Svolgimento dei quiz dell'esame di Analisi Matematica II del 3 febbraio 2021 ore 11:30

ESAME ONLINE

Versione: V1

Quiz 1. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+9}{3+n\,\log n}$

$\boxed{R}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ converge assolutamente.

$\boxed{S}$ è indeterminata.

$\boxed{Z}$ converge ma non assolutamente.

$\boxed{M}$ diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

La serie è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{2n+9}{3+n\,\log n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+9}{3+n\,\log n}.$$

Si ha che

$$\frac{2n+9}{3+n\,\log n} \sim \frac{2}{\log n}, \qquad n \to +\infty.$$

Inoltre

$$\log n = o(n), \quad n \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\log n}\right), \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \frac{2n+9}{3+n\,\log n}$, si ha che $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e inoltre la successione (b_n) è decrescente. Infatti, posto $f(x) = \frac{2x+9}{3+x\,\log x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 1$, la funzione f è derivabile con

$$\forall x \geq 1: \quad f'(x) = -\frac{2x+9\log x+3}{(3+x\,\log x)^2} \leq 0.$$

Quindi f è decrescente su $[1,+\infty)$ e di conseguenza la successione (b_n) è decrescente. Per il Criterio di Leibniz la serie data converge. La risposta corretta è $\boxed{\text{Z}}$.

Quiz 2. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{3^n\,n^{2n}}\,(x-1)^n$ è

$\boxed{R}$ 0.

$\boxed{Z}$ $\frac{4}{3e^2}$.

$\boxed{S}$ $\frac{3e^2}{2}$.

$\boxed{M}$ $\frac{2}{3e^2}$.

$\boxed{E}$ $\frac{3e^2}{4}$.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 1$. Posto $t = x-1$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{3^n\,n^{2n}}\,(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{3^n\,n^{2n}}\,t^n.$$

Posto $a_n = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{3^n\, n^{2n}}$, si ha che

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+2)!}{3^{n+1}\,(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{3^n\, n^{2n}}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!}{3\cdot 3^n\,(n+1)^2\cdot(n+1)^{2n}} \cdot \frac{3^n\, n^{2n}}{(2n)!} = \frac{2(2n+1)}{3(n+1)} \cdot \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2}.$$

Quindi

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{2(2n+1)}{3(n+1)} \cdot \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2} = \frac{4}{3e^2}.$$

Per il Teorema del rapporto il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \dfrac{3e^2}{4}$. La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 2\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ vale

$\boxed{R}$ $\dfrac{43}{12}$.

$\boxed{E}$ $\dfrac{43}{24}$.

$\boxed{O}$ $\dfrac{4}{3}$.

$\boxed{M}$ $\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{P}$ $\dfrac{6}{7}$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate polari centrate in (0,0) si ottiene

$$\int_\Omega x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\vartheta\, d\rho\, d\vartheta,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ è l'insieme Ω scritto in coordinate polari. Si ha che

$$(x,y) \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ x \ge 0 \\ y \ge 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le 3 \\ \rho\cos\vartheta \ge 0 \\ \rho\sin\vartheta \ge 2 \\ -\pi \le \vartheta \le \pi \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2}{\sin\vartheta} \le \rho \le 3 \\ \arcsin\dfrac{2}{3} \le \vartheta \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ \arcsin\frac{2}{3} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{\sin\vartheta} \le \rho \le 3\right\}.$$

Esendo Ω' un insieme ρ-semplice si ha che

$$\int_\Omega x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^3\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = \int_{\arcsin\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{2}{\sin\vartheta}}^{3} \rho^3\cos\vartheta\,d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= \int_{\arcsin\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{\frac{2}{\sin\vartheta}}^{3} d\vartheta = \frac{1}{4}\int_{\arcsin\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\left(81 - \frac{16}{\sin^4\vartheta}\right) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\arcsin\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(81\cos\vartheta - 16\frac{\cos\vartheta}{\sin^4\vartheta}\right) d\vartheta = \frac{1}{4}\left[81\sin\vartheta + \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\sin^3\vartheta}\right]_{\arcsin\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{43}{12}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{R}}$.

Quiz 4. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 3 + 2\,e^{x^2+y^2},\ 2 \le x^2+y^2 \le 3,\ y \ge 0\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\dfrac{2x}{z-3}, \dfrac{2y}{z-3}, \log\left(\dfrac{z-3}{2}\right)\right)$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z, vale

$\boxed{S}$ $2\pi\left(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right)$.

