} = 7.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 7. Siano $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{U}$ Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo in Ω.

$\boxed{L'}$ Se F è irrotazionale in Ω, allora F è conservativo in Ω.

$\boxed{N}$ Se F non è conservativo in Ω, allora Ω non è semplicemente connesso.

$\boxed{A}$ Se F non è irrotazionale in Ω, allora F non è conservativo in Ω.

$\boxed{I}$ Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per il Teorema noto come condizione necessaria per i campi conservativi di classe C^1, se F non è irrotazionale in Ω, allora F non è conservativo in Ω. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 8. Sia (a_n) la successione definita nel seguente modo: $\quad\forall n\in\mathbb{N}:\quad a_n = \begin{cases} \dfrac{4}{(n+1)!} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{5}{n!} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{E}$ Non esistono $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ e non si può concludere nulla sulla convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

$\boxed{U}$ Non esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{N}$ Esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{I}$ Non esiste $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{C}$ Esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

SVOLGIMENTO

La serie è a termini positivi. Si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\dfrac{4}{(n+1)!}} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sqrt[n]{\dfrac{5}{n!}} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi

$$n \text{ pari} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{4}{(n+1)!}} = \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{5}{n!}},$$

$$n \text{ dispari} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{4}{(n+1)!}} \leq \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{5}{n!}}.$$

Ne segue che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[n]{\frac{4}{(n+1)!}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{5}{n!}}.$$

Poiché

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{4}{(n+1)!}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{5}{n!}} = 0,$$

per il Secondo teorema del confronto sui limiti anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 0$. Per il Criterio della radice la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Si osservi che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{5}{4} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{4}{5(n+1)(n+2)} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi non esiste $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Versione V3

Quiz 1. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{(-1)^n}{n}\right]$

$\boxed{O}$ converge al numero reale S tale che $-\frac{1}{4} < S < 0$.

$\boxed{S}$ converge al numero reale S tale che $-\frac{1}{2} < S < -\frac{1}{4}$.

$\boxed{A}$ converge al numero reale S tale che $-1 < S < -\frac{1}{2}$.

$\boxed{C}$ converge a 0.

$\boxed{E}$ diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{(-1)^n}{n}\right] = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{n\,2^n}\right].$$

Quindi la serie è telescopica. La somma parziale n-esima della serie è

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\,2^{k+1}} - \frac{(-1)^k}{k\,2^k}\right] = -\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{n\,2^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}} - \frac{1}{8}.$$

Ne segue che

$$\lim_n S_n = \lim_n \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}} - \frac{1}{8}\right] = -\frac{1}{8}.$$

Quindi la serie converge a $S = -\frac{1}{8}$. La risposta corretta è $\boxed{\text{O}}$.

Quiz 2. L'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{4^n - 3} (x-2)^n$ è

$\boxed{E}$ $\mathbb{R}$.

$\boxed{A}$ un intervallo chiuso limitato.

$\boxed{C}$ un intervallo limitato contenente l'estremo di sinistra ma non quello di destra.

$\boxed{H}$ un intervallo aperto limitato.

$\boxed{S}$ un intervallo limitato contenente l'estremo di destra ma non quello di sinistra.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 2$. Posto $t = x - 2$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{4^n - 3} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{4^n - 3} t^n.$$

Posto $a_n = (-1)^n \dfrac{\arctan \frac{1}{n+1}}{4^n - 3}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{4^n - 3}} = \frac{1}{4}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = 4$.

Quindi la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{4^n - 3} t^n$ converge assolutamente, e quindi anche puntualmente, in $(-4, 4)$.

Per $t = 4$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{4^n - 3} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{4^n - 3} \arctan \frac{1}{n+1}$$

che è a termini di segno alterno. Poiché

$$\left| (-1)^n \frac{4^n}{4^n - 3} \arctan \frac{1}{n+1} \right| = \frac{4^n}{4^n - 3} \arctan \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}, \quad n \to +\infty,$$

ed essendo divergente la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, per il Criterio del confronto asintotico la serie in $t = 4$ non converge assolutamente.

