Svolgimento dei quiz dell'esame di Analisi Matematica II del 16 giugno 2021 ore 12

ESAME ONLINE

Versione: V1

Quiz 1. Siano $p, q \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^q \sin(n\pi) + 7n^p}{2n^3+5}$

$\boxed{D}$ converge se e solo se $p + q < 2$.

$\boxed{E}$ converge se e solo se $q < 2$, per ogni $p \in \mathbb{R}$.

$\boxed{T}$ converge se e solo se $p < 2$ e $q < 2$.

$\boxed{S}$ converge se e solo se $p < 2$, per ogni $q \in \mathbb{R}$.

$\boxed{U}$ non converge per ogni $p, q \in \mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\sin(n\pi) = 0$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^q \sin(n\pi) + 7n^p}{2n^3+5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^p}{2n^3+5}$$

e quindi è a termini positivi.

Poiché

$$\frac{7n^p}{2n^3+5} \sim \frac{7}{2} \frac{1}{n^{3-p}}, \qquad n \to +\infty$$

e poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}}$ converge se e solo se $3-p > 1$, ovvero per $p < 2$, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge se e solo se $p < 2$, per ogni $q \in \mathbb{R}$.

La risposta corretta è $\boxed{S}$.

Quiz 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(x+\pi)^2 & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\[2ex] \dfrac{2}{\pi}(x-\pi)^2 & \text{se } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$\boxed{U}$ $P_1(x) = \dfrac{8}{\pi}\cos x + \dfrac{12}{\pi}\sin x$.

$\boxed{S}$ $P_1(x) = \dfrac{8}{\pi}\cos x$.

$\boxed{T}$ $P_1(x) = \dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{12}{\pi}\sin x$.

$\boxed{D}$ $P_1(x) = \dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{8}{\pi}\cos x + \dfrac{12}{\pi}\sin x$.

$\boxed{E}$ $P_1(x) = \dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{8}{\pi}\cos x$.

SVOLGIMENTO

La funzione f è periodica di periodo 2π e continua in $[-\pi, \pi]$, quindi integrabile in $[-\pi, \pi]$. Inoltre, essendo g pari, anche f è pari e quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = a_0 + a_1 \cos x,$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx.$$

Per la “parità” di f si ha che

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}(x-\pi)^2\,dx = \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{3}(x-\pi)^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}(x-\pi)^2\,\cos x\,dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\,\cos x\,dx =$$

integrando per parti

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\left[(x-\pi)^2\sin x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin x\,dx\right) =$$

integrando nuovamente per parti

$$= -\frac{8}{\pi^2}\left(\left[-(x-\pi)\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right) =$$

$$= -\frac{8}{\pi^2}\left(-\pi + \left[\sin x\right]_0^{\pi}\right) = \frac{8}{\pi}.$$

Quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = \frac{2}{3}\pi + \frac{8}{\pi}\cos x.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2\le 10,\ \ z\ge 2+\sqrt{x^2+y^2}\right\}$. L’integrale $\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^4 z\,dx\,dy\,dz$ vale

$\boxed{T}$ $\frac{14}{165}\pi$.

$\boxed{S}$ $\frac{23}{330}\pi$.

$\boxed{U}$ $\frac{23}{33}\pi$.

$\boxed{D}$ $\frac{28}{33}\pi$.

$\boxed{E}$ $\frac{7}{165}\pi$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l’asse z si ottiene

$$\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^4 z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho^9\, z\,d\rho\,d\vartheta\,dz,$$

dove $\Omega'\subseteq\mathbb{R}^3$ è l’insieme Ω scritto in coordinate cilindriche. Si ha che

$$(x,y,z)\in\Omega \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 10\\ z\ge 2+\sqrt{x^2+y^2}\end{cases} \iff \begin{cases}\rho^2+z^2\le 10\\ z\ge 2+\rho\\ \rho\ge 0\\ 0\le\vartheta\le 2\pi\end{cases} \iff \begin{cases} 2+\rho\le z\le\sqrt{10-\rho^2}\\ 0\le\rho\le 1\\ 0\le\vartheta\le 2\pi.\end{cases}$$

Quindi

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\vartheta\le 2\pi,\ \ 2+\rho\le z\le\sqrt{10-\rho^2}\right\}.$$

Integrando prima per fili paralleli all’asse ϑ si ha che

$$\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^4 z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'}\rho^9\,z\,d\rho\,d\vartheta\,dz = 2\pi\int_D \rho^9\,z\,d\rho\,dz =$$

dove $D = \left\{(\rho,z)\in\mathbb{R}^2 :\ 0\le\rho\le 1,\ 2+\rho\le z\le\sqrt{10-\rho^2}\right\}$ che è un insieme z-semplice, e quindi si ottiene

$$= 2\pi\int_0^1\left(\int_{2+\rho}^{\sqrt{10-\rho^2}}\rho^9\,z\,dz\right)d\rho = 2\pi\int_0^1\rho^9\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{2+\rho}^{\sqrt{10-\rho^2}}d\rho = \pi\int_0^1\rho^9\left[10-\rho^2-(2+\rho)^2\right]\,d\rho =$$

$$= \pi\int_0^1\left(6\rho^9-4\rho^{10}-2\rho^{11}\right)\,d\rho = \pi\left[\frac{3}{5}\rho^{10}-\frac{4}{11}\rho^{11}-\frac{1}{6}\rho^{12}\right]_0^1 = \frac{23}{330}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{S}}$.

Quiz 4. L'area della superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \sqrt{2}\left(x^2 - y^2\right) + 5, \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ vale

$\boxed{U}$ $\frac{31}{6}\pi$.

$\boxed{S}$ $\frac{13}{12}\pi$.

$\boxed{T}$ $\frac{13}{6}\pi$.

$\boxed{D}$ $\frac{31}{3}\pi$.

$\boxed{E}$ π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \sqrt{2}\left(x^2 - y^2\right) + 5$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,\sqrt{2}\left(x^2-y^2\right)+5\right)$.

Ne segue che l'area di Σ è data da

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ. Un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ è

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-2\sqrt{2}x,\ 2\sqrt{2}y, 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \|N(x,y)\| = \sqrt{1 + 8(x^2+y^2)}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \|N(x,y)\|\, dx\, dy = \int_K \sqrt{1+8(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

passando in coordinate polari

$$= \int_{K'} \rho\sqrt{1+8\rho^2}\, d\rho\, d\vartheta =$$

essendo $K' = [0,1] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 2\pi \int_0^1 \rho\sqrt{1+8\rho^2}\, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{24}\left(1+8\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{13}{6}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{T}}$.

Quiz 5. Il campo vettoriale $F(x,y) = \left(3x^2 y - \left|\sqrt{x} - y^2\right|, 2xy - \left|y - x^3\right|\right)$ è conservativo sull'insieme

$\boxed{E}$ $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{S}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < \sqrt{x}\right\}$.

