

Quiz 1. La serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n}$

☐ *D* converge a $\frac{5}{5-\pi}$.

☐ *E* converge a $\frac{25}{25-\pi^2}$.

☐ *S* converge a $\frac{\pi^4}{25(25-\pi^2)}$.

☐ *T* converge a $\frac{\pi^2}{5(5-\pi)}$.

☐ *U* diverge positivamente.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{25}\right)^n.$$

Quindi è una serie geometrica di ragione $a = \pi^2/25$. Poiché $|a| < 1$, questa serie converge. In particolare, se $|a| < 1$, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{25}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{25}\right)^n - \left[\left(\frac{\pi^2}{25}\right)^0 + \left(\frac{\pi^2}{25}\right)^1 \right] = \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{25}} - \left(1 + \frac{\pi^2}{25}\right) = \frac{\pi^4}{25(25 - \pi^2)}.$$

La risposta corretta è ☒ *S*.

Quiz 2. Sia $k > 0$ tale che $k^2 > 8$. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{n/3} + 2^{n/2}}{3^n} (x-1)^n$ è

☐ *U* 0.

☐ *D* $\frac{k^{1/3}}{3}$.

☐ *S* $\frac{3}{2^{1/2}}$.

☐ *T* $\frac{2^{1/2}}{3}$.

☐ *E* $\frac{3}{k^{1/3}}$.

SVOLGIMENTO

È una serie di potenze centrata in $x_0 = 1$. Posto $t = x - 1$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{n/3} + 2^{n/2}}{3^n} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{n/3} + 2^{n/2}}{3^n} t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0. Posto $a_n = (-1)^n \frac{k^{n/3} + 2^{n/2}}{3^n}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{k^{n/3} + 2^{n/2}}{3^n}\right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{k^{n/3} + 2^{n/2}}{3^n}} =$$

essendo $k^2 > 8$ si ha che $k^{1/3} > 8^{1/6} = 2^{1/2}$ e quindi $2^{n/2} = o(k^{n/3})$ per $n \rightarrow +\infty$, e di conseguenza si ottiene

$$= \lim_n \sqrt[n]{\frac{k^{n/3} + o(k^{n/3})}{3^n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{k^{n/3}}{3^n}} = \frac{k^{1/3}}{3}.$$

Ne segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{3}{k^{1/3}}$.

La risposta corretta è ☐ E ☒ .

Quiz 3. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + 1} \leq y \leq x^2 + 1, 0 \leq x \leq 1\}$. L'integrale $\int_{\Omega} \frac{5y}{x^2 + 1} dx dy$ vale

☐ T $\frac{1}{3}$.

☐ E $\frac{5}{3}$.

☐ D $\frac{1}{6}$.

☐ S $\frac{5}{6}$.

☐ U $\frac{6}{5}$.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è y -semplice. Infatti, $0 \leq x \leq 1$ e $\sqrt{x^2 + 1} \leq x^2 + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in particolare per $0 \leq x \leq 1$. Pertanto si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{5y}{x^2 + 1} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x^2 + 1}}^{x^2 + 1} \frac{5y}{x^2 + 1} dy \right) dx = 5 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\sqrt{x^2 + 1}}^{x^2 + 1} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} \left[(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1) \right] dx = \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{5}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

La risposta corretta è ☐ S ☒ .

Quiz 4. Siano $F(x, y, z) = (x(z - 7), y(z - 7), 3(z - 7)^2)$ e $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 7 + \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie Σ , orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

☐ T 80π .

☐ E $\frac{104}{3}\pi$.

☐ D 40π .

☐ S $\frac{52}{3}\pi$.

☐ U 0 .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 7 + \sqrt{x^2 + y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 7 + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Ne segue che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Quindi

$$N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F\left(x, y, 7 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) = \\ &= \left(x\sqrt{x^2 + y^2}, y\sqrt{x^2 + y^2}, 3(x^2 + y^2) \right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) = 2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = 2 \int_K (x^2 + y^2) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= 2 \int_{K'} \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K' = [1, 3] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 4\pi \int_1^3 \rho^3 \, d\rho = 4\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_1^3 = 80\pi.$$

La risposta corretta è ☐ T ☐.

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{12x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{12y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{12z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, e - 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (t^6 - (e - 1)t^5, t \sin(t - e + 1), \sqrt{t + 1} + \log[t^2 - (e - 1)t + 1])$ vale

☐ E 4.

☐ U 6.

☐ D 5.

☐ S 12.

☐ T 0.

SVOLGIMENTO

Il campo F è continuo su $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e radiale. Infatti, è della forma $F(x, y, z) = \varphi(\|(x, y, z)\|)(x, y, z)$, dove $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione

$$\varphi(t) = \frac{12}{t^2}.$$

Quindi F è conservativo su $\text{dom}(F)$ e un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è $f : \text{dom}(F) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $f(x) = \Phi(\|(x, y, z)\|)$, dove $\Phi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva della funzione $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$, ovvero Φ è derivabile su $(0, +\infty)$ con

$$\Phi'(t) = \frac{12}{t}.$$

Quindi si ha che

$$\forall t > 0 : \quad \Phi(t) = 12 \log t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è

$$\forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0) : \quad f(x, y, z) = 12 \log(\|(x, y, z)\|) = 6 \log(x^2 + y^2 + z^2).$$

Per le proprietà dei campi vettoriali conservativi, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(e - 1)) - f(\gamma(0)) = f(0, 0, \sqrt{e}) - f(0, 0, 1) = 6.$$

La risposta corretta è ☐ U ☐.