$\boxed{E'}$ $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\pi$.

$\boxed{Z}$ $-\dfrac{15}{2}\pi$.

$\boxed{O}$ $-\dfrac{15}{4}\pi$.

$\boxed{M}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è definito e continuo su $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z > 3\right\}$. La superficie Σ, che è contenuta in Ω, è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 3 + 2\,e^{x^2+y^2}$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 \leq x^2+y^2 \leq 3, \ \ y \geq 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x, y, 3 + 2\,e^{x^2+y^2}\right)$.

Ne segue che

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ è

$$N_\sigma(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-4x\,e^{x^2+y^2}, -4y\,e^{x^2+y^2}, 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi

$$N(x,y) = N_\sigma(x,y) = \left(-4x\,e^{x^2+y^2}, -4y\,e^{x^2+y^2}, 1\right).$$

Si ha che

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = F\left(x, y, 3 + 2\,e^{x^2+y^2}\right) \cdot \left(-4x\,e^{x^2+y^2}, -4y\,e^{x^2+y^2}, 1\right) =$$
$$= \left(x\,e^{-x^2-y^2}, y\,e^{-x^2-y^2}, x^2+y^2\right) \cdot \left(-4x\,e^{x^2+y^2}, -4y\,e^{x^2+y^2}, 1\right) = -3\left(x^2+y^2\right).$$

Ne segue che

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy = -3 \int_K \left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= -3 \int_{K'} \rho^3\, d\rho\, d\vartheta =$$

essendo $K' = \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] \times [0,\pi]$ si ottiene

$$= -3\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \rho^3\, d\rho = -3\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = -\frac{15}{4}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{O}}$.

Quiz 5. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y) = \left(\dfrac{10xy^4}{1+x^2y^4} + 4x, \ \dfrac{20x^2y^3}{1+x^2y^4} + 2\right)$ e la curva parametrica $\gamma : [0,3] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^7 - 3t^6 + t\,\cos(3-t), \ t^4 - 3t^3 + (3-t)\,e^{5t^2}\right)$.

L'integrale di linea di F lungo γ vale

$\boxed{M}$ -6.

$\boxed{S}$ -12.

$\boxed{Z}$ 6.

$\boxed{E'}$ 12.

$\boxed{R}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{40xy^3}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su Ω, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \dfrac{10xy^4}{1+x^2y^4} + 4x, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \dfrac{20x^2y^3}{1+x^2y^4} + 2. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(\frac{10xy^4}{1+x^2y^4} + 4x \right) dx = 5 \log\left(1 + x^2y^4\right) + 2x^2 + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{20x^2y^3}{1+x^2y^4} + c'(y) = \frac{20x^2y^3}{1+x^2y^4} + 2 \quad \Longrightarrow \quad c'(y) = 2 \quad \Longrightarrow \quad c(y) = 2y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su Ω è

$$f(x,y) = 5 \log\left(1 + x^2y^4\right) + 2x^2 + 2y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(3)) - f(\gamma(0)) = f(3,0) - f(0,3) = 18 - 6 = 12.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E'}}$.

Quiz 6. La funzione $f(x,y) = 18 + \left(x^2 + 2y^2\right) e^{-x^2-y^2}$

$\boxed{S}$ ha cinque punti stazionari: uno di minimo locale, due di massimo locale e due di sella.

$\boxed{M}$ ha solo un punto stazionario che è di minimo locale.

$\boxed{R}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale, uno di massimo locale e uno di sella.

$\boxed{Z}$ ha solo un punto stazionario che è di massimo locale.

$\boxed{E}$ ha cinque punti stazionari: uno di massimo locale, due di minimo locale e due di sella.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{-x^2-y^2}\left(1 - x^2 - 2y^2\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ye^{-x^2-y^2}\left(2 - x^2 - 2y^2\right).$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x\left(1 - x^2 - 2y^2\right) = 0 \\ y\left(2 - x^2 - 2y^2\right) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \quad x^2 + 2y^2 = 1 \\ y = 0, \quad x^2 + 2y^2 = 2. \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono $(0,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{-x^2-y^2}\left[-2x^2\left(1 - x^2 - 2y^2\right) + 1 - 3x^2 - 2y^2\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2e^{-x^2-y^2}\left[-2y^2\left(2 - x^2 - 2y^2\right) + 2 - x^2 - 6y^2\right], \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xye^{-x^2-y^2}\left(3 - x^2 - 2y^2\right).$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,\pm1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8\,e^{-1} \end{pmatrix}, \qquad H_f(\pm1,0) = \begin{pmatrix} -4\,e^{-1} & 0 \\ 0 & 2\,e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di minimo locale, i punti $(0,\pm 1)$ sono di massimo locale mentre i punti e $(\pm 1,0)$ sono di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{S}}$.