$\boxed{T}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x^3\right\}$.

$\boxed{D}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^3 < x < \sqrt[4]{y}\right\}$.

$\boxed{U}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^3 < y < \sqrt[4]{x}\right\}$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\operatorname{dom}(F) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0\right\}$. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 3x^2 + 2y & \text{se } \sqrt{x} > y^2 \\ 3x^2 - 2y & \text{se } \sqrt{x} < y^2, \end{cases} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2y + 3x^2 & \text{se } y > x^3 \\ 2y - 3x^2 & \text{se } y < x^3. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{x} > y^2 \\ y > x^3 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 < y < \sqrt[4]{x}.$$

Poiché l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^3 < y < \sqrt[4]{x}\}$ è semplicemente connesso, si ha che F è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è $\boxed{\text{U}}$.

Quiz 6. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2} + 3\log(1+xy)$ nel punto $\Big(5, 0, f(5,0)\Big)$ è

$\boxed{P}$ $z = 15x + 2y.$

$\boxed{S}$ $z = 2x.$

$\boxed{T}$ $z = 15y.$

$\boxed{D}$ $z = 2x + 15y.$

$\boxed{I}$ $z = 2x - 15y.$

SVOLGIMENTO

Il dominio di f è $\operatorname{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy > -1\}$. Inoltre f è di classe C^1 in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \ xy > -1\}$. Poiché $(5,0)$ appartiene a questo insieme, il piano tangente al grafico di f in $\Big(5, 0, f(5,0)\Big)$ è dato da

$$z = f(5,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(5,0)(x-5) + \frac{\partial f}{\partial y}(5,0)y.$$

Si ha che

$$f(5,0) = 10, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{3y}{1+xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{3x}{1+xy}.$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(5,0) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(5,0) = 15.$$

Ne segue che il piano tangente è $z = 2x + 15y$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 7. Siano $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $\varphi'(t)\,t + 3\varphi(t) = \frac{1}{2}t$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale $F(x,y,z) = \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)(x,y,z)$, dove $\|(x,y,z)\|$ è la norma di (x,y,z) in $\mathbb{R}^3$, e $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$.

Il flusso uscente di F dal bordo di Ω vale

$\boxed{I}$ $\frac{15}{2}\pi.$

$\boxed{S}$ $\frac{7}{3}\pi^2.$

$\boxed{T}$ $0.$

$\boxed{D}$ $15\pi.$

$\boxed{P}$ $\frac{15}{4}\pi^2.$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Poiché $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza), il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove $\operatorname{div}F$ è la divergenza di F. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$F(x,y,z) = \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)(x,y,z) \quad \Longrightarrow \quad F(x,y,z) = \Big(\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,x,\ \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,y,\ \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,z\Big) \quad \Longrightarrow$$

$$f_1(x,y,z) = \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,x, \quad f_2(x,y,z) = \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,y, \quad f_3(x,y,z) = \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,z.$$

Quindi per la Regola della Catena

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \qquad \operatorname{div}F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) =$$

$$= \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{x^2}{\|(x,y,z)\|} + \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{y^2}{\|(x,y,z)\|} + \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{z^2}{\|(x,y,z)\|} + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big) =$$

essendo $x^2 + y^2 + z^2 = \|(x,y,z)\|^2$ si ottiene

$$= \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\|(x,y,z)\| + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big).$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\,d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_\Omega \Big[\varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\|(x,y,z)\| + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\Big]\,dx\,dy\,dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che $\|(x,y,z)\| = \rho$ e l'integrale diventa

$$= \int_{\Omega'} \Big[\varphi'(\rho)\rho + 3\varphi(\rho)\Big]\rho^2 \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi =$$

con $\Omega' = [1,2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$, ed essendo per ipotesi $\varphi'(t)t + 3\varphi(t) = \frac{1}{2}t$, si ottiene

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega'} \rho^3 \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi =$$

essendo Ω' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ, ϑ, φ e la funzione integranda prodotto di tre funzioni ciascuna in una sola delle variabili, si ottiene

$$= \pi\left(\int_1^2 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta\right) = \pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^2\Big[-\cos\vartheta\Big]_0^\pi = \frac{15}{2}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{I}}$.

Si osserva che una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che verifica la relazione

$$\varphi'(t)t + 3\varphi(t) = \frac{1}{2}t$$

esiste. Infatti, per $t = 0$ deve essere $\varphi(0) = 0$, mentre se $t \neq 0$ la relazione equivale a

$$\varphi'(t) = -\frac{3}{t}\varphi(t) + \frac{1}{2}$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine il cui integrale generale è dato da

$$\varphi(t) = e^{A(t)}\left(\int \frac{1}{2}\,e^{-A(t)}\,dt\right),$$

dove A è una qualunque primitiva di $a(t) = -\frac{3}{t}$. Presa $A(t) = -3\log|t|$ si ha che

$$\varphi(t) = e^{A(t)}\left(\int \frac{1}{2}\,e^{-A(t)}\,dt\right) = e^{-3\log|t|}\left(\frac{1}{2}\int e^{3\log|t|}\,dt\right) = \frac{1}{|t|^3}\left(\frac{1}{2}\int |t|^3\,dt\right) =$$

procedendo per $t > 0$ (analogamente per $t < 0$) si ottiene

$$= \frac{1}{t^3}\left(\frac{1}{8}t^4 + c\right), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Per $c = 0$ si ottiene la funzione $\varphi(t) = \frac{1}{8}t$ che è definita e di classe C^1 su $\mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$ e evidentemente verifica l'uguaglianza.

Quiz 8. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{I}$ Se esiste il gradiente di f in (x_0, y_0), allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

$\boxed{S}$ Se f non è differenziabile in (x_0, y_0), allora f non è continua in (x_0, y_0).

$\boxed{T}$ Se f è continua in (x_0, y_0), allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

$\boxed{D}$ Se esiste il gradiente di f in (x_0, y_0), allora f è continua in (x_0, y_0).

$\boxed{P}$ Se f è differenziabile in (x_0, y_0), allora f è continua in (x_0, y_0).

SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale per funzioni di più variabili, se f è differenziabile in (x_0, y_0), allora f è continua in (x_0, y_0). La risposta corretta è $\boxed{\text{P}}$.

Versione V2

Quiz 1. Siano $p, q \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^q \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] + 5n^3}{2n^p + 5}$

$\boxed{L}$ non converge per ogni $p, q \in \mathbb{R}$.

$\boxed{R}$ converge se e solo se $q > 4$, per ogni $p \in \mathbb{R}$.

$\boxed{I}$ converge se e solo se $p > 4$ e $q > 4$.

$\boxed{D}$ converge se e solo se $p + q > 4$.