Metodo alternativo. Si osserva che F di classe C^1 su $\text{dom}(F)$ che è semplicemente connesso e che F è irrotazionale. Quindi F è conservativo su $\text{dom}(F)$.

Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che un potenziale f di F su $\text{dom}(F)$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = f_1(x, y, z) = \frac{12x}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = f_2(x, y, z) = \frac{12y}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = f_3(x, y, z) = \frac{12z}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases}$$

Procedendo con il metodo delle integrazioni indefinite successive si trova che un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è

$$f(x, y, z) = 6 \log(x^2 + y^2 + z^2).$$

Poi si conclude come nel caso precedente.

Quiz 6. Siano $a, b > 0$ con $a \neq b$ e sia $f(x, y) = \log\left(\frac{x^2 + y^2 + a}{x^2 + y^2 + b}\right)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ **S** Se $a < b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di massimo locale per f .

☐ **E** Se $a > b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di minimo locale per f .

☐ **D** Se $a < b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di minimo locale per f .

☐ **T** Per ogni $a, b > 0$ con $a \neq b$ il punto $(0, 0)$ non è stazionario per f .

☐ **U** Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Essendo $a, b > 0$ la funzione f è definita su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Poiché la funzione $\log$ (logaritmo naturale) è strettamente crescente, il punto $(0, 0)$ è di minimo (risp. massimo) per f se e solo se è di minimo (risp. massimo) per la funzione $g(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + a}{x^2 + y^2 + b}$. Osserviamo che

$$g(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + a}{x^2 + y^2 + b} = 1 - \frac{b - a}{x^2 + y^2 + b}, \quad g(0, 0) = 1 - \frac{b - a}{b}.$$

Si ha che:

- se $a < b$, allora $g(x, y) \geq g(0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- se $a > b$, allora $g(x, y) \leq g(0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Quindi

- se $a < b$, allora $(0, 0)$ è un punto di minimo assoluto (e quindi anche locale) per g , e anche per f ;
- se $a > b$, allora $(0, 0)$ è un punto di massimo assoluto (e quindi anche locale) per g , e anche per f .

Inoltre, essendo f di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$, per il Teorema di Fermat i punti di massimo e di minimo locale sono stazionari.

La risposta corretta è ☒ **D**.

Metodo alternativo. Essendo $a, b > 0$ la funzione f è definita su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. I punti di massimo e di minimo locale vanno cercati fra i punti stazionari.

Si calcola quindi il gradiente di f e si osserva che, essendo $a \neq b$, l'unico punto stazionario è $(0, 0)$. Poi si scrive la matrice Hessiana di f in $(0, 0)$ e si osserva che

- se $a < b$, allora questa matrice ha due autovalori maggiori di zero e quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo locale per f ;
- se $a > b$, allora questa matrice ha due autovalori minori di zero e quindi $(0, 0)$ è un punto di massimo locale per f .

Quiz 7. Siano $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale conservativo e di classe C^1 , e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 10(x^2 + y^2 + z^2), \text{ per ogni } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Il flusso uscente di F dal bordo di $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ vale

☐ $\frac{20}{3}\pi^2$.

☐ 8π .

☐ 10π .

☐ $\frac{10}{3}\pi^2$.

☐ 0 .

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza), il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove $\operatorname{div} F$ è la divergenza di F .

Poiché F è conservativo e f è un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ si ha che $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Si ha che

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \operatorname{div} F(x, y, z) &= \operatorname{div} (\nabla f)(x, y, z) = \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 10(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 10(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= 10 \int_{\Omega'} \rho^4 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi =$$

con $\Omega' = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, ed essendo Ω' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ , ϑ , φ e la funzione integranda prodotto di tre funzioni ciascuna in una sola delle variabili, si ottiene

$$= 20\pi \left(\int_0^1 \rho^4 \, d\rho \right) \left(\int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = 20\pi \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^1 \left[-\cos \vartheta \right]_0^\pi = 8\pi.$$

La risposta corretta è ☒ I.

Si osserva che una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica la relazione

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 10(x^2 + y^2 + z^2) \quad (1)$$

esiste. Infatti, essendo F di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ e f un suo potenziale, necessariamente f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^3$, e un potenziale che soddisfi la condizione (4) è ad esempio

$$f(x, y, z) = \frac{5}{6}(x^4 + y^4 + z^4).$$

Quiz 8. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ I Se $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

☐ D Se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge.

☐ P Se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

☐ S Se $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

☐ T Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto asintotico, se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge. La risposta corretta è ☐ P.

Quiz 1. La serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$

☐ *A* converge a $\frac{16}{16 - \pi^2}$.

☐ *E* converge a $\frac{\pi^4}{16(16 - \pi^2)}$.

