

ESAME ONLINE

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V1	S	E	S	T	U	D	I	P

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare $\int_{\Omega} \frac{2x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} - 2 \leq x \leq 4 - 2\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 \geq 1 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse x si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{2x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz = \int_{\Omega'} 2x d\rho d\vartheta dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : \rho - 2 \leq x \leq 4 - 2\rho, \rho \geq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$.

Imponendo la condizione $\rho - 2 \leq 4 - 2\rho$ si ottiene $\rho \leq 2$ e quindi risulta che

$$\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : \rho - 2 \leq x \leq 4 - 2\rho, 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}.$$

Integrando prima nella variabile ϑ si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{2x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz &= \int_{\Omega'} 2x d\rho d\vartheta dx = 4\pi \int_1^2 \left(\int_{\rho-2}^{4-2\rho} x dx \right) d\rho = \\ &= 4\pi \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\rho-2}^{4-2\rho} d\rho = 2\pi \int_1^2 [(4-2\rho)^2 - (\rho-2)^2] d\rho = 2\pi \int_1^2 3(\rho-2)^2 d\rho = \\ &= 2\pi \left[(\rho-2)^3 \right]_1^2 = 2\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V2	E	R	I	M	P	A	R	A

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare $\int_{\Omega} \frac{3y}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + z^2} - 2 \leq y \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + z^2}, \ x^2 + z^2 \geq 1 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse x si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{3y}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz = \int_{\Omega'} 3y d\rho d\vartheta dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : \rho - 2 \leq y \leq 4 - 2\rho, \ \rho \geq 1, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$.

Imponendo la condizione $\rho - 2 \leq 4 - 2\rho$ si ottiene $\rho \leq 2$ e quindi risulta che

$$\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : \rho - 2 \leq y \leq 4 - 2\rho, \ 1 \leq \rho \leq 2, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}.$$

Integrando prima nella variabile ϑ si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{3y}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz &= \int_{\Omega'} 3y d\rho d\vartheta dy = 6\pi \int_1^2 \left(\int_{\rho-2}^{4-2\rho} y dy \right) d\rho = \\ &= 6\pi \int_1^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\rho-2}^{4-2\rho} d\rho = 3\pi \int_1^2 [(4-2\rho)^2 - (\rho-2)^2] d\rho = 3\pi \int_1^2 3(\rho-2)^2 d\rho = \\ &= 3\pi \left[(\rho-2)^3 \right]_1^2 = 3\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V3	R	E	S	U	P	E	R	I

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare $\int_{\Omega} \frac{4x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{y^2 + z^2} - 4 \leq x \leq 2 - \sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 \geq 1 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse x si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{4x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz = \int_{\Omega'} 4x d\rho d\vartheta dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 2\rho - 4 \leq x \leq 2 - \rho, \rho \geq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$.

Imponendo la condizione $2\rho - 4 \leq 2 - \rho$ si ottiene $\rho \leq 2$ e quindi risulta che

$$\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 2\rho - 4 \leq x \leq 2 - \rho, 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}.$$

Integrando prima nella variabile ϑ si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{4x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz &= \int_{\Omega'} 4x d\rho d\vartheta dx = 8\pi \int_1^2 \left(\int_{2\rho-4}^{2-\rho} x dx \right) d\rho = \\ &= 8\pi \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{2\rho-4}^{2-\rho} d\rho = 4\pi \int_1^2 [(2-\rho)^2 - (2\rho-4)^2] d\rho = -4\pi \int_1^2 3(\rho-2)^2 d\rho = \\ &= -4\pi \left[(\rho-2)^3 \right]_1^2 = -4\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V4	L'	E	S	A	M	E	O	K

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare $\int_{\Omega} \frac{5y}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2 + z^2} - 4 \leq y \leq 2 - \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 \geq 1 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse y si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{5y}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz = \int_{\Omega'} 5y d\rho d\vartheta dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 2\rho - 4 \leq y \leq 2 - \rho, \rho \geq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$.

Imponendo la condizione $2\rho - 4 \leq 2 - \rho$ si ottiene $\rho \leq 2$ e quindi risulta che

$$\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 2\rho - 4 \leq y \leq 2 - \rho, 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}.$$

Integrando prima nella variabile ϑ si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{5y}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx dy dz &= \int_{\Omega'} 5y d\rho d\vartheta dy = 10\pi \int_1^2 \left(\int_{2\rho-4}^{2-\rho} y dy \right) d\rho = \\ &= 10\pi \int_1^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{2\rho-4}^{2-\rho} d\rho = 5\pi \int_1^2 [(2-\rho)^2 - (2\rho-4)^2] d\rho = -5\pi \int_1^2 3(\rho-2)^2 d\rho = \\ &= -5\pi \left[(\rho-2)^3 \right]_1^2 = -5\pi. \end{aligned}$$