$\boxed{E}$ converge se e solo se $p > 4$, per ogni $q \in \mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^q \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] + 5n^3}{2n^p + 5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3}{2n^p + 5}$$

e quindi è a termini positivi.

Poiché

$$\frac{5n^3}{2n^p + 5} \sim \frac{5}{2} \frac{1}{n^{p-3}}, \quad n \to +\infty$$

e poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-3}}$ converge se e solo se $p - 3 > 1$, ovvero per $p > 4$, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge se e solo se $p > 4$, per ogni $q \in \mathbb{R}$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{3}{\pi}(x+\pi)^2 & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ -\frac{3}{\pi}(x-\pi)^2 & \text{se } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$\boxed{D}$ $P_1(x) = -\pi - \frac{12}{\pi}\cos x - \frac{18}{\pi}\sin x.$

$\boxed{I}$ $P_1(x) = -\frac{12}{\pi}\cos x.$

$\boxed{L}$ $P_1(x) = -\pi - \frac{18}{\pi}\sin x.$

$\boxed{R}$ $P_1(x) = -\pi - \frac{12}{\pi}\cos x.$

$\boxed{E}$ $P_1(x) = -\frac{12}{\pi}\cos x - \frac{18}{\pi}\sin x.$

SVOLGIMENTO

La funzione f è periodica di periodo 2π e continua in $[-\pi, \pi]$, quindi integrabile in $[-\pi, \pi]$. Inoltre, essendo g pari, anche f è pari e quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = a_0 + a_1 \cos x,$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx.$$

Per la "parità" di f si ha che

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{3}{\pi}(x-\pi)^2\right]dx = -\frac{3}{\pi^2}\left[\frac{1}{3}(x-\pi)^3\right]_0^{\pi} = -\pi,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{3}{\pi}(x-\pi)^2\,\cos x\right]\,dx = -\frac{6}{\pi^2}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\,\cos x\,dx =$$

integrando per parti

$$= -\frac{6}{\pi^2}\left(\left[(x-\pi)^2\sin x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin x\,dx\right) =$$

integrando nuovamente per parti

$$= \frac{12}{\pi^2}\left(\left[-(x-\pi)\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right) =$$

$$= \frac{12}{\pi^2}\left(-\pi + \left[\sin x\right]_0^{\pi}\right) = -\frac{12}{\pi}.$$

Quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = -\pi - \frac{12}{\pi}\cos x.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{R}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 26,\ \ z\ge 4+\sqrt{x^2+y^2}\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^4 z\,dx\,dy\,dz$ vale

$\boxed{C}$ $\frac{7}{6}\pi$.

$\boxed{L}$ $\frac{64}{495}\pi$.

$\boxed{I}$ $\frac{7}{66}\pi$.

$\boxed{D}$ $\frac{64}{99}\pi$.

$\boxed{R}$ $\frac{7}{33}\pi$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse z si ottiene

$$\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^4 z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'}\rho^9\,z\,d\rho\,d\vartheta\,dz,$$

dove $\Omega'\subseteq\mathbb{R}^3$ è l'insieme Ω scritto in coordinate cilindriche. Si ha che

$$(x,y,z)\in\Omega \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 26\\ z\ge 4+\sqrt{x^2+y^2}\end{cases} \iff \begin{cases}\rho^2+z^2\le 26\\ z\ge 4+\rho\\ \rho\ge 0\\ 0\le\vartheta\le 2\pi\end{cases} \iff \begin{cases} 4+\rho\le z\le\sqrt{26-\rho^2}\\ 0\le\rho\le 1\\ 0\le\vartheta\le 2\pi.\end{cases}$$

Quindi

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\vartheta\le 2\pi,\ \ 4+\rho\le z\le\sqrt{26-\rho^2}\right\}.$$

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ha che

$$\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^4 z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'}\rho^9\,z\,d\rho\,d\vartheta\,dz = 2\pi\int_D \rho^9\,z\,d\rho\,dz =$$

dove $D = \left\{(\rho,z)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le\rho\le 1,\ 4+\rho\le z\le\sqrt{26-\rho^2}\right\}$ che è un insieme z-semplice, e quindi si ottiene

$$= 2\pi\int_0^1\left(\int_{4+\rho}^{\sqrt{26-\rho^2}}\rho^9\,z\,dz\right)d\rho = 2\pi\int_0^1\rho^9\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{4+\rho}^{\sqrt{26-\rho^2}}d\rho = \pi\int_0^1\rho^9\left[26-\rho^2-(4+\rho)^2\right]\,d\rho =$$

$$= \pi\int_0^1\left(10\rho^9-8\rho^{10}-2\rho^{11}\right)\,d\rho = \pi\left[\rho^{10}-\frac{8}{11}\rho^{11}-\frac{1}{6}\rho^{12}\right]_0^1 = \frac{7}{66}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{I}}$.

Quiz 4. L'area della superficie $\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 2\left(y^2 - x^2\right) + 3, \ x^2 + y^2 \le \frac{1}{2} \right\}$ vale

$\boxed{I}$ $\frac{13}{6}\pi$.

$\boxed{L}$ $\frac{13}{12}\pi$.

$\boxed{C}$ $\frac{31}{6}\pi$.

$\boxed{D}$ $\frac{31}{3}\pi$.

$\boxed{R}$ π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 2\left(y^2 - x^2\right) + 3$, dove

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le \frac{1}{2} \right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x, y, 2\left(y^2 - x^2\right) + 3\right)$.

Ne segue che l'area di Σ è data da

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \|N(x,y)\| \, dx \, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ. Un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ è

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1 \right) = (4x, \, -4y, 1) \quad \Longrightarrow \quad \|N(x,y)\| = \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \|N(x,y)\| \, dx \, dy = \int_K \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$$

passando in coordinate polari

$$= \int_{K'} \rho \sqrt{1 + 16\rho^2} \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K' = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho \sqrt{1 + 16\rho^2} \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{48} \left(1 + 16\rho^2\right)^{3/2} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{13}{12}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{L}}$.

Quiz 5. Il campo vettoriale $F(x,y) = \left(2xy - \left|x - y^3\right|, \, 3xy^2 - \left|\sqrt{y} - x^2\right|\right)$ è conservativo sull'insieme

$\boxed{L}$ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^3 < y < \sqrt[4]{x} \right\}$.

$\boxed{I}$ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < \sqrt{y} \right\}$.

$\boxed{C}$ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > y^3 \right\}$.

$\boxed{D}$ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^3 < x < \sqrt[4]{y} \right\}$.