☐ *I* converge a $\frac{4}{4 - \pi}$.

☐ *M* converge a $\frac{\pi^2}{4(4 - \pi)}$.

☐ *R* diverge positivamente.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n.$$

Quindi è una serie geometrica di ragione $a = \pi^2/16$. Poiché $|a| < 1$, questa serie converge. In particolare, se $|a| < 1$, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}.$$

Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n - \left[\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^0 + \left(\frac{\pi^2}{16}\right)^1 \right] = \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{16}} - \left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{\pi^4}{16(16 - \pi^2)}.$$

La risposta corretta è ☒ *E*.

Quiz 2. Sia $k > 0$ tale che $k^2 > 27$. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{n/3} + 3^{n/2}}{2^n} (x+1)^n$ è

☐ *M* 0.

☐ *A* $\frac{k^{1/3}}{2}$.

☐ *E* $\frac{2}{3^{1/2}}$.

☐ *I* $\frac{3^{1/2}}{2}$.

☐ *R* $\frac{2}{k^{1/3}}$.

SVOLGIMENTO

È una serie di potenze centrata in $x_0 = -1$. Posto $t = x + 1$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{n/3} + 3^{n/2}}{2^n} (x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{n/3} + 3^{n/2}}{2^n} t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0. Posto $a_n = (-1)^n \frac{k^{n/3} + 3^{n/2}}{2^n}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{k^{n/3} + 3^{n/2}}{2^n}\right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{k^{n/3} + 3^{n/2}}{2^n}} =$$

essendo $k^2 > 27$ si ha che $k^{1/3} > 27^{1/6} = 3^{1/2}$ e quindi $3^{n/2} = o(k^{n/3})$ per $n \rightarrow +\infty$, e di conseguenza si ottiene

$$= \lim_n \sqrt[n]{\frac{k^{n/3} + o(k^{n/3})}{2^n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{k^{n/3}}{2^n}} = \frac{k^{1/3}}{2}.$$

Ne segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{2}{k^{1/3}}$. La risposta corretta è R.

Quiz 3. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y^2 + 1} \leq x \leq y^2 + 1, 0 \leq y \leq 1\}$. L'integrale $\int_{\Omega} \frac{7x}{y^2 + 1} dx dy$ vale

I $\frac{7}{6}$.

A $\frac{7}{3}$.

E $\frac{1}{6}$.

M $\frac{1}{3}$.

R $\frac{6}{7}$.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è x -semplice. Infatti, $0 \leq y \leq 1$ e $\sqrt{y^2 + 1} \leq y^2 + 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, in particolare per $0 \leq y \leq 1$. Pertanto si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{7x}{y^2 + 1} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y^2+1}}^{y^2+1} \frac{7x}{y^2 + 1} dx \right) dy = 7 \int_0^1 \frac{1}{y^2 + 1} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\sqrt{y^2+1}}^{y^2+1} dy = \\ &= \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{1}{y^2 + 1} \left[(y^2 + 1)^2 - (y^2 + 1) \right] dy = \frac{7}{2} \int_0^1 y^2 dy = \frac{7}{2} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

La risposta corretta è I.

Quiz 4. Siano $F(x, y, z) = (x(z - 9), y(z - 9), 5(z - 9)^2)$ e $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 9 + \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie Σ , orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

I $\frac{32}{3}\pi$.

A $\frac{64}{3}\pi$.

E 15π .

M 30π .

P 0 .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 9 + \sqrt{x^2 + y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 9 + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Ne segue che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Quindi

$$N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F\left(x, y, 9 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right) = \\ &= \left(x \sqrt{x^2 + y^2}, y \sqrt{x^2 + y^2}, 5(x^2 + y^2)\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right) = 4(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = 4 \int_K (x^2 + y^2) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= 4 \int_{K'} \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K' = [1, 2] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 8\pi \int_1^2 \rho^3 \, d\rho = 8\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_1^2 = 30\pi.$$

La risposta corretta è ☐ M ☐.

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{8x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{8y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{8z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, e^2 - 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (t^7 - (e^2 - 1)t^6, t \sin(t - e^2 + 1), \sqrt{t + 1} + \log[1 + (e^2 - 1)t - t^2])$ vale

☐ P 8.

☐ A 10.

☐ E 4.

☐ I 7.

☐ R 0.

SVOLGIMENTO

Il campo F è continuo su $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e radiale. Infatti, è della forma $F(x, y, z) = \varphi(\|(x, y, z)\|)(x, y, z)$, dove $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione

$$\varphi(t) = \frac{8}{t^2}.$$

Quindi F è conservativo su $\text{dom}(F)$ e un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è $f : \text{dom}(F) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $f(x) = \Phi(\|(x, y, z)\|)$, dove $\Phi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva della funzione $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$, ovvero Φ è derivabile su $(0, +\infty)$ con

$$\Phi'(t) = \frac{8}{t}.$$

Quindi si ha che

$$\forall t > 0 : \quad \Phi(t) = 8 \log t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è

$$\forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0) : \quad f(x, y, z) = 8 \log(\|(x, y, z)\|) = 4 \log(x^2 + y^2 + z^2).$$

Per le proprietà dei campi vettoriali conservativi, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(e^2 - 1)) - f(\gamma(0)) = f(0, 0, e) - f(0, 0, 1) = 8.$$

La risposta corretta è ☐ P ☐.