Posto $b_n = \frac{4^n}{4^n - 3} \arctan \frac{1}{n+1}$, si ha che $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e inoltre (b_n) è decrescente, perché lo sono le successioni $c_n = \frac{4^n}{4^n - 3} = 1 + \frac{3}{4^n - 3}$ e $d_n = \arctan \frac{1}{n+1}$. Per il Criterio di Leibniz la serie in $t = 4$ converge.

Per $t = -4$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{4^n - 3} (-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n - 3} \arctan \frac{1}{n+1}$$

che è a termini positivi. Poiché

$$\frac{4^n}{4^n - 3} \arctan \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}, \quad n \to +\infty,$$

ed essendo divergente la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, per il Criterio del confronto asintotico la serie in $t = -4$ diverge.

Ne segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{4^n - 3} t^n$ converge puntualmente in $(-4, 4]$. Essendo $t = x - 2$, ovvero $x = t + 2$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{4^n - 3} (x-2)^n$ converge puntualmente in $(-2, 6]$. La risposta corretta è $\boxed{\text{S}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ \sqrt{3}\, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$. L'integrale $\int_\Omega \frac{8z}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \, dx\, dy\, dz$ vale

$\boxed{S}$ $\frac{255}{16} \sqrt{3} \pi$.

$\boxed{C}$ $\frac{255}{8} \sqrt{3} \pi$.

$\boxed{H}$ $\frac{45}{8} \pi$.

$\boxed{A}$ $\frac{45}{4} \pi$.

$\boxed{E}$ $\frac{45}{2} \pi$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate polari nello spazio centrate nell'origine con la colatitudine misurata dall'asse z si ottiene

$$\int_\Omega \frac{8z}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} \frac{8 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho^3} \, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ è l'insieme Ω scritto in coordinate polari. Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ \sqrt{3}\, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \rho \leq 2 \\ \sqrt{3} \rho \cos \vartheta \geq \rho \sin \vartheta \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Quindi $\Omega' = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times [0, 2\pi]$. Si ha che

$$\int_\Omega \frac{8z}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \frac{8\cos\vartheta\sin\vartheta}{\rho^3}\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi = 16\pi \left(\int_{1/2}^2 \frac{1}{\rho^3}\,d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\right) =$$

$$= 16\pi \left[-\frac{1}{2\rho^2}\right]_{1/2}^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{45}{4}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 4. Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 10x + 2\sqrt{2}\,y^2 + 9, \ \ y \geq 0, \ \ 2\sqrt{2}\,y \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{2\sqrt{2}\,y^2 + 9 - z}{(2+3y)\sqrt{32y^2+101}}\,d\sigma$ vale

$\boxed{O}$ -10.

$\boxed{C}$ $-\dfrac{10}{3}$.

$\boxed{A}$ $-\dfrac{20}{3}$.

$\boxed{S}$ -20.

$\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = 10x + 2\sqrt{2}\,y^2 + 9$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, \ 2\sqrt{2}\,y \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq \frac{2}{3}, \ 2\sqrt{2}\,y \leq x \leq \sqrt{4yx^2}\right\}$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, 10x + 2\sqrt{2}\,y^2 + 9\right)$.