$\boxed{R}$ $\mathbb{R}^2$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\operatorname{dom}(F) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \ge 0 \right\}$. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2x + 3y^2 & \text{se } x > y^3 \\ 2x - 3y^2 & \text{se } x < y^3, \end{cases} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 3y^2 + 2x & \text{se } \sqrt{y} > x^2 \\ 3y^2 - 2x & \text{se } \sqrt{y} < x^2. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x > y^3 \\ \sqrt{y} > x^2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad y^3 < x < \sqrt[4]{y}.$$

Poiché l'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y^3<x<\sqrt[4]{y}\}$ è semplicemente connesso, si ha che F è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 6. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y)=2\sqrt{x^2+y^2}+3\log(1+xy)$ nel punto $\big(0,5,f(0,5)\big)$ è

$\boxed{I}$ $z=15x+2y$.

$\boxed{L}$ $z=15x$.

$\boxed{C}$ $z=2y$.

$\boxed{D}$ $z=2x+15y$.

$\boxed{R}$ $z=15x-2y$.

SVOLGIMENTO

Il dominio di f è $\mathrm{dom}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ xy>-1\}$. Inoltre f è di classe C^1 in $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}:\ xy>-1\}$. Poiché $(0,5)$ appartiene a questo insieme, il piano tangente al grafico di f in $\big(0,5,f(0,5)\big)$ è dato da

$$z=f(0,5)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,5)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,5)(y-5).$$

Si ha che

$$f(0,5)=10,\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{3y}{1+xy},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{3x}{1+xy}.$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,5)=15,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,5)=2.$$

Ne segue che il piano tangente è $z=15x+2y$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{I}}$.

Quiz 7. Siano $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $\varphi'(t)\,t+3\varphi(t)=\frac{1}{3}t$, $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ il campo vettoriale $F(x,y,z)=\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)(x,y,z)$, dove $\|(x,y,z)\|$ è la norma di (x,y,z) in $\mathbb{R}^3$, e $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 9\}$.

Il flusso uscente di F dal bordo di Ω vale

$\boxed{L}$ 0.

$\boxed{I}$ $\frac{52}{9}\pi^2$.

$\boxed{C}$ $\frac{80}{3}\pi$.

$\boxed{D}$ $\frac{40}{3}\pi$.

$\boxed{R}$ $\frac{20}{9}\pi^2$.

SVOLGIMENTO

Poiché φ è di classe C^1 in $\mathbb{R}$, il campo vettoriale F è di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss (o della divergenza), il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega}F\cdot n\,d\sigma=\int_\Omega \mathrm{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

dove $\mathrm{div}F$ è la divergenza di F. Posto $F=(f_1,f_2,f_3)$, si ha che

$$F(x,y,z)=\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)(x,y,z)\quad\Longrightarrow\quad F(x,y,z)=\Big(\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)x,\ \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)y,\ \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)z\Big)\quad\Longrightarrow$$

$$f_1(x,y,z)=\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)x,\quad f_2(x,y,z)=\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)y,\quad f_3(x,y,z)=\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)z.$$

Quindi per la Regola della Catena

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \qquad \mathrm{div}F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) =$$

$$= \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{x^2}{\|(x,y,z)\|} + \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{y^2}{\|(x,y,z)\|} + \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{z^2}{\|(x,y,z)\|} + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big) =$$

essendo $x^2 + y^2 + z^2 = \|(x,y,z)\|^2$ si ottiene

$$= \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\|(x,y,z)\| + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big).$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega} \Big[\varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\|(x,y,z)\| + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\Big]\, dx\, dy\, dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che $\|(x,y,z)\| = \rho$ e l'integrale diventa

$$= \int_{\Omega'} \Big[\varphi'(\rho)\rho + 3\varphi(\rho)\Big]\rho^2 \sin\vartheta \, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

con $\Omega' = [1,3] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$, ed essendo per ipotesi $\varphi'(t)t + 3\varphi(t) = \frac{1}{3}t$, si ottiene

$$= \frac{1}{3}\int_{\Omega'} \rho^3 \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

essendo Ω' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ, ϑ, φ e la funzione integranda prodotto di tre funzioni ciascuna in una sola delle variabili, si ottiene

$$= \frac{2}{3}\pi \left(\int_1^3 \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta\right) = \frac{2}{3}\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^3 \Big[-\cos\vartheta\Big]_0^\pi = \frac{80}{3}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Si osserva che una funzione $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che verifica la relazione

$$\varphi'(t)t + 3\varphi(t) = \frac{1}{3}t$$

esiste. Infatti, per $t = 0$ deve essere $\varphi(0) = 0$, mentre se $t \neq 0$ la relazione equivale a

$$\varphi'(t) = -\frac{3}{t}\varphi(t) + \frac{1}{3}$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine il cui integrale generale è dato da

$$\varphi(t) = e^{A(t)}\left(\int \frac{1}{3}e^{-A(t)}\, dt\right),$$

dove A è una qualunque primitiva di $a(t) = -\frac{3}{t}$. Presa $A(t) = -3\log|t|$ si ha che

$$\varphi(t) = e^{A(t)}\left(\int \frac{1}{3}e^{-A(t)}\, dt\right) = e^{-3\log|t|}\left(\frac{1}{3}\int e^{3\log|t|}\, dt\right) = \frac{1}{|t|^3}\left(\frac{1}{3}\int |t|^3\, dt\right) =$$

procedendo per $t > 0$ (analogamente per $t < 0$) si ottiene

$$= \frac{1}{t^3}\left(\frac{1}{12}t^4 + c\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Per $c = 0$ si ottiene la funzione $\varphi(t) = \frac{1}{12}t$ che è definita e di classe C^1 su $\mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$ e evidentemente verifica l'uguaglianza.

Quiz 8. Siano $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{R}$ Se esiste il gradiente di f in (x_0, y_0), allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

$\boxed{L}$ Se f non è differenziabile in (x_0, y_0), allora f non è continua in (x_0, y_0).

$\boxed{C}$ Se f è continua in (x_0, y_0), allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

$\boxed{D}$ Se esiste il gradiente di f in (x_0, y_0), allora f è continua in (x_0, y_0).

$\boxed{I}$ Se f non è continua in (x_0, y_0), allora f non è differenziabile in (x_0, y_0).

SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale per funzioni di più variabili, se f non è continua in (x_0, y_0), allora f non è differenziabile in (x_0, y_0). La risposta corretta è $\boxed{\text{I}}$.

Versione V3

Quiz 1. Siano $p, q \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin(n\pi) + 9n^q}{5n^4+2}$

$\boxed{E}$ non converge per ogni $p, q \in \mathbb{R}$.

$\boxed{P}$ converge se e solo se $p < 3$, per ogni $q \in \mathbb{R}$.

$\boxed{R}$ converge se e solo se $p < 3$ e $q < 3$.

$\boxed{T}$ converge se e solo se $p + q < 3$.