Metodo alternativo. Si osserva che F di classe C^1 su $\text{dom}(F)$ che è semplicemente connesso e che F è irrotazionale. Quindi F è conservativo su $\text{dom}(F)$.

Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che un potenziale f di F su $\text{dom}(F)$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = f_1(x, y, z) = \frac{8x}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = f_2(x, y, z) = \frac{8y}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = f_3(x, y, z) = \frac{8z}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases}$$

Procedendo con il metodo delle integrazioni indefinite successive si trova che un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è

$$f(x, y, z) = 4 \log(x^2 + y^2 + z^2).$$

Poi si conclude come nel caso precedente.

Quiz 6. Siano $a, b > 0$ con $a \neq b$ e sia $f(x, y) = \log\left(\frac{x^2 + y^2 + a}{x^2 + y^2 + b}\right)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Se $a > b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di massimo locale per f .
- ☐ **E** Se $a < b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di massimo locale per f .
- ☐ **I** Se $a > b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di minimo locale per f .
- ☐ **P** Per ogni $a, b > 0$ con $a \neq b$ il punto $(0, 0)$ non è stazionario per f .
- ☐ **R** Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Essendo $a, b > 0$ la funzione f è definita su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Poiché la funzione $\log$ (logaritmo naturale) è strettamente crescente, il punto $(0, 0)$ è di minimo (risp. massimo) per f se e solo se è di minimo (risp. massimo) per la funzione $g(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + a}{x^2 + y^2 + b}$. Osserviamo che

$$g(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + a}{x^2 + y^2 + b} = 1 - \frac{b - a}{x^2 + y^2 + b}, \quad g(0, 0) = 1 - \frac{b - a}{b}.$$

Si ha che:

- se $a < b$, allora $g(x, y) \geq g(0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- se $a > b$, allora $g(x, y) \leq g(0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Quindi

- se $a < b$, allora $(0, 0)$ è un punto di minimo assoluto (e quindi anche locale) per g , e anche per f ;
- se $a > b$, allora $(0, 0)$ è un punto di massimo assoluto (e quindi anche locale) per g , e anche per f .

Inoltre, essendo f di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$, per il Teorema di Fermat i punti di massimo e di minimo locale sono stazionari.

La risposta corretta è ☒ **A**.

Metodo alternativo. Essendo $a, b > 0$ la funzione f è definita su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. I punti di massimo e di minimo locale vanno cercati fra i punti stazionari.

Si calcola quindi il gradiente di f e si osserva che, essendo $a \neq b$, l'unico punto stazionario è $(0, 0)$. Poi si scrive la matrice Hessiana di f in $(0, 0)$ e si osserva che

- se $a < b$, allora questa matrice ha due autovalori maggiori di zero e quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo locale per f ;
- se $a > b$, allora questa matrice ha due autovalori minori di zero e quindi $(0, 0)$ è un punto di massimo locale per f .

Quiz 7. Siano $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale conservativo e di classe C^1 , e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 15(x^2 + y^2 + z^2), \text{ per ogni } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Il flusso uscente di F dal bordo di $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ vale

- ☐ **E** 15π .
- ☐ **A** $10\pi^2$.
- ☐ **R** 12π .
- ☐ **I** $5\pi^2$.

$\boxed{P}$ 0.

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza), il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove $\operatorname{div} F$ è la divergenza di F .

Poiché F è conservativo e f è un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ si ha che $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Si ha che

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \operatorname{div} F(x, y, z) &= \operatorname{div} (\nabla f)(x, y, z) = \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 15(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 15(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= 15 \int_{\Omega'} \rho^4 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi =$$

con $\Omega' = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, ed essendo Ω' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ , ϑ , φ e la funzione integranda prodotto di tre funzioni ciascuna in una sola delle variabili, si ottiene

$$= 30\pi \left(\int_0^1 \rho^4 \, d\rho \right) \left(\int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = 30\pi \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^1 [-\cos \vartheta]_0^\pi = 12\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{R}$.

Si osserva che una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica la relazione

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 15(x^2 + y^2 + z^2) \quad (2)$$

esiste. Infatti, essendo F di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ e f un suo potenziale, necessariamente f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^3$, e un potenziale che soddisfi la condizione (4) è ad esempio

$$f(x, y, z) = \frac{5}{4}(x^4 + y^4 + z^4).$$

Quiz 8. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{R}$ Nessuna delle altre è corretta.

$\boxed{E}$ Se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ converge, allora $\sum b_n$ converge.

$\boxed{I}$ Se $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

$\boxed{P}$ Se $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

$\boxed{A}$ Se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto asintotico, se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge. La risposta corretta è $\boxed{A}$.

Versione V3

Quiz 1. La serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n}$

☐ *P* converge a $\frac{\pi}{\pi-2}$.

☐ *E* converge a $\frac{\pi^2}{\pi^2-4}$.

