

ESAME ONLINE

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V1	S	E	S	T	U	D	I	P

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(3(x+1)y + e^{x^4+x^3}, (x+1)^3y + \frac{3}{2}(x+1)^2 + \log(1+y^6) \right)$$

lungo il bordo dell'insieme

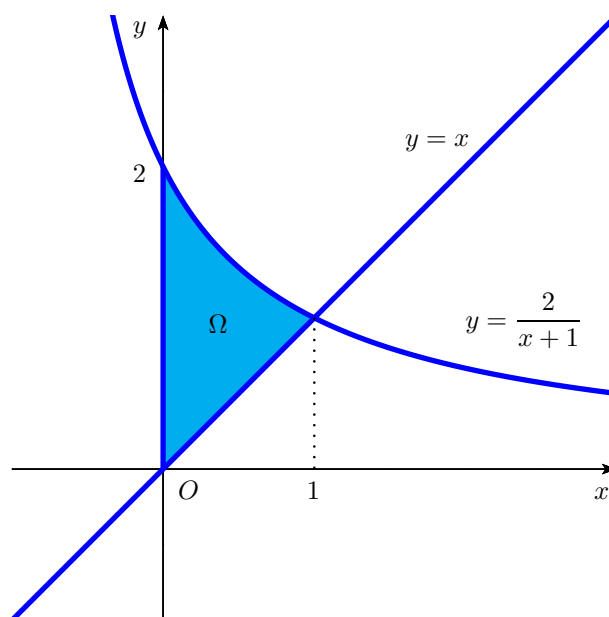
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq \frac{2}{x+1} \right\}$$

percorso in senso antiorario.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = 3 \int_{\Omega} (x+1)^2 y dx dy.$$



Si ha che per $x \geq 0$

$$x \leq \frac{2}{x+1} \iff x - \frac{2}{x+1} \leq 0 \iff \frac{x^2 + x - 2}{x+1} \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 1.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \frac{2}{x+1} \right\}$$

è un insieme y -semplice.

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= 3 \int_{\Omega} (x+1)^2 y dx dy = 3 \int_0^1 \left(\int_x^{2/(x+1)} (x+1)^2 y dy \right) dx = 3 \int_0^1 (x+1)^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_x^{2/(x+1)} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 (x+1)^2 \left[\frac{4}{(x+1)^2} - x^2 \right] dx = \frac{3}{2} \int_0^1 (4 - x^4 - 2x^3 - x^2) dx = \frac{3}{2} \left[4x - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{89}{20}. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V2	E	R	I	L	D	I	C	I

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(e^{x^4+x^3} - x(y+1)^3 + \frac{3}{2}(y+1)^2, 3x(y+1) + \log(1+y^6) \right)$$

lungo il bordo dell'insieme

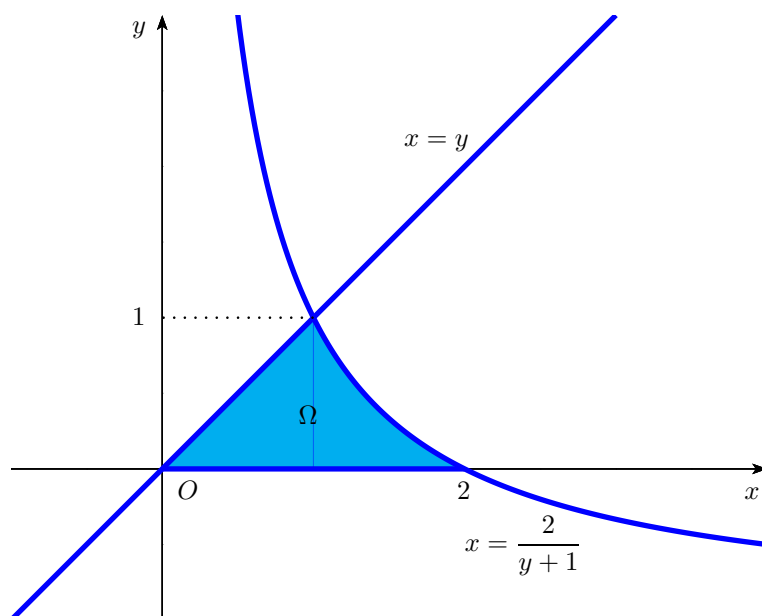
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq \frac{2}{y+1} \right\}$$

percorso in senso antiorario.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = 3 \int_{\Omega} x(y+1)^2 dx dy.$$



Si ha che per $y \geq 0$

$$y \leq \frac{2}{y+1} \iff y - \frac{2}{y+1} \leq 0 \iff \frac{y^2 + y - 2}{y+1} \leq 0 \iff 0 \leq y \leq 1.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \frac{2}{y+1} \right\}$$

è un insieme x -semplice.