Quiz 7. Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0\}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale conservativo su Ω, $f : \Omega \to (0,+\infty)$ un potenziale di F su Ω, $G : \Omega \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G(x,y) = \dfrac{1}{1+[f(x,y)]^2} F(x,y)$ e $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ le funzioni $g(x,y) = \arctan [f(x,y)]$, $h(x,y) = -\dfrac{1}{2} \arctan \dfrac{1}{f(x,y)}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{Z}$ Le funzioni g e $2h$ non sono potenziali di G su Ω.

$\boxed{M}$ Le funzioni g e $2h$ sono due potenziali di G su Ω ma la funzione $g-2h$ non è costante su Ω.

$\boxed{S}$ La funzione g è un potenziale di G su Ω mentre la funzione $2h$ non lo è.

$\boxed{O}$ La funzione $2h$ è un potenziale di G su Ω mentre la funzione g non lo è.

$\boxed{E}$ Le funzioni g e $2h$ sono due potenziali di G su Ω e la funzione $g-2h$ è costante su Ω.

SVOLGIMENTO

Si osserva che g e $2h$ sono due potenziali di G su Ω perché sono due funzioni differenziabili su Ω e per ogni $(x,y) \in \Omega$ risulta che $\nabla g(x,y) = \nabla(2h)(x,y) = G(x,y)$. Inoltre la funzione $g-2h$ è costante su Ω perché per ogni $(x,y) \in \Omega$ si ha che

$$g(x,y) - 2h(x,y) = \arctan [f(x,y)] + \arctan \frac{1}{f(x,y)} = \frac{\pi}{2}$$

perché $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in \Omega$ e $\arctan t + \arctan \dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi}{2}$ per ogni $t > 0$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 8. Siano (a_n) una successione reale e $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{Z}$ Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n S_n = 0$.

$\boxed{M}$ Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$.

$\boxed{R}$ Se $\lim_n a_n = 0$, allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{S}$ Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge, allora $\lim_n a_n \neq 0$.

$\boxed{E}$ Se $\lim_n S_n \neq 0$, allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge.

SVOLGIMENTO

Per la condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica, se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$. La risposta corretta è $\boxed{\text{M}}$.

Versione V2

Quiz 1. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5+(-1)^n n}{4+n^2 \log n}$

$\boxed{A}$ converge ad un numero minore di zero.

$\boxed{R}$ converge ad un numero maggiore di zero.

$\boxed{L}$ è indeterminata.

$\boxed{P}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5+(-1)^n n}{4+n^2 \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n 5}{4+n^2 \log n}.$$

Poiché per ogni $n \geq 5$ si ha che $n+(-1)^n 5 \geq 0$, la serie è a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente.

Si ha che

$$\frac{n+(-1)^n 5}{4+n^2 \log n} \sim \frac{1}{n \log n}, \qquad n \to +\infty.$$

La successione $a_n = \dfrac{1}{n \log n}$ è non negativa e decrescente. Considerata la funzione associata $f(x) = \dfrac{1}{x \log x}$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 2$, si osserva che anche f è non negativa e decrescente. Per il Criterio di Maclaurin la serie di a_n converge se e solo l'integrale improprio di f su $[2, +\infty)$ converge. Si ha che

$$\int_2^{+\infty} f(x)\, dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\, dx =$$

posto $t = \log x$ da cui $dt = \frac{1}{x}\, dx$ si ottiene

$$= \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$$

che diverge. Per il Criterio di Maclaurin la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ diverge, e per il Criterio del confronto asintotico la serie data diverge positivamente. La risposta corretta è $\boxed{\text{P}}$.

Quiz 2. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n)!}{2^n\, n^{3n}}\,(x+1)^n$ è

$\boxed{R}$ $\dfrac{2e^3}{27}$.