☐ *R* converge a $\frac{16}{\pi^2(\pi^2-4)}$.

☐ *S* converge a $\frac{2}{\pi(\pi-2)}$.

☐ *U* diverge positivamente.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^n.$$

Quindi è una serie geometrica di ragione $a = 4/\pi^2$. Poiché $|a| < 1$, questa serie converge. In particolare, se $|a| < 1$, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^n - \left[\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^0 + \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^1 \right] = \frac{1}{1 - \frac{4}{\pi^2}} - \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) = \frac{16}{\pi^2(\pi^2-4)}.$$

La risposta corretta è ☒ *R*.

Quiz 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $k^3 > 16$. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{k^{n/2} + 4^{n/3}} (x-2)^n$ è

☐ *E* $\frac{k^{1/2}}{3}$.

☐ *P* $\frac{3}{k^{1/2}}$.

☐ *R* $\frac{4^{1/3}}{3}$.

☐ *S* $\frac{3}{4^{1/3}}$.

☐ *U* 0.

SVOLGIMENTO

È una serie di potenze centrata in $x_0 = 2$. Posto $t = x - 2$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{k^{n/2} + 4^{n/3}} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{k^{n/2} + 4^{n/3}} t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0. Posto $a_n = (-1)^n \frac{3^n}{k^{n/2} + 4^{n/3}}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{3^n}{k^{n/2} + 4^{n/3}}\right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{3^n}{k^{n/2} + 4^{n/3}}} =$$

essendo $k^3 > 16$ si ha che $k^{1/2} > 16^{1/6} = 4^{1/3}$ e quindi $4^{n/3} = o(k^{n/2})$ per $n \rightarrow +\infty$, e di conseguenza si ottiene

$$= \lim_n \sqrt[n]{\frac{3^n}{k^{n/2} + o(k^{n/2})}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{3^n}{k^{n/2}}} = \frac{3}{k^{1/2}}.$$

Ne segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{k^{1/2}}{3}$. La risposta corretta è E.

Quiz 3. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + 1} \leq y \leq x^2 + 1, -1 \leq x \leq 0\}$. L'integrale $\int_{\Omega} \frac{11y}{x^2 + 1} dx dy$ vale

U $\frac{6}{11}$.

E $\frac{11}{3}$.

P $\frac{1}{6}$.

R $\frac{1}{3}$.

S $\frac{11}{6}$.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è y -semplice. Infatti, $-1 \leq x \leq 0$ e $\sqrt{x^2 + 1} \leq x^2 + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in particolare per $-1 \leq x \leq 0$. Pertanto si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{11y}{x^2 + 1} dx dy &= \int_{-1}^0 \left(\int_{\sqrt{x^2 + 1}}^{x^2 + 1} \frac{11y}{x^2 + 1} dy \right) dx = 11 \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 1} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\sqrt{x^2 + 1}}^{x^2 + 1} dx = \\ &= \frac{11}{2} \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 1} \left[(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1) \right] dx = \frac{11}{2} \int_{-1}^0 x^2 dx = \frac{11}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^0 = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

La risposta corretta è S.

Quiz 4. Siano $F(x, y, z) = (x(z + 6), y(z + 6), 3(z + 6)^2)$ e $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} - 6, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie Σ , orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

E $\frac{104}{3}\pi$.

U 80π .

P 40π .

R $\frac{52}{3}\pi$.

S 0 .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 6$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2} - 6)$.

Ne segue che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Quindi

$$N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F\left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2} - 6\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right) = \\ &= \left(x\sqrt{x^2 + y^2}, y\sqrt{x^2 + y^2}, 3(x^2 + y^2)\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right) = 2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = 2 \int_K (x^2 + y^2) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= 2 \int_{K'} \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K' = [1, 3] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 4\pi \int_1^3 \rho^3 \, d\rho = 4\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_1^3 = 80\pi.$$

La risposta corretta è ☐ U .

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{10x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{10y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{10z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, e - 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = \left(\sqrt{t + 1} + \log[t^2 - (e - 1)t + 1], t \sin(t - e + 1), t^6 - (e - 1)t^5 \right)$ vale

☐ S 10.

☐ E 4.

☐ R 6.

☐ P 5.

☐ U 0.

SVOLGIMENTO

Il campo F è continuo su $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e radiale. Infatti, è della forma $F(x, y, z) = \varphi(\|(x, y, z)\|)(x, y, z)$, dove $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione

$$\varphi(t) = \frac{10}{t^2}.$$

Quindi F è conservativo su $\text{dom}(F)$ e un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è $f : \text{dom}(F) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $f(x) = \Phi(\|(x, y, z)\|)$, dove $\Phi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva della funzione $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$, ovvero Φ è derivabile su $(0, +\infty)$ con

$$\Phi'(t) = \frac{10}{t}.$$

Quindi si ha che

$$\forall t > 0 : \quad \Phi(t) = 10 \log t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è

$$\forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0) : \quad f(x, y, z) = 10 \log(\|(x, y, z)\|) = 5 \log(x^2 + y^2 + z^2).$$

Per le proprietà dei campi vettoriali conservativi, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(e - 1)) - f(\gamma(0)) = f(\sqrt{e}, 0, 0) - f(1, 0, 0) = 5.$$

La risposta corretta è ☐ P .