$\boxed{O}$ converge se e solo se $q < 3$, per ogni $p \in \mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\sin(n\pi) = 0$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin(n\pi) + 9n^q}{5n^4+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^q}{5n^4+2}$$

e quindi è a termini positivi.

Poiché

$$\frac{9n^q}{5n^4+2} \sim \frac{9}{5}\frac{1}{n^{4-q}}, \qquad n \to +\infty$$

e poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4-q}}$ converge se e solo se $4-q > 1$, ovvero per $q < 3$, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge se e solo se $q < 3$, per ogni $p \in \mathbb{R}$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{O}}$.

Quiz 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}(x+\pi)^2 & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{4}{\pi}(x-\pi)^2 & \text{se } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$\boxed{R}$ $P_1(x) = \dfrac{4}{3}\pi + \dfrac{16}{\pi}\cos x + \dfrac{24}{\pi}\sin x.$

$\boxed{O}$ $P_1(x) = \dfrac{16}{\pi}\cos x.$

$\boxed{P}$ $P_1(x) = \dfrac{4}{3}\pi + \dfrac{24}{\pi}\sin x.$

$\boxed{T}$ $P_1(x) = \dfrac{4}{3}\pi + \dfrac{16}{\pi}\cos x.$

$\boxed{E}$ $P_1(x) = \dfrac{16}{\pi}\cos x + \dfrac{24}{\pi}\sin x.$

SVOLGIMENTO

La funzione f è periodica di periodo 2π e continua in $[-\pi, \pi]$, quindi integrabile in $[-\pi, \pi]$. Inoltre, essendo g pari, anche f è pari e quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = a_0 + a_1 \cos x,$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \qquad a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\, dx.$$

Per la "parità" di f si ha che

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{4}{\pi}(x-\pi)^2\, dx = \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{1}{3}(x-\pi)^3\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{4}{\pi}(x-\pi)^2\,\cos x\,dx = \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\,\cos x\,dx =$$

integrando per parti

$$= \frac{8}{\pi^2}\left(\left[(x-\pi)^2\sin x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin x\,dx\right) =$$

integrando nuovamente per parti

$$= -\frac{16}{\pi^2}\left(\left[-(x-\pi)\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right) =$$

$$= -\frac{16}{\pi^2}\left(-\pi + \left[\sin x\right]_0^{\pi}\right) = \frac{16}{\pi}.$$

Quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = \frac{4}{3}\pi + \frac{16}{\pi}\cos x.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{T}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 10,\ \ z\ge 2+\sqrt{x^2+y^2}\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^5 z\,dx\,dy\,dz$ vale

$\boxed{O}$ $\dfrac{58}{143}\pi$.

$\boxed{T}$ $\dfrac{9}{182}\pi$.

$\boxed{P}$ $\dfrac{9}{13}\pi$.

$\boxed{R}$ $\dfrac{9}{14}\pi$.

$\boxed{E}$ $\dfrac{7}{13}\pi$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse z si ottiene

$$\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^5 z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'}\rho^{11}\,z\,d\rho\,d\vartheta\,dz,$$

dove $\Omega'\subseteq\mathbb{R}^3$ è l'insieme Ω scritto in coordinate cilindriche. Si ha che

$$(x,y,z)\in\Omega \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 10\\ z\ge 2+\sqrt{x^2+y^2}\end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}\rho^2+z^2\le 10\\ z\ge 2+\rho\\ \rho\ge 0\\ 0\le\vartheta\le 2\pi\end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 2+\rho\le z\le\sqrt{10-\rho^2}\\ 0\le\rho\le 1\\ 0\le\vartheta\le 2\pi.\end{cases}$$

Quindi

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\vartheta\le 2\pi,\ 2+\rho\le z\le\sqrt{10-\rho^2}\right\}.$$

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ha che

$$\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^5 z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'}\rho^{11}\,z\,d\rho\,d\vartheta\,dz = 2\pi\int_D \rho^{11}\,z\,d\rho\,dz =$$

dove $D = \left\{(\rho,z)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le\rho\le 1,\ 2+\rho\le z\le\sqrt{10-\rho^2}\right\}$ che è un insieme z-semplice, e quindi si ottiene

$$= 2\pi\int_0^1\left(\int_{2+\rho}^{\sqrt{10-\rho^2}}\rho^{11}\,z\,dz\right)d\rho = 2\pi\int_0^1\rho^{11}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{2+\rho}^{\sqrt{10-\rho^2}}d\rho = \pi\int_0^1\rho^{11}\left[10-\rho^2-(2+\rho)^2\right]d\rho =$$

$$= \pi\int_0^1\left(6\rho^{11}-4\rho^{12}-2\rho^{13}\right)d\rho = \pi\left[\frac{1}{2}\rho^{12}-\frac{4}{13}\rho^{13}-\frac{1}{7}\rho^{14}\right]_0^1 = \frac{9}{182}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{T}}$.

Quiz 4. L'area della superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 2\left(x^2 - y^2\right) + 7, \ x^2 + y^2 \le \frac{3}{2}\right\}$ vale

$\boxed{O}$ $\frac{31}{6}\pi$.

$\boxed{P}$ $\frac{13}{6}\pi$.

$\boxed{R}$ $\frac{13}{12}\pi$.

$\boxed{T}$ $\frac{31}{3}\pi$.

$\boxed{E}$ π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 2\left(x^2 - y^2\right) + 7$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le \frac{3}{2}\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,2\left(x^2-y^2\right)+7\right)$.

Ne segue che l'area di Σ è data da

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ. Un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ è

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = (-4x,\ 4y, 1) \quad \Longrightarrow \quad \|N(x,y)\| = \sqrt{1 + 16(x^2+y^2)}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \|N(x,y)\|\, dx\, dy = \int_K \sqrt{1+16(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

passando in coordinate polari

$$= \int_{K'} \rho\sqrt{1+16\rho^2}\, d\rho\, d\vartheta =$$

essendo $K' = \left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \rho\sqrt{1+16\rho^2}\, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{48}\left(1+16\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{31}{6}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{O}}$.

Quiz 5. Il campo vettoriale $F(x,y) = \left(\left|y^2 - \sqrt{x}\right| - 3x^2 y,\ \left|x^3 - y\right| - 2xy\right)$ è conservativo sull'insieme

$\boxed{N}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x^3\right\}$.

$\boxed{R}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < \sqrt{x}\right\}$.

$\boxed{P}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^3 < y < \sqrt[4]{x}\right\}$.

$\boxed{D}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^3 < x < \sqrt[4]{y}\right\}$.