$\boxed{P}$ $\dfrac{27}{2e^3}$.

$\boxed{L}$ $\dfrac{e^3}{27}$.

$\boxed{A}$ $\dfrac{27}{e^3}$.

$\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = -1$. Posto $t = x+1$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n)!}{2^n\, n^{3n}}\,(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n)!}{2^n\, n^{3n}}\, t^n.$$

Posto $a_n = (-1)^n \dfrac{(3n)!}{2^n\, n^{3n}}$, si ha che

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(3n+3)!}{2^{n+1}\,(n+1)^{3n+3}} \cdot \frac{2^n\, n^{3n}}{(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cdot(3n)!}{2\cdot 2^n\,(n+1)^3\cdot(n+1)^{3n}} \cdot \frac{2^n\, n^{3n}}{(3n)!} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{2(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3}.$$

Quindi

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{3(3n+2)(3n+1)}{2(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3} = \frac{27}{2e^3}.$$

Per il Teorema del rapporto il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \dfrac{2e^3}{27}$. La risposta corretta è $\boxed{\text{R}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 9, \ x \ge 0, \ y \ge 2\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega x\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy$ vale

$\boxed{P}$ $\dfrac{43}{12}$.

$\boxed{A}$ $\dfrac{97}{20}$.

$\boxed{E}$ $\dfrac{97}{10}$.

$\boxed{R}$ $\dfrac{43}{6}$.

$\boxed{M}$ $\dfrac{6}{7}$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate polari centrate in (0,0) si ottiene

$$\int_\Omega x\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^4 \cos\vartheta \,d\rho\,d\vartheta,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ è l'insieme Ω scritto in coordinate polari. Si ha che

$$(x,y)\in\Omega \iff \begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ x \ge 0 \\ y \ge 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le \rho \le 3 \\ \rho\cos\vartheta \ge 0 \\ \rho\sin\vartheta \ge 2 \\ -\pi \le \vartheta \le \pi \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{2}{\sin\vartheta} \le \rho \le 3 \\ \arcsin\dfrac{2}{3} \le \vartheta \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2 : \ \arcsin\frac{2}{3} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, \ \frac{2}{\sin\vartheta} \le \rho \le 3\right\}.$$

Esendo Ω' un insieme ρ-semplice si ha che

$$\int_\Omega x\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^4\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = \int_{\arcsin\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{2}{\sin\vartheta}}^{3} \rho^4\cos\vartheta\,d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= \int_{\arcsin\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_{\frac{2}{\sin\vartheta}}^{3} d\vartheta = \frac{1}{5}\int_{\arcsin\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\left(243 - \frac{32}{\sin^5\vartheta}\right) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{5}\int_{\arcsin\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(243\cos\vartheta - 32\frac{\cos\vartheta}{\sin^5\vartheta}\right) d\vartheta = \frac{1}{5}\left[243\sin\vartheta + 8\cdot\frac{1}{\sin^4\vartheta}\right]_{\arcsin\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{97}{10}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Quiz 4. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ z = 7 + 4\,e^{x^2+y^2}, \ 4 \le x^2+y^2 \le 5, \ x \ge 0\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\dfrac{3x}{z-7}, \dfrac{3y}{z-7}, \log\left(\dfrac{z-7}{4}\right)\right)$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z, vale

$\boxed{A}$ $\dfrac{5}{3}\left(8-5\sqrt{5}\right)\pi$.

$\boxed{L}$ $-\dfrac{45}{4}\pi$.

$\boxed{R}$ $-\dfrac{45}{2}\pi$.

$\boxed{P}$ $\frac{10}{3}\left(8-5\sqrt{5}\right)\pi$.

$\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è definito e continuo su $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ z>7\right\}$. La superficie Σ, che è contenuta in Ω, è il grafico della funzione $g:K\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=7+4\,e^{x^2+y^2}$, dove

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ 4\le x^2+y^2\le 5,\ \ x\ge 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma=\sigma(K)$, dove $\sigma:K\to\mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y)=(x,y,g(x,y))=\left(x,y,7+4\,e^{x^2+y^2}\right)$.