Metodo alternativo. Si osserva che F di classe C^1 su $\text{dom}(F)$ che è semplicemente connesso e che F è irrotazionale. Quindi F è conservativo su $\text{dom}(F)$.

Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che un potenziale f di F su $\text{dom}(F)$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = f_1(x, y, z) = \frac{10x}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = f_2(x, y, z) = \frac{10y}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = f_3(x, y, z) = \frac{10z}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases}$$

Procedendo con il metodo delle integrazioni indefinite successive si trova che un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è

$$f(x, y, z) = 5 \log(x^2 + y^2 + z^2).$$

Poi si conclude come nel caso precedente.

Quiz 6. Siano $a, b > 0$ con $a \neq b$ e sia $f(x, y) = \log\left(\frac{x^2 + y^2 + b}{x^2 + y^2 + a}\right)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **E** Se $a > b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di minimo locale per f .
- ☐ **P** Se $a < b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di minimo locale per f .
- ☐ **R** Se $a > b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di massimo locale per f .
- ☐ **S** Per ogni $a, b > 0$ con $a \neq b$ il punto $(0, 0)$ non è stazionario per f .
- ☐ **U** Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Essendo $a, b > 0$ la funzione f è definita su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Poiché la funzione $\log$ (logaritmo naturale) è strettamente crescente, il punto $(0, 0)$ è di minimo (risp. massimo) per f se e solo se è di minimo (risp. massimo) per la funzione $g(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + b}{x^2 + y^2 + a}$. Osserviamo che

$$g(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + b}{x^2 + y^2 + a} = 1 - \frac{a - b}{x^2 + y^2 + a}, \quad g(0, 0) = 1 - \frac{a - b}{a}.$$

Si ha che:

- se $a < b$, allora $g(x, y) \leq g(0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- se $a > b$, allora $g(x, y) \geq g(0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Quindi

- se $a < b$, allora $(0, 0)$ è un punto di massimo assoluto (e quindi anche locale) per g , e anche per f ;
- se $a > b$, allora $(0, 0)$ è un punto di minimo assoluto (e quindi anche locale) per g , e anche per f .

Inoltre, essendo f di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$, per il Teorema di Fermat i punti di massimo e di minimo locale sono stazionari.

La risposta corretta è ☒ **E**.

Metodo alternativo. Essendo $a, b > 0$ la funzione f è definita su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. I punti di massimo e di minimo locale vanno cercati fra i punti stazionari.

Si calcola quindi il gradiente di f e si osserva che, essendo $a \neq b$, l'unico punto stazionario è $(0, 0)$. Poi si scrive la matrice Hessiana di f in $(0, 0)$ e si osserva che

- se $a < b$, allora questa matrice ha due autovalori minori di zero e quindi $(0, 0)$ è un punto di massimo locale per f ;
- se $a > b$, allora questa matrice ha due autovalori maggiori di zero e quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo locale per f .

Quiz 7. Siano $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale conservativo e di classe C^1 , e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -20(x^2 + y^2 + z^2), \text{ per ogni } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Il flusso uscente di F dal bordo di $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ vale

- ☐ **P** $-\frac{20}{3}\pi^2$.
- ☐ **E** $-\frac{40}{3}\pi^2$.
- ☐ **I** -20π .

$$\boxed{R} \quad -16\pi.$$

$$\boxed{S} \quad 0.$$

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza), il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove $\operatorname{div} F$ è la divergenza di F .

Poiché F è conservativo e f è un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ si ha che $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Si ha che

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \operatorname{div} F(x, y, z) &= \operatorname{div} (\nabla f)(x, y, z) = \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -20(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = -20 \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= -20 \int_{\Omega'} \rho^4 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi =$$

con $\Omega' = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, ed essendo Ω' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ , ϑ , φ e la funzione integranda prodotto di tre funzioni ciascuna in una sola delle variabili, si ottiene

$$= -40\pi \left(\int_0^1 \rho^4 \, d\rho \right) \left(\int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = -40\pi \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^1 \left[-\cos \vartheta \right]_0^\pi = -16\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{R}$.

Si osserva che una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica la relazione

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -20(x^2 + y^2 + z^2) \quad (3)$$

esiste. Infatti, essendo F di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ e f un suo potenziale, necessariamente f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^3$, e un potenziale che soddisfi la condizione (4) è ad esempio

$$f(x, y, z) = -\frac{5}{3}(x^4 + y^4 + z^4).$$

Quiz 8. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{E}$ Se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge.

$\boxed{I}$ Se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

$\boxed{P}$ Se $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

$\boxed{R}$ Se $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

$\boxed{S}$ Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto asintotico, se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge. La risposta corretta è $\boxed{I}$.

Quiz 1. La serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2n}$

☐ *M* converge a $\frac{3}{\pi(\pi-3)}$.

☐ *A* converge a $\frac{\pi^2}{\pi^2-9}$.

☐ *E* converge a $\frac{\pi}{\pi-3}$.