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{2\sqrt{2}\,y^2 + 9 - z}{(2+3y)\sqrt{32y^2+101}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{2\sqrt{2}\,y^2 + 9 - z}{(2+3y)\sqrt{32y^2+101}}\,d\sigma = \int_\Sigma f\,d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\,\|N(x,y)\|\,dx\,dy,$$

dove $N(x,y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-10, -4\sqrt{2}y, 1\right).$$

Quindi $\|N(x,y)\| = \sqrt{32y^2+101}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{2\sqrt{2}\,y^2 + 9 - z}{(2+3y)\sqrt{32y^2+101}}\,d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\,\|N(x,y)\|\,dx\,dy = \int_K \left(-\frac{10x}{2+3y}\right)dx\,dy =$$

essendo K un insieme x-semplice si ottiene

$$= -10\int_0^{2/3} \frac{1}{2+3y}\left(\int_{2\sqrt{2}\,y}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\right)dy = -5\int_0^{2/3} \frac{4-9y^2}{2+3y}\,dy = -5\int_0^{2/3} (2-3y)\,dy =$$

$$= -5\left[-\frac{1}{6}(2-3y)^2\right]_0^{2/3} = -\frac{10}{3}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(2x+2, \ 6-3z, \ 2y-2\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, \log 3] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = \left(e^t, \ t^2+1, \ t^3+2\right)$ vale

$\boxed{A}$ 24.

$\boxed{O}$ 15.

$\boxed{C}$ 20.

$\boxed{H}$ 12.

$\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

Per definizione l'integrale di linea di F lungo la curva γ è dato da

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{\log 3} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\Big(e^t,\ t^2+1,\ t^3+2\Big) \cdot \Big(e^t,\ 2t,\ 3t^2\Big) = \Big(2e^t+2,\ -3t^3,\ 2t^2\Big) \cdot \Big(e^t,\ 2t,\ 3t^2\Big) = 2e^{2t} + 2e^t,$$

si ottiene

$$= \int_0^{\log 3} \left(2e^{2t} + 2e^t\right)\, dt = \Big[e^{2t} + 2e^t\Big]_0^{\log 3} = 12.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{H}}$.

Quiz 6. La derivata della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4(x+1)\, y^2}{(x+1)^2 + y^2} - 7x + 3y & \text{se } (x,y) \neq (-1,0) \\ 7 & \text{se } (x,y) = (-1,0) \end{cases}$ nel punto $(-1,0)$ rispetto al vettore $v = (-1,1)$

$\boxed{A}$ vale 2.

$\boxed{H}$ vale 0.

$\boxed{C}$ non esiste.

$\boxed{S}$ vale 7.

$\boxed{E}$ vale 8.

SVOLGIMENTO

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(-1,0)$ rispetto al vettore $v = (-1,1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((-1,0)+tv\Big) - f(-1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((-1,0)+t(-1,1)\Big) - f(-1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(-1-t,t) - f(-1,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{8t}{t} = 8.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 7. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{S}$ Se F non è conservativo in Ω, allora Ω non è

$\boxed{A}$ Se F è irrotazionale in Ω, allora F è conservativo in Ω.

$\boxed{C}$ Se F è conservativo in Ω, allora F è irrotazionale in Ω.

$\boxed{H}$ Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo in Ω.

$\boxed{E}$ Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per il Teorema noto come condizione necessaria per i campi conservativi di classe C^1, se F è conservativo in Ω, allora F è irrotazionale in Ω. La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Quiz 8. Sia (a_n) la successione definita nel seguente modo: $\quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{3^n}{n!} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{2^n}{(n+1)!} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{S}$ Non esiste $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{H}$ Non esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{C}$ Esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{O}$ Esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{E}$ Non esistono $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ e non si può concludere nulla sulla convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

SVOLGIMENTO

La serie è a termini positivi. Si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt[n]{n!}} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{2}{\sqrt[n]{(n+1)!}} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi

$$n \text{ pari} \implies \frac{2}{\sqrt[n]{(n+1)!}} \le \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{\sqrt[n]{n!}},$$
$$n \text{ dispari} \implies \frac{2}{\sqrt[n]{(n+1)!}} = \sqrt[n]{a_n} \le \frac{3}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Ne segue che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{2}{\sqrt[n]{(n+1)!}} \le \sqrt[n]{a_n} \le \frac{3}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Poiché

$$\lim_n \frac{2}{\sqrt[n]{(n+1)!}} = \lim_n \frac{3}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

per il Secondo teorema del confronto sui limiti anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 0$. Per il Criterio della radice la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. La risposta corretta è $\boxed{\text{O}}$.