Ne segue che

$$\int_\Sigma F\cdot n\,d\sigma=\int_K F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y)\,dx\,dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ è

$$N_\sigma(x,y)=\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)=\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),1\right)=\left(-8x\,e^{x^2+y^2},-8y\,e^{x^2+y^2},1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi

$$N(x,y)=N_\sigma(x,y)=\left(-8x\,e^{x^2+y^2},-8y\,e^{x^2+y^2},1\right).$$

Si ha che

$$F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y)=F\left(x,y,7+4\,e^{x^2+y^2}\right)\cdot\left(-8x\,e^{x^2+y^2},-8y\,e^{x^2+y^2},1\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{4}x\,e^{-x^2-y^2},\frac{3}{4}y\,e^{-x^2-y^2},x^2+y^2\right)\cdot\left(-8x\,e^{x^2+y^2},-8y\,e^{x^2+y^2},1\right)=-5\left(x^2+y^2\right).$$

Ne segue che

$$\int_\Sigma F\cdot n\,d\sigma=\int_K F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y)\,dx\,dy=-5\int_K\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy=$$

passando in coordinate polari

$$=-5\int_{K'}\rho^3\,d\rho\,d\vartheta=$$

essendo $K'=\left[2,\sqrt{5}\right]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ si ottiene

$$=-5\pi\int_2^{\sqrt{5}}\rho^3\,d\rho=-5\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_2^{\sqrt{5}}=-\frac{45}{4}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{L}}$.

Quiz 5. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y)=\left(\frac{20x^3y^2}{1+x^4y^2}+3,\ \ \frac{10x^4y}{1+x^4y^2}+6y\right)$ e la curva parametrica $\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t)=\left(t^4-2t^3+(2-t)\,e^{7t^2},\ t^7-2t^6+t\,\cos(2-t)\right)$.

L'integrale di linea di F lungo γ vale

$\boxed{A}$ 6.

$\boxed{P}$ -6.

$\boxed{R}$ -12.

$\boxed{O}$ 12.

$\boxed{E}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F=(f_1,f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=\frac{40x^3y}{\left(1+x^4y^2\right)^2}=\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su Ω, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \dfrac{20x^4y^2}{1+x^4y^2} + 3, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \dfrac{10x^4y}{1+x^2y^4} + 6y. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(\frac{20x^4y^2}{1+x^4y^2} + 3 \right) dx = 5\log\left(1+x^4y^2\right) + 3x + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{10x^4y^2}{1+x^2y^4} + c'(y) = \frac{10x^4y}{1+x^2y^4} + 6y \quad \Longrightarrow \quad c'(y) = 6y \quad \Longrightarrow \quad c(y) = 3y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su Ω è

$$f(x,y) = 5\log\left(1+x^4y^2\right) + 3x + 3y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(2)) - f(\gamma(0)) = f(0,2) - f(2,0) = 12 - 6 = 6.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 6. La funzione $f(x,y) = 19 + \left(2x^2+y^2\right) e^{-x^2-y^2}$

$\boxed{S}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale, uno di massimo locale e uno di sella.

$\boxed{I}$ ha solo un punto stazionario che è di minimo locale.

$\boxed{R}$ ha cinque punti stazionari: uno di minimo locale, due di massimo locale e due di sella.

$\boxed{P}$ ha solo un punto stazionario che è di massimo locale.

$\boxed{E}$ ha cinque punti stazionari: uno di massimo locale, due di minimo locale e due di sella.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{-x^2-y^2}\left(2-2x^2-y^2\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ye^{-x^2-y^2}\left(1-2x^2-y^2\right).$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x\left(2-2x^2-y^2\right) = 0 \\ y\left(1-2x^2-y^2\right) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \quad 2x^2+y^2 = 2 \\ y = 0, \quad 2x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono $(0,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{-x^2-y^2}\left[-2x^2\left(2-x^2-2y^2\right) + 2 - 6x^2 - y^2\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2e^{-x^2-y^2}\left[-2y^2\left(1-2x^2-y^2\right) + 1 - 2x^2 - 3y^2\right], \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xye^{-x^2-y^2}\left(3-2x^2-y^2\right).$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H_f(\pm1,0) = \begin{pmatrix} -8\,e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,\pm1) = \begin{pmatrix} 2\,e^{-1} & 0 \\ 0 & -4\,e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di minimo locale, i punti $(\pm1,0)$ sono di massimo locale mentre i punti e $(0,\pm1)$ sono di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{R}}$.