☐ *L'* converge a $\frac{81}{\pi^2(\pi^2-9)}$.

☐ *S* diverge positivamente.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{9}{\pi^2}\right)^n.$$

Quindi è una serie geometrica di ragione $a = 9/\pi^2$. Poiché $|a| < 1$, questa serie converge. In particolare, se $|a| < 1$, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{9}{\pi^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{\pi^2}\right)^n - \left[\left(\frac{9}{\pi^2}\right)^0 + \left(\frac{9}{\pi^2}\right)^1 \right] = \frac{1}{1 - \frac{9}{\pi^2}} - \left(1 + \frac{9}{\pi^2}\right) = \frac{81}{\pi^2(\pi^2-9)}.$$

La risposta corretta è ☒ *L'*.

Quiz 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $k^3 > 25$. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{k^{n/2} + 5^{n/3}} (x+2)^n$ è

☐ *L'* $\frac{5^{1/3}}{2}$.

☐ *A* $\frac{2}{k^{1/2}}$.

☐ *E* $\frac{k^{1/2}}{2}$.

☐ *M* $\frac{2}{5^{1/3}}$.

☐ *S* 0.

SVOLGIMENTO

È una serie di potenze centrata in $x_0 = -2$. Posto $t = x + 2$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{k^{n/2} + 5^{n/3}} (x+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{k^{n/2} + 5^{n/3}} t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0. Posto $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{k^{n/2} + 5^{n/3}}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{2^n}{k^{n/2} + 5^{n/3}}\right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n}{k^{n/2} + 5^{n/3}}} =$$

essendo $k^3 > 25$ si ha che $k^{1/2} > 25^{1/6} = 5^{1/3}$ e quindi $5^{n/3} = o(k^{n/2})$ per $n \rightarrow +\infty$, e di conseguenza si ottiene

$$= \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n}{k^{n/2} + o(k^{n/2})}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n}{k^{n/2}}} = \frac{2}{k^{1/2}}.$$

Ne segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{k^{1/2}}{2}$.

La risposta corretta è **E**.

Quiz 3. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y^2 + 1} \leq x \leq y^2 + 1, -1 \leq y \leq 0\}$. L'integrale $\int_{\Omega} \frac{13x}{y^2 + 1} dx dy$ vale

M $\frac{6}{13}$.

A $\frac{13}{3}$.

E $\frac{1}{6}$.

L' $\frac{1}{3}$.

S $\frac{13}{6}$.

SVOLGIMENTO

L'insieme Ω è x -semplice. Infatti, $0 \leq y \leq 1$ e $\sqrt{y^2 + 1} \leq y^2 + 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, in particolare per $0 \leq y \leq 1$. Pertanto si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{13x}{y^2 + 1} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y^2+1}}^{y^2+1} \frac{13x}{y^2 + 1} dx \right) dy = 13 \int_0^1 \frac{1}{y^2 + 1} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\sqrt{y^2+1}}^{y^2+1} dy = \\ &= \frac{13}{2} \int_0^1 \frac{1}{y^2 + 1} \left[(y^2 + 1)^2 - (y^2 + 1) \right] dy = \frac{13}{2} \int_0^1 y^2 dy = \frac{13}{2} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

La risposta corretta è **S**.

Quiz 4. Siano $F(x, y, z) = (x(z + 8), y(z + 8), 5(z + 8)^2)$ e $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} - 8, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie Σ , orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

A 30π .

E $\frac{64}{3}\pi$.

K 15π .

L' $\frac{32}{3}\pi$.

M 0 .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 8$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2} - 8)$.

Ne segue che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ in $\sigma(x, y)$ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Quindi

$$N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F\left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2} - 8\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right) = \\ &= \left(x \sqrt{x^2 + y^2}, y \sqrt{x^2 + y^2}, 5(x^2 + y^2)\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right) = 4(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = 4 \int_K (x^2 + y^2) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= 4 \int_{K'} \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K' = [1, 2] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 8\pi \int_1^2 \rho^3 \, d\rho = 8\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_1^2 = 30\pi.$$

La risposta corretta è A.

Quiz 5. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{6x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{6y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{6z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, e^2 - 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (t^7 - (e^2 - 1)t^6, \sqrt{t+1} + \log[1 + (e^2 - 1)t - t^2], t \sin(t - e^2 + 1))$ vale

K 8.

A 12.

E 4.

M 6.

L' 0.

SVOLGIMENTO

Il campo F è continuo su $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e radiale. Infatti, è della forma $F(x, y, z) = \varphi(\|(x, y, z)\|)(x, y, z)$, dove $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione

$$\varphi(t) = \frac{6}{t^2}.$$

Quindi F è conservativo su $\text{dom}(F)$ e un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è $f : \text{dom}(F) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $f(x) = \Phi(\|(x, y, z)\|)$, dove $\Phi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva della funzione $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$, ovvero Φ è derivabile su $(0, +\infty)$ con

$$\Phi'(t) = \frac{6}{t}.$$

Quindi si ha che

$$\forall t > 0 : \quad \Phi(t) = 6 \log t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è

$$\forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0) : \quad f(x, y, z) = 6 \log(\|(x, y, z)\|) = 3 \log(x^2 + y^2 + z^2).$$

Per le proprietà dei campi vettoriali conservativi, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(e^2 - 1)) - f(\gamma(0)) = f(0, e, 0) - f(0, 1, 0) = 6.$$

La risposta corretta è M.

