

ESAME ONLINE

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V1	Z	E	R	O	E'	S	E	M

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}x^2(y^2 + z^2) + e^{z^4 - y^6}, \sin(x^4 + z^5) - 7xy, 7xz - \log(1 + x^8 y^6) \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{y^2 + z^2} - \frac{5}{2} \leq x \leq \sqrt{\frac{25}{4} - y^2 - z^2} \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = 3x(y^2 + z^2).$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 3 \int_{\Omega} x(y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x si ha

$$= 3 \int_{\Omega'} x \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

$$\text{dove } \Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, 2\rho - \frac{5}{2} \leq x \leq \sqrt{\frac{25}{4} - \rho^2} \right\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 3 \int_{\Omega'} x \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 6\pi \int_0^2 \left(\int_{2\rho - \frac{5}{2}}^{\sqrt{\frac{25}{4} - \rho^2}} x \rho^3 \, dx \right) d\rho = \\ &= 3\pi \int_0^2 \rho^3 \left[x^2 \right]_{2\rho - \frac{5}{2}}^{\sqrt{\frac{25}{4} - \rho^2}} d\rho = 3\pi \int_0^2 (10\rho^4 - 5\rho^5) \, d\rho = 3\pi \left[2\rho^5 - \frac{5}{6}\rho^6 \right]_0^2 = 32\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V2	P	R	E	L	A	R	I	S

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\sin(y^4 - z^5) - 5xy, 2y^2(x^2 + z^2) - e^{x^3 + z^2}, 5yz - \log(1 + x^4 y^2) \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3\sqrt{x^2 + z^2} - \frac{5}{3} \leq y \leq \sqrt{\frac{25}{9} - x^2 - z^2} \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = 4y(x^2 + z^2).$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 4 \int_{\Omega} y(x^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y si ha

$$= 4 \int_{\Omega'} y \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

$$\text{dove } \Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, 3\rho - \frac{5}{3} \leq y \leq \sqrt{\frac{25}{9} - \rho^2} \right\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= 4 \int_{\Omega'} y \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 8\pi \int_0^1 \left(\int_{3\rho - \frac{5}{3}}^{\sqrt{\frac{25}{9} - \rho^2}} y \rho^3 \, dy \right) d\rho = \\ &= 4\pi \int_0^1 \rho^3 \left[y^2 \right]_{3\rho - \frac{5}{3}}^{\sqrt{\frac{25}{9} - \rho^2}} d\rho = 4\pi \int_0^1 (10\rho^4 - 10\rho^5) \, d\rho = 40\pi \left[\frac{1}{5}\rho^5 - \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V3	P	O	S	T	A	S	B	A

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(e^{y^4 - z^6} - \frac{5}{2}x^2(y^2 + z^2), \cos(x^5 + z^4) - 9xy, 9xz - \log(1 + x^6y^8) \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{y^2 + z^2} - \frac{5}{2} \leq x \leq \sqrt{\frac{25}{4} - y^2 - z^2} \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = -5x(y^2 + z^2).$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = -5 \int_{\Omega} x(y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x si ha

$$= -5 \int_{\Omega'} x \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

$$\text{dove } \Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, 2\rho - \frac{5}{2} \leq x \leq \sqrt{\frac{25}{4} - \rho^2} \right\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= -5 \int_{\Omega'} x \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta \, dx = -10\pi \int_0^2 \left(\int_{2\rho - \frac{5}{2}}^{\sqrt{\frac{25}{4} - \rho^2}} x \rho^3 \, dx \right) d\rho = \\ &= -5\pi \int_0^2 \rho^3 \left[x^2 \right]_{2\rho - \frac{5}{2}}^{\sqrt{\frac{25}{4} - \rho^2}} d\rho = -5\pi \int_0^2 (10\rho^4 - 5\rho^5) \, d\rho = -5\pi \left[2\rho^5 - \frac{5}{6}\rho^6 \right]_0^2 = -\frac{160}{3}\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V4	G	L	I	A	T	A	O	K

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(11xy - \sin(z^4 - y^5), e^{x^2+z^3} - 2y^2(x^2 + z^2), \log(1 + x^2y^4) - 11yz \right)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3\sqrt{x^2 + z^2} - \frac{5}{3} \leq y \leq \sqrt{\frac{25}{9} - x^2 - z^2} \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = -4y(x^2 + z^2).$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = -4 \int_{\Omega} y(x^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y si ha

$$= -4 \int_{\Omega'} y \rho^2 \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

$$\text{dove } \Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, 3\rho - \frac{5}{3} \leq y \leq \sqrt{\frac{25}{9} - \rho^2} \right\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= -4 \int_{\Omega'} y \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta \, dy = -8\pi \int_0^1 \left(\int_{3\rho - \frac{5}{3}}^{\sqrt{\frac{25}{9} - \rho^2}} y \rho^3 \, dy \right) d\rho = \\ &= -4\pi \int_0^1 \rho^3 \left[y^2 \right]_{3\rho - \frac{5}{3}}^{\sqrt{\frac{25}{9} - \rho^2}} d\rho = -4\pi \int_0^1 (10\rho^4 - 10\rho^5) \, d\rho = -40\pi \left[\frac{1}{5}\rho^5 - \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^1 = -\frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$