Si osservi che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{2^{n+1}}{3^n\,(n+1)(n+2)} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{3^{n+1}}{2^n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi non esiste $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Versione V4

Quiz 1. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{3(n+1)} - \frac{(-1)^n}{n}\right]$

$\boxed{N}$ converge al numero reale S tale che $-\frac{1}{9} < S < 0$.

$\boxed{T}$ converge al numero reale S tale che $-\frac{1}{3} < S < -\frac{1}{9}$.

$\boxed{A}$ converge al numero reale S tale che $-1 < S < -\frac{1}{3}$.

$\boxed{G}$ converge a 0.

$\boxed{R}$ diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{3(n+1)} - \frac{(-1)^n}{n}\right] = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{n\,3^n}\right].$$

Quindi la serie è telescopica. La somma parziale n-esima della serie è

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\,3^{k+1}} - \frac{(-1)^k}{k\,3^k}\right] = -\frac{1}{81} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{n\,3^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} - \frac{1}{18}.$$

Ne segue che

$$\lim_n S_n = \lim_n \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} - \frac{1}{18}\right] = -\frac{1}{18}.$$

Quindi la serie converge a $S = -\frac{1}{18}$. La risposta corretta è $\boxed{\text{N}}$.

Quiz 2. L'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\frac{1}{n+1}}{5^n - 4}(x+2)^n$ è

$\boxed{R}$ $\mathbb{R}$.

$\boxed{A}$ un intervallo aperto limitato.

$\boxed{N}$ un intervallo chiuso limitato.

$\boxed{G}$ un intervallo limitato contenente l'estremo di destra ma non quello di sinistra.

$\boxed{T}$ un intervallo limitato contenente l'estremo di sinistra ma non quello di destra.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = -2$. Posto $t = x + 2$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\frac{1}{n+1}}{5^n - 4}(x+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\frac{1}{n+1}}{5^n - 4}t^n.$$

Posto $a_n = \dfrac{\arctan\frac{1}{n+1}}{5^n - 4}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{\arctan\frac{1}{n+1}}{5^n - 4}} = \frac{1}{5}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = 5$.

Quindi la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\frac{1}{n+1}}{5^n - 4}t^n$ converge assolutamente, e quindi anche puntualmente, in $(-5, 5)$.

Per $t=-5$ si ha
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{5^n-4}(-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5^n}{5^n-4} \arctan \frac{1}{n+1}$$
che è a termini di segno alterno. Poiché
$$\left|(-1)^n \frac{5^n}{5^n-4} \arctan \frac{1}{n+1}\right| = \frac{5^n}{5^n-4} \arctan \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}, \quad n \to +\infty,$$
ed essendo divergente la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, per il Criterio del confronto asintotico la serie in $t=-5$ non converge assolutamente.

Posto $b_n = \frac{5^n}{5^n-4} \arctan \frac{1}{n+1}$, si ha che $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e inoltre (b_n) è decrescente, perché lo sono le successioni $c_n = \frac{5^n}{5^n-4} = 1 + \frac{4}{5^n-4}$ e $d_n = \arctan \frac{1}{n+1}$. Per il Criterio di Leibniz la serie in $t=-5$ converge.

Per $t=5$ si ha
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n-4} \arctan \frac{1}{n+1}\, 5^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n-4} \arctan \frac{1}{n+1}$$
che è a termini positivi. Poiché
$$\frac{5^n}{5^n-4} \arctan \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}, \quad n \to +\infty,$$
ed essendo divergente la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, per il Criterio del confronto asintotico la serie in $t=5$ diverge.