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= 3 \int_{\Omega} x(y+1)^2 dx dy = 3 \int_0^1 \left(\int_y^{2/(y+1)} x(y+1)^2 dx \right) dy = 3 \int_0^1 (y+1)^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_y^{2/(y+1)} dy = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 (y+1)^2 \left[\frac{4}{(y+1)^2} - y^2 \right] dy = \frac{3}{2} \int_0^1 (4 - y^4 - 2y^3 - y^2) dy = \frac{3}{2} \left[4y - \frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{2} y^4 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{89}{20}. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V3	O	T	T	O	P	R	E	N

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(6(x+1)y + e^{x^5+x^4}, 2(x+1)^3y + 3(x+1)^2 + \log(1+y^4) \right)$$

lungo il bordo dell'insieme

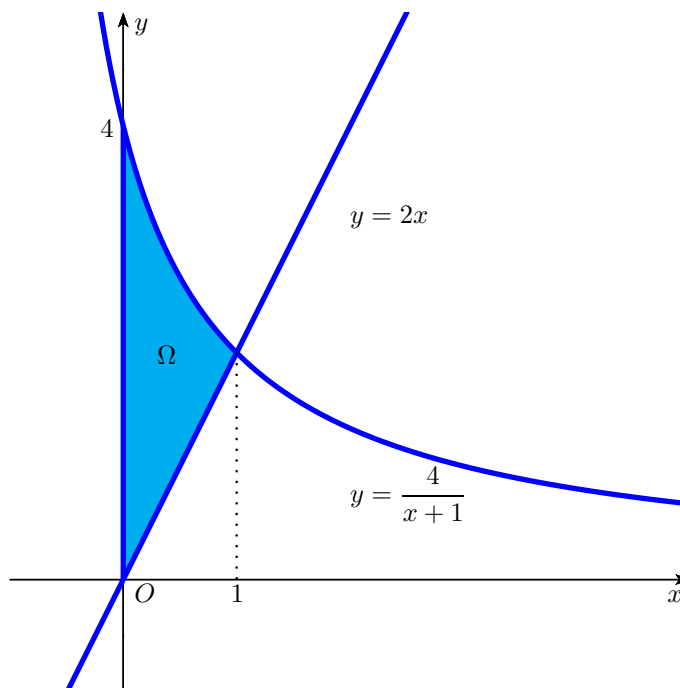
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 2x \leq y \leq \frac{4}{x+1} \right\}$$

percorso in senso antiorario.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = 6 \int_{\Omega} (x+1)^2 y dx dy.$$



Si ha che per $x \geq 0$

$$2x \leq \frac{4}{x+1} \iff 2x - \frac{4}{x+1} \leq 0 \iff \frac{2x^2 - 2x - 4}{x+1} \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 1.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq \frac{4}{x+1} \right\}$$

è un insieme y -semplice.

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= 6 \int_{\Omega} (x+1)^2 y dx dy = 6 \int_0^1 \left(\int_{2x}^{4/(x+1)} (x+1)^2 y dy \right) dx = 6 \int_0^1 (x+1)^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{2x}^{4/(x+1)} dx = \\ &= 3 \int_0^1 (x+1)^2 \left[\frac{16}{(x+1)^2} - 4x^2 \right] dx = 12 \int_0^1 (4 - x^4 - 2x^3 - x^2) dx = 12 \left[4x - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{178}{5}. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V4	D	I	D	I	M	E	N	O

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(e^{x^4+x^5} - 2x(y+1)^3 + 3(y+1)^2, 6x(y+1) + \log(1+y^4) \right)$$

lungo il bordo dell'insieme

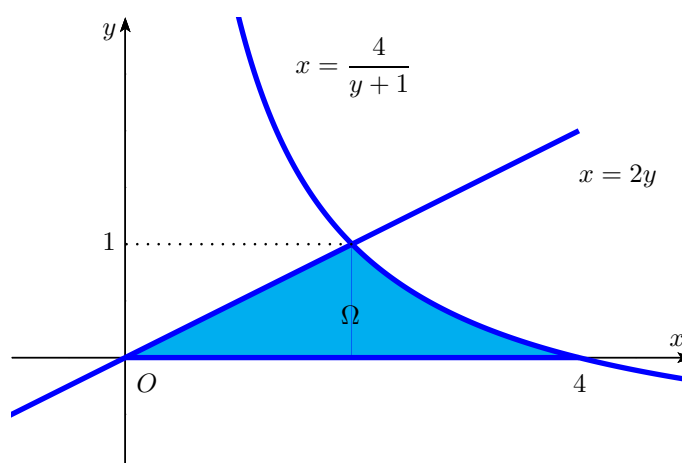
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 2y \leq x \leq \frac{4}{y+1} \right\}$$

percorso in senso antiorario.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = 6 \int_{\Omega} x(y+1)^2 dx dy.$$



Si ha che per $y \geq 0$

$$2y \leq \frac{4}{y+1} \iff 2y - \frac{4}{y+1} \leq 0 \iff \frac{2y^2 + 2y - 4}{y+1} \leq 0 \iff 0 \leq y \leq 1.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 2y \leq x \leq \frac{4}{y+1} \right\}$$

è un insieme x -semplice.

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= 6 \int_{\Omega} x(y+1)^2 dx dy = 6 \int_0^1 \left(\int_y^{4/(y+1)} x(y+1)^2 dx \right) dy = 6 \int_0^1 (y+1)^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{2y}^{4/(y+1)} dy = \\ &= 3 \int_0^1 (y+1)^2 \left[\frac{16}{(y+1)^2} - 4y^2 \right] dy = 12 \int_0^1 (4 - y^4 - 2y^3 - y^2) dy = 12 \left[4y - \frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{2} y^4 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{178}{5}. \end{aligned}$$