$\boxed{E}$ $\mathbb{R}^2$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\operatorname{dom}(F) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \ge 0\right\}$. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y - 3x^2 & \text{se } y^2 > \sqrt{x} \\ -2y - 3x^2 & \text{se } y^2 < \sqrt{x}, \end{cases} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 3x^2 - 2y & \text{se } x^3 > y \\ -3x^2 - 2y & \text{se } x^3 < y. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 < \sqrt{x} \\ x^3 < y \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 < y < \sqrt[4]{x}.$$

Poiché l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^3 < y < \sqrt[4]{x}\}$ è semplicemente connesso, si ha che F è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è $\boxed{\text{P}}$.

Quiz 6. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = 4\sqrt{x^2+y^2} + 5\log(1+xy)$ nel punto $\big(2,0,f(2,0)\big)$ è

$\boxed{D}$ $z = 10x + 4y$.

$\boxed{N}$ $z = 4x$.

$\boxed{P}$ $z = 10y$.

$\boxed{R}$ $z = 4x + 10y$.

$\boxed{E}$ $z = 4x - 10y$.

SVOLGIMENTO

Il dominio di f è $\text{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy > -1\}$. Inoltre f è di classe C^1 in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \ xy > -1\}$. Poiché $(2,0)$ appartiene a questo insieme, il piano tangente al grafico di f in $\big(2,0,f(2,0)\big)$ è dato da

$$z = f(2,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,0)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)y.$$

Si ha che

$$f(2,0) = 8, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{5y}{1+xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{5x}{1+xy}.$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 10.$$

Ne segue che il piano tangente è $z = 4x + 10y$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{R}}$.

Quiz 7. Siano $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $\varphi'(t)\,t + 3\varphi(t) = -\frac{1}{2}t$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale $F(x,y,z) = \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)(x,y,z)$, dove $\|(x,y,z)\|$ è la norma di (x,y,z) in $\mathbb{R}^3$, e $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$.

Il flusso uscente di F dal bordo di Ω vale

$\boxed{R}$ $-\frac{15}{4}\pi^2$.

$\boxed{N}$ $-\frac{7}{3}\pi^2$.

$\boxed{P}$ 0.

$\boxed{D}$ -15π.

$\boxed{E}$ $-\frac{15}{2}\pi$.

SVOLGIMENTO

Poiché φ è di classe C^1 in $\mathbb{R}$, il campo vettoriale F è di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss (o della divergenza), il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove $\text{div}F$ è la divergenza di F. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$F(x,y,z) = \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)(x,y,z) \quad \Longrightarrow \quad F(x,y,z) = \Big(\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,x,\ \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,y,\ \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,z\Big) \quad \Longrightarrow$$

$$f_1(x,y,z) = \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,x, \quad f_2(x,y,z) = \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,y, \quad f_3(x,y,z) = \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,z.$$

Quindi per la Regola della Catena

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \qquad \text{div}F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) =$$

$$= \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{x^2}{\|(x,y,z)\|} + \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{y^2}{\|(x,y,z)\|} + \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{z^2}{\|(x,y,z)\|} + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big) =$$

essendo $x^2+y^2+z^2 = \|(x,y,z)\|^2$ si ottiene

$$= \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\|(x,y,z)\| + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big).$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\,d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_\Omega \Big[\varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\|(x,y,z)\| + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\Big]\,dx\,dy\,dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che $\|(x,y,z)\| = \rho$ e l'integrale diventa

$$= \int_{\Omega'} \Big[\varphi'(\rho)\rho + 3\varphi(\rho)\Big]\rho^2\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi =$$

con $\Omega' = [1,2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$, ed essendo per ipotesi $\varphi'(t)t + 3\varphi(t) = -\frac{1}{2}t$, si ottiene

$$= -\frac{1}{2}\int_{\Omega'} \rho^3\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi =$$

essendo Ω' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ, ϑ, φ e la funzione integranda prodotto di tre funzioni ciascuna in una sola delle variabili, si ottiene

$$= -\pi\left(\int_1^2 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta\right) = -\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^2\Big[-\cos\vartheta\Big]_0^\pi = -\frac{15}{2}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Si osserva che una funzione $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ che verifica la relazione

$$\varphi'(t)t + 3\varphi(t) = -\frac{1}{2}t$$

esiste. Infatti, per $t=0$ deve essere $\varphi(0)=0$, mentre se $t\neq 0$ la relazione equivale a

$$\varphi'(t) = -\frac{3}{t}\varphi(t) - \frac{1}{2}$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine il cui integrale generale è dato da

$$\varphi(t) = e^{A(t)}\left(\int\left(-\frac{1}{2}\,e^{-A(t)}\right)\,dt\right),$$

dove A è una qualunque primitiva di $a(t) = -\frac{3}{t}$. Presa $A(t) = -3\log|t|$ si ha che

$$\varphi(t) = e^{A(t)}\left(\int\left(-\frac{1}{2}\,e^{-A(t)}\right)\,dt\right) = e^{-3\log|t|}\left(-\frac{1}{2}\int e^{3\log|t|}\,dt\right) = \frac{1}{|t|^3}\left(-\frac{1}{2}\int|t|^3\,dt\right) =$$

procedendo per $t>0$ (analogamente per $t<0$) si ottiene

$$= \frac{1}{t^3}\left(-\frac{1}{8}t^4 + c\right), \quad c\in\mathbb{R}.$$

Per $c=0$ si ottiene la funzione $\varphi(t) = -\frac{1}{8}t$ che è definita e di classe C^1 su $\mathbb{R}$, $\varphi(0)=0$ e evidentemente verifica l'uguaglianza.

Quiz 8. Siano $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione e $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{N}$ Se f è differenziabile in (x_0,y_0), allora f è continua in (x_0,y_0).

$\boxed{P}$ Se f non è differenziabile in (x_0,y_0), allora f non è continua in (x_0,y_0).

$\boxed{R}$ Se f è continua in (x_0,y_0), allora f è differenziabile in (x_0,y_0).

$\boxed{D}$ Se esiste il gradiente di f in (x_0,y_0), allora f è continua in (x_0,y_0).

$\boxed{E}$ Se esiste il gradiente di f in (x_0,y_0), allora f è differenziabile in (x_0,y_0).

SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale per funzioni di più variabili, se f è differenziabile in (x_0,y_0), allora f è continua in (x_0,y_0). La risposta corretta è $\boxed{\text{N}}$.

Versione V4

Quiz 1. Siano $p, q \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] + 6n^4}{3n^q + 2}$

$\boxed{N}$ converge se e solo se $p + q > 5$.

$\boxed{I}$ converge se e solo se $p > 5$, per ogni $q \in \mathbb{R}$.

$\boxed{M}$ converge se e solo se $p > 5$ e $q > 5$.

$\boxed{D}$ converge se e solo se $q > 5$, per ogni $p \in \mathbb{R}$.

$\boxed{E}$ non converge per ogni $p, q \in \mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] + 6n^4}{3n^q + 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^4}{3n^q + 2}$$

e quindi è a termini positivi.