Ne segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{5^n-4} t^n$ converge puntualmente in $[-5,5)$. Essendo $t=x+2$, ovvero $x=t-2$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n+1}}{5^n-4}(x+2)^n$ converge puntualmente in $[-7,3)$. La risposta corretta è $\boxed{\text{T}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9, \ \sqrt{3}\, z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}$. L'integrale $\int_\Omega \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^3}\, dx\, dy\, dz$ vale

$\boxed{I}$ $\frac{10}{81}\sqrt{3}\pi$.

$\boxed{R}$ $\frac{20}{81}\sqrt{3}\pi$.

$\boxed{N}$ $\frac{\pi}{6}$.

$\boxed{A}$ $\frac{\pi}{3}$.

$\boxed{G}$ $\frac{2}{3}\pi$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate polari nello spazio centrate nell'origine con la colatitudine misurata dall'asse z si ottiene
$$\int_\Omega \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^3}\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta}{\rho^3}\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi,$$
dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ è l'insieme Ω scritto in coordinate polari. Si ha che
$$(x,y,z) \in \Omega \quad \iff \quad \begin{cases} 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 3 \\ \sqrt{3}\, z \ge \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} 1 \le \rho \le 3 \\ \sqrt{3}\rho\cos\vartheta \ge \rho\sin\vartheta \\ 0 \le \vartheta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} 1 \le \rho \le 3 \\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{3} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$
Quindi $\Omega' = [1,3] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times [0, 2\pi]$. Si ha che
$$\int_\Omega \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^3}\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta}{\rho^3}\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi \left(\int_1^3 \frac{1}{\rho^3}\, d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\right) =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2\rho^2} \right]_1^3 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 4. Sia $\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 11x + 2\sqrt{6}\, y^2 + 12, \ y \geq 0, \ 2\sqrt{6}\, y \leq x \leq \sqrt{16 - y^2} \right\}$.

L'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{2\sqrt{6}\, y^2 + 12 - z}{(4 + 5y)\sqrt{96y^2 + 122}}\, d\sigma$ vale

$\boxed{N}$ $-\dfrac{22}{5}$.

$\boxed{T}$ -132.

$\boxed{G}$ $-\dfrac{44}{5}$.

$\boxed{A}$ -66.

$\boxed{I}$ 0.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 11x + 2\sqrt{6}\, y^2 + 12$, dove

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, \ 2\sqrt{6}\, y \leq x \leq \sqrt{16 - y^2} \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq \frac{4}{5}, \ 2\sqrt{6}\, y \leq x \leq \sqrt{16 - y^2} \right\}$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = \left(x, y, 11x + 2\sqrt{6}\, y^2 + 12\right)$.

Posto $f(x, y, z) = \dfrac{2\sqrt{6}\, y^2 + 12 - z}{(4 + 5y)\sqrt{96y^2 + 122}}$, si ha che

$$\int_\Sigma \frac{2\sqrt{6}\, y^2 + 12 - z}{(4 + 5y)\sqrt{96y^2 + 122}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y))\, \|N(x, y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-11, -4\sqrt{6}y, 1 \right).$$

Quindi $\|N(x, y)\| = \sqrt{96y^2 + 122}$. Ne segue che

$$\int_\Sigma \frac{2\sqrt{6}\, y^2 + 12 - z}{(4 + 5y)\sqrt{96y^2 + 122}}\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y))\, \|N(x, y)\|\, dx\, dy = \int_K \left(-\frac{11x}{4 + 5y} \right) dx\, dy =$$

essendo K un insieme x-semplice si ottiene

$$= -11 \int_0^{4/5} \frac{1}{4 + 5y} \left(\int_{2\sqrt{6}\, y}^{\sqrt{16 - y^2}} x\, dx \right) dy = -\frac{11}{2} \int_0^{4/5} \frac{16 - 25y^2}{4 + 5y}\, dy = -\frac{11}{2} \int_0^{4/5} (4 - 5y)\, dy =$$

$$= -\frac{11}{2} \left[-\frac{1}{10}(4 - 5y)^2 \right]_0^{4/5} = -\frac{44}{5}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{G}}$.