Metodo alternativo. Si osserva che F di classe C^1 su $\text{dom}(F)$ che è semplicemente connesso e che F è irrotazionale. Quindi F è conservativo su $\text{dom}(F)$.

Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che un potenziale f di F su $\text{dom}(F)$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = f_1(x, y, z) = \frac{6x}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = f_2(x, y, z) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = f_3(x, y, z) = \frac{6z}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases}$$

Procedendo con il metodo delle integrazioni indefinite successive si trova che un potenziale di F su $\text{dom}(F)$ è

$$f(x, y, z) = 3 \log(x^2 + y^2 + z^2).$$

Poi si conclude come nel caso precedente.

Quiz 6. Siano $a, b > 0$ con $a \neq b$ e sia $f(x, y) = \log\left(\frac{x^2 + y^2 + b}{x^2 + y^2 + a}\right)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Se $a > b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di massimo locale per f .
- ☐ **E** Se $a < b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di massimo locale per f .
- ☐ **K** Se $a < b$, allora il punto $(0, 0)$ è stazionario per f ed è di minimo locale per f .
- ☐ **M** Per ogni $a, b > 0$ con $a \neq b$ il punto $(0, 0)$ non è stazionario per f .
- ☐ **O** Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Essendo $a, b > 0$ la funzione f è definita su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Poiché la funzione $\log$ (logaritmo naturale) è strettamente crescente, il punto $(0, 0)$ è di minimo (risp. massimo) per f se e solo se è di minimo (risp. massimo) per la funzione $g(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + b}{x^2 + y^2 + a}$. Osserviamo che

$$g(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + b}{x^2 + y^2 + a} = 1 - \frac{a - b}{x^2 + y^2 + a}, \quad g(0, 0) = 1 - \frac{a - b}{a}.$$

Si ha che:

- se $a < b$, allora $g(x, y) \leq g(0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- se $a > b$, allora $g(x, y) \geq g(0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Quindi

- se $a < b$, allora $(0, 0)$ è un punto di massimo assoluto (e quindi anche locale) per g , e anche per f ;
- se $a > b$, allora $(0, 0)$ è un punto di minimo assoluto (e quindi anche locale) per g , e anche per f .

Inoltre, essendo f di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$, per il Teorema di Fermat i punti di massimo e di minimo locale sono stazionari.

La risposta corretta è ☒ **E**.

Metodo alternativo. Essendo $a, b > 0$ la funzione f è definita su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. I punti di massimo e di minimo locale vanno cercati fra i punti stazionari.

Si calcola quindi il gradiente di f e si osserva che, essendo $a \neq b$, l'unico punto stazionario è $(0, 0)$. Poi si scrive la matrice Hessiana di f in $(0, 0)$ e si osserva che

- se $a < b$, allora questa matrice ha due autovalori minori di zero e quindi $(0, 0)$ è un punto di massimo locale per f ;
- se $a > b$, allora questa matrice ha due autovalori maggiori di zero e quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo locale per f .

Quiz 7. Siano $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale conservativo e di classe C^1 , e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -25(x^2 + y^2 + z^2), \text{ per ogni } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Il flusso uscente di F dal bordo di $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ vale

- ☐ **E** -25π .
- ☐ **A** $-\frac{50}{3}\pi^2$.
- ☐ **O** -20π .
- ☐ **K** $-\frac{25}{3}\pi^2$.

☐ M 0.

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza), il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove $\operatorname{div} F$ è la divergenza di F .

Poiché F è conservativo e f è un potenziale di F su $\mathbb{R}^3$ si ha che $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Si ha che

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \operatorname{div} F(x, y, z) &= \operatorname{div} (\nabla f)(x, y, z) = \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -25(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = -25 \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= -25 \int_{\Omega'} \rho^4 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi =$$

con $\Omega' = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, ed essendo Ω' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ , ϑ , φ e la funzione integranda prodotto di tre funzioni ciascuna in una sola delle variabili, si ottiene

$$= -50\pi \left(\int_0^1 \rho^4 \, d\rho \right) \left(\int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = -50\pi \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^1 [-\cos \vartheta]_0^\pi = -20\pi.$$

La risposta corretta è ☐ O .

Si osserva che una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica la relazione

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -25(x^2 + y^2 + z^2) \quad (4)$$

esiste. Infatti, essendo F di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ e f un suo potenziale, necessariamente f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^3$, e un potenziale che soddisfi la condizione (4) è ad esempio

$$f(x, y, z) = -\frac{25}{12}(x^4 + y^4 + z^4).$$

Quiz 8. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ O Nessuna delle altre è corretta.

☐ A Se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ converge, allora $\sum b_n$ converge.

☐ E Se $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

☐ M Se $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

☐ K Se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto asintotico, se $a_n, b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge. La risposta corretta è ☐ K .