Poiché

$$\frac{6n^4}{3n^q + 2} \sim \frac{2}{n^{q-4}}, \qquad n \to +\infty$$

e poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q-4}}$ converge se e solo se $q - 4 > 1$, ovvero per $q > 5$, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge se e solo se $q > 5$, per ogni $p \in \mathbb{R}$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{5}{\pi}(x+\pi)^2 & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ -\dfrac{5}{\pi}(x-\pi)^2 & \text{se } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$\boxed{I}$ $P_1(x) = -\frac{5}{3}\pi - \frac{20}{\pi}\cos x$.

$\boxed{M}$ $P_1(x) = -\frac{20}{\pi}\cos x$.

$\boxed{N}$ $P_1(x) = -\frac{5}{3}\pi - \frac{30}{\pi}\sin x$.

$\boxed{D}$ $P_1(x) = -\frac{5}{3}\pi - \frac{20}{\pi}\cos x - \frac{30}{\pi}\sin x$.

$\boxed{E}$ $P_1(x) = -\frac{20}{\pi}\cos x - \frac{30}{\pi}\sin x$.

SVOLGIMENTO

La funzione f è periodica di periodo 2π e continua in $[-\pi, \pi]$, quindi integrabile in $[-\pi, \pi]$. Inoltre, essendo g pari, anche f è pari e quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = a_0 + a_1 \cos x,$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx.$$

Per la "parità" di f si ha che

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{5}{\pi}(x-\pi)^2\right]dx = -\frac{5}{\pi^2}\left[\frac{1}{3}(x-\pi)^3\right]_0^{\pi} = -\frac{5}{3}\pi,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{5}{\pi}(x-\pi)^2\,\cos x\right]\,dx = -\frac{10}{\pi^2}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\,\cos x\,dx =$$

integrando per parti

$$= -\frac{10}{\pi^2}\left(\left[(x-\pi)^2\sin x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin x\,dx\right) =$$

integrando nuovamente per parti

$$= \frac{20}{\pi^2}\left(\left[-(x-\pi)\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right) =$$

$$= \frac{20}{\pi^2}\left(-\pi + \left[\sin x\right]_0^{\pi}\right) = -\frac{20}{\pi}.$$

Quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = -\frac{5}{3}\pi - \frac{20}{\pi}\cos x.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{I}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 26,\ \ z\ge 4+\sqrt{x^2+y^2}\right\}$. L'integrale $\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^5 z\,dx\,dy\,dz$ vale

$\boxed{M}$ $\frac{41}{78}\pi$.

$\boxed{I}$ $\frac{71}{429}\pi$.

$\boxed{N}$ $\frac{41}{42}\pi$.

$\boxed{D}$ $\frac{41}{546}\pi$.

$\boxed{E}$ $\frac{41}{99}\pi$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse z si ottiene

$$\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^5 z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho^{11}\,z\,d\rho\,d\vartheta\,dz,$$

dove $\Omega'\subseteq\mathbb{R}^3$ è l'insieme Ω scritto in coordinate cilindriche. Si ha che

$$(x,y,z)\in\Omega \quad\iff\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 26\\ z\ge 4+\sqrt{x^2+y^2}\end{cases} \quad\iff\quad \begin{cases}\rho^2+z^2\le 26\\ z\ge 4+\rho\\ \rho\ge 0\\ 0\le\vartheta\le 2\pi\end{cases} \quad\iff\quad \begin{cases} 4+\rho\le z\le\sqrt{26-\rho^2}\\ 0\le\rho\le 1\\ 0\le\vartheta\le 2\pi.\end{cases}$$

Quindi

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\vartheta\le 2\pi,\ \ 4+\rho\le z\le\sqrt{26-\rho^2}\right\}.$$

Integrando prima per fili paralleli all'asse ϑ si ha che

$$\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)^5 z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'}\rho^{11}\,z\,d\rho\,d\vartheta\,dz = 2\pi\int_D \rho^{11}\,z\,d\rho\,dz =$$

dove $D = \left\{(\rho,z)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le\rho\le 1,\ 4+\rho\le z\le\sqrt{26-\rho^2}\right\}$ che è un insieme z-semplice, e quindi si ottiene

$$= 2\pi\int_0^1\left(\int_{4+\rho}^{\sqrt{26-\rho^2}}\rho^{11}\,z\,dz\right)d\rho = 2\pi\int_0^1\rho^{11}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{4+\rho}^{\sqrt{26-\rho^2}}d\rho = \pi\int_0^1\rho^{11}\left[26-\rho^2-(4+\rho)^2\right]\,d\rho =$$

$$= \pi\int_0^1\left(10\rho^{11}-8\rho^{12}-2\rho^{13}\right)\,d\rho = \pi\left[\frac{5}{6}\rho^{12}-\frac{8}{13}\rho^{13}-\frac{1}{7}\rho^{14}\right]_0^1 = \frac{41}{546}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Quiz 4. L'area della superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=\sqrt{2}\left(y^2-x^2\right)+9,\ \ x^2+y^2\le 3\right\}$ vale

$\boxed{M}$ $\frac{13}{6}\pi$.

$\boxed{I}$ $\frac{31}{3}\pi$.

$\boxed{N}$ $\frac{31}{6}\pi$.

$\boxed{D}$ $\frac{13}{12}\pi$.

$\boxed{E}$ π.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \sqrt{2}\left(y^2 - x^2\right) + 9$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 3\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, \sqrt{2}\left(y^2 - x^2\right) + 9\right)$.

Ne segue che l'area di Σ è data da

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \|N(x,y)\| \, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ. Un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ è

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(2\sqrt{2}x, \; -2\sqrt{2}y, 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \|N(x,y)\| = \sqrt{1 + 8(x^2 + y^2)}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \|N(x,y)\| \, dx\, dy = \int_K \sqrt{1 + 8(x^2 + y^2)} \, dx\, dy$$

passando in coordinate polari

$$= \int_{K'} \rho \sqrt{1 + 8\rho^2} \, d\rho\, d\vartheta =$$

essendo $K' = \left[0, \sqrt{3}\right] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \sqrt{1 + 8\rho^2} \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{24}\left(1 + 8\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{31}{3}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{I}}$.

Quiz 5. Il campo vettoriale $F(x,y) = \left(\left|y^3 - x\right| - 2xy, \; \left|x^2 - \sqrt{y}\right| - 3xy^2\right)$ è conservativo sull'insieme

$\boxed{M}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^3 < x < \sqrt[4]{y}\right\}$.

$\boxed{O}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x < \sqrt{y}\right\}$.

$\boxed{N}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > y^3\right\}$.

$\boxed{D}$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^3 < y < \sqrt[4]{x}\right\}$.