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(3 - 3y, \ 2x - 4, \ 2z + 1\right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, \log 2] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = \left(t^2 + 2, \ t^3 + 1, \ e^t\right)$ vale

$\boxed{R}$ 6.

$\boxed{N}$ 4.

$\boxed{T}$ 7.

$\boxed{A}$ 10.

$\boxed{G}$ 0.

SVOLGIMENTO

Per definizione l'integrale di linea di F lungo la curva γ è dato da

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{\log 2} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\Big(t^2+2,\ t^3+1,\ e^t\Big) \cdot \Big(2t,\ 3t^2,\ e^t\Big) = \Big(-3t^3,\ 2t^2,\ 2e^t+1\Big) \cdot \Big(2t,\ 3t^2,\ e^t\Big) = 2e^{2t}+e^t,$$

si ottiene

$$= \int_0^{\log 2} \left(2e^{2t}+e^t\right)\, dt = \Big[e^{2t}+e^t\Big]_0^{\log 2} = 4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{N}}$.

Quiz 6. La derivata della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^2\,(y+1)}{x^2+(y+1)^2} + 5x - 9y & \text{se } (x,y) \neq (0,-1) \\ 9 & \text{se } (x,y) = (0,-1) \end{cases}$ nel punto $(0,-1)$ rispetto al vettore $v = (1,-1)$

$\boxed{A}$ vale 11.

$\boxed{G}$ vale 0.

$\boxed{N}$ non esiste.

$\boxed{R}$ vale 9.

$\boxed{T}$ vale 3.

SVOLGIMENTO

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(0,-1)$ rispetto al vettore $v = (1,-1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,-1) = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,-1)+tv\Big) - f(0,-1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,-1)+t(1,-1)\Big) - f(0,-1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,-1-t) - f(0,-1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{11t}{t} = 11.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 7. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 in Ω.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{T}$ Se F è irrotazionale in Ω, allora F è conservativo in Ω.

$\boxed{R}$ Se F non è irrotazionale in Ω, allora F non è conservativo in Ω.

$\boxed{G}$ Se F non è conservativo in Ω, allora Ω non è semplicemente connesso.

$\boxed{N}$ Se Ω non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo in Ω.

$\boxed{I}$ Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per il Teorema noto come condizione necessaria per i campi conservativi di classe C^1, se F non è irrotazionale in Ω, allora F non è conservativo in Ω. La risposta corretta è $\boxed{\text{R}}$.

Quiz 8. Sia (a_n) la successione definita nel seguente modo: $\quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{6^n}{(n+1)!} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{7^n}{n!} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{A}$ Non esiste $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{G}$ Non esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{N}$ Esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\boxed{I}$ Esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{R}$ Non esistono $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ e non si può concludere nulla sulla convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

SVOLGIMENTO

La serie è a termini positivi. Si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \dfrac{6}{\sqrt[n]{(n+1)!}} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{7}{\sqrt[n]{n!}} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi

$$n \text{ pari} \quad \Longrightarrow \quad \frac{6}{\sqrt[n]{(n+1)!}} = \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{7}{\sqrt[n]{n!}},$$

$$n \text{ dispari} \quad \Longrightarrow \quad \frac{6}{\sqrt[n]{(n+1)!}} \leq \sqrt[n]{a_n} = \frac{7}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Ne segue che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{6}{\sqrt[n]{(n+1)!}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{7}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Poiché

$$\lim_n \frac{6}{\sqrt[n]{(n+1)!}} = \lim_n \frac{7}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

per il Secondo teorema del confronto sui limiti anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 0$. Per il Criterio della radice la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. La risposta corretta è $\boxed{\text{I}}$.

Si osservi che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{7^{n+1}}{6^n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{6^{n+1}}{7^n\,(n+1)(n+2)} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi non esiste $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