$\boxed{E}$ $\mathbb{R}^2$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $\operatorname{dom}(F) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq 0\right\}$. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 3y^2 - 2x & \text{se } y^3 > x \\ -3y^2 - 2x & \text{se } y^3 < x, \end{cases} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x - 3y^2 & \text{se } x^2 > \sqrt{y} \\ -2x - 3y^2 & \text{se } x^2 < \sqrt{y}. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y^3 < x \\ x^2 < \sqrt{y} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad y^3 < x < \sqrt[4]{y}.$$

Poiché l'insieme $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^3 < x < \sqrt[4]{y}\right\}$ è semplicemente connesso, si ha che F è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è $\boxed{\text{M}}$.

Quiz 6. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y)=4\sqrt{x^2+y^2}+5\log(1+xy)$ nel punto $\Big(0,2,f(0,2)\Big)$ è

$\boxed{O}$ $z=10x-4y$.

$\boxed{M}$ $z=10x$.

$\boxed{N}$ $z=4y$.

$\boxed{D}$ $z=4x+10y$.

$\boxed{E}$ $z=10x+4y$.

SVOLGIMENTO

Il dominio di f è $\mathrm{dom}(f)=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ xy>-1\big\}$. Inoltre f è di classe C^1 in $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}:\ xy>-1\big\}$. Poiché $(0,2)$ appartiene a questo insieme, il piano tangente al grafico di f in $\Big(0,2,f(0,2)\Big)$ è dato da

$$z=f(0,2)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)(y-2).$$

Si ha che

$$f(0,2)=8,\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{5y}{1+xy},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{5x}{1+xy}.$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)=10,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)=4.$$

Ne segue che il piano tangente è $z=10x+4y$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 7. Siano $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $\varphi'(t)\,t+3\varphi(t)=-\frac{1}{3}t$, $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ il campo vettoriale $F(x,y,z)=\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)(x,y,z)$, dove $\|(x,y,z)\|$ è la norma di (x,y,z) in $\mathbb{R}^3$, e $\Omega=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 9\big\}$.

Il flusso uscente di F dal bordo di Ω vale

$\boxed{O}$ 0.

$\boxed{M}$ $-\frac{52}{9}\pi^2$.

$\boxed{N}$ $-\frac{80}{3}\pi$.

$\boxed{D}$ $-\frac{40}{3}\pi$.

$\boxed{E}$ $-\frac{20}{9}\pi^2$.

SVOLGIMENTO

Poiché φ è di classe C^1 in $\mathbb{R}$, il campo vettoriale F è di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss (o della divergenza), il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega}F\cdot n\,d\sigma=\int_\Omega \mathrm{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

dove $\mathrm{div}F$ è la divergenza di F. Posto $F=(f_1,f_2,f_3)$, si ha che

$$F(x,y,z)=\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)(x,y,z)\quad\Longrightarrow\quad F(x,y,z)=\Big(\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,x,\ \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,y,\ \varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,z\Big)\quad\Longrightarrow$$

$$f_1(x,y,z)=\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,x,\quad f_2(x,y,z)=\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,y,\quad f_3(x,y,z)=\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,z.$$

Quindi per la Regola della Catena

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\qquad \mathrm{div}F(x,y,z)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)=$$

$$= \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{x^2}{\|(x,y,z)\|} + \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{y^2}{\|(x,y,z)\|} + \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\frac{z^2}{\|(x,y,z)\|} + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big) =$$

essendo $x^2+y^2+z^2 = \|(x,y,z)\|^2$ si ottiene

$$= \varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\|(x,y,z)\| + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big).$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\, d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_\Omega \Big[\varphi'\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\,\|(x,y,z)\| + 3\varphi\Big(\|(x,y,z)\|\Big)\Big]\,dx\,dy\,dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ha che $\|(x,y,z)\| = \rho$ e l'integrale diventa

$$= \int_{\Omega'} \Big[\varphi'(\rho)\rho + 3\varphi(\rho)\Big]\rho^2 \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

con $\Omega' = [1,3]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$, ed essendo per ipotesi $\varphi'(t)t + 3\varphi(t) = -\frac{1}{3}t$, si ottiene

$$= -\frac{1}{3}\int_{\Omega'} \rho^3 \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

essendo Ω' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ, ϑ, φ e la funzione integranda prodotto di tre funzioni ciascuna in una sola delle variabili, si ottiene

$$= -\frac{2}{3}\pi\left(\int_1^3 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta\right) = -\frac{2}{3}\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^3\Big[-\cos\vartheta\Big]_0^\pi = -\frac{80}{3}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{N}}$.

Si osserva che una funzione $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ che verifica la relazione

$$\varphi'(t)t + 3\varphi(t) = -\frac{1}{3}t$$

esiste. Infatti, per $t=0$ deve essere $\varphi(0)=0$, mentre se $t\neq 0$ la relazione equivale a

$$\varphi'(t) = -\frac{3}{t}\varphi(t) - \frac{1}{3}$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine il cui integrale generale è dato da

$$\varphi(t) = e^{A(t)}\left(\int\left[-\frac{1}{3}\,e^{-A(t)}\right]dt\right),$$

dove A è una qualunque primitiva di $a(t) = -\frac{3}{t}$. Presa $A(t) = -3\log|t|$ si ha che

$$\varphi(t) = e^{A(t)}\left(\int\left[-\frac{1}{3}\,e^{-A(t)}\right]dt\right) = e^{-3\log|t|}\left(-\frac{1}{3}\int e^{3\log|t|}\,dt\right) = \frac{1}{|t|^3}\left(-\frac{1}{3}\int|t|^3\,dt\right) =$$

procedendo per $t>0$ (analogamente per $t<0$) si ottiene

$$= \frac{1}{t^3}\left(-\frac{1}{12}t^4 + c\right), \quad c\in\mathbb{R}.$$

Per $c=0$ si ottiene la funzione $\varphi(t) = -\frac{1}{12}t$ che è definita e di classe C^1 su $\mathbb{R}$, $\varphi(0)=0$ e evidentemente verifica l'uguaglianza.

Quiz 8. Siano $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione e $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{N}$ Se f è continua in (x_0,y_0), allora f è differenziabile in (x_0,y_0).

$\boxed{M}$ Se f non è differenziabile in (x_0,y_0), allora f non è continua in (x_0,y_0).

$\boxed{O}$ Se f non è continua in (x_0,y_0), allora f non è differenziabile in (x_0,y_0).

$\boxed{D}$ Se esiste il gradiente di f in (x_0,y_0), allora f è continua in (x_0,y_0).

$\boxed{E}$ Se esiste il gradiente di f in (x_0,y_0), allora f è differenziabile in (x_0,y_0).

SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale per funzioni di più variabili, se f non è continua in (x_0,y_0), allora f non è differenziabile in (x_0,y_0). La risposta corretta è $\boxed{\text{O}}$.