Quiz 7. Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \neq 0\}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale conservativo su Ω, $f : \Omega \to (-\infty, 0)$ un potenziale di F su Ω, $G : \Omega \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G(x,y) = \dfrac{1}{1 + [f(x,y)]^2} F(x,y)$ e $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ le funzioni $g(x,y) = \dfrac{1}{3} \arctan[f(x,y)]$, $\quad h(x,y) = -\arctan \dfrac{1}{f(x,y)}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{E}$ Le funzioni $3g$ e h non sono potenziali di G su Ω.

$\boxed{S}$ Le funzioni $3g$ e h sono due potenziali di G su Ω ma la funzione $3g - h$ non è costante su Ω.

$\boxed{A}$ La funzione $3g$ è un potenziale di G su Ω mentre la funzione h non lo è.

$\boxed{P}$ La funzione h è un potenziale di G su Ω mentre la funzione $3g$ non lo è.

$\boxed{I}$ Le funzioni $3g$ e h sono due potenziali di G su Ω e la funzione $3g - h$ è costante su Ω.

SVOLGIMENTO

Si osserva che $3g$ e h sono due potenziali di G su Ω perché sono due funzioni differenziabili su Ω e per ogni $(x,y) \in \Omega$ risulta che $\nabla(3g)(x,y) = \nabla h(x,y) = G(x,y)$. Inoltre la funzione $3g - h$ è costante su Ω perché per ogni $(x,y) \in \Omega$ si ha che

$$3g(x,y) - h(x,y) = \arctan[f(x,y)] + \arctan \frac{1}{f(x,y)} = -\frac{\pi}{2}$$

perché $f(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \in \Omega$ e $\arctan t + \arctan \dfrac{1}{t} = -\dfrac{\pi}{2}$ per ogni $t < 0$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{I}}$.

Quiz 8. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{O}$ Se $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

$\boxed{P}$ Se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum a_n$ converge, allora $\sum b_n$ converge.

$\boxed{S}$ Se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

$\boxed{A}$ Se $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

$\boxed{E}$ Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto asintotico se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge. La risposta corretta è $\boxed{\text{S}}$.

Versione V3

Quiz 1. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n+7}{5+n^2\log^3 n}$

$\boxed{A}$ diverge negativamente.

$\boxed{O}$ converge ma non assolutamente.

$\boxed{S}$ è indeterminata.

$\boxed{T}$ diverge positivamente.

$\boxed{P}$ converge assolutamente.

SVOLGIMENTO

La serie è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{3n+7}{5+n^2\log^3 n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+7}{5+n^2\log^3 n}.$$

Si ha che

$$\frac{3n+7}{5+n^2\log^3 n} \sim \frac{3}{n\log^3 n}, \qquad n\to+\infty.$$

La successione $a_n = \dfrac{1}{n\log^3 n}$ è non negativa e decrescente. Considerata la funzione associata $f(x) = \dfrac{1}{x\log^3 x}$ definita per ogni $x\in\mathbb{R}$ con $x\geq 2$, si osserva che anche f è non negativa e decrescente. Per il Criterio di Maclaurin la serie di a_n converge se e solo l'integrale improprio di f su $[2,+\infty)$ converge. Si ha che

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int_2^{+\infty}\frac{1}{x\log^3 x}\,dx =$$

posto $t=\log x$ da cui $dt = \frac{1}{x}\,dx$ si ottiene

$$= \int_{\log 2}^{+\infty}\frac{1}{t^3}\,dt$$

che converge. Per il Criterio di Maclaurin la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge, e per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge assolutamente. La risposta corretta è $\boxed{\text{P}}$.

Quiz 2. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n n^{2n}}{(2n)!}(x-2)^n$ è

$\boxed{P}$ $\dfrac{3e^2}{4}$.

$\boxed{O}$ $\dfrac{4}{3e^2}$.

$\boxed{S}$ $\dfrac{3e^2}{2}$.

$\boxed{T}$ $\dfrac{2}{3e^2}$.

$\boxed{G}$ 0.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 2$. Posto $t = x-1$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n n^{2n}}{(2n)!}(x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n n^{2n}}{(2n)!}t^n.$$

Posto $a_n = (-1)^n \dfrac{3^n\, n^{2n}}{(2n)!}$, si ha che

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}\,(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n\, n^{2n}} = \frac{3\cdot 3^n\,(n+1)^2\cdot(n+1)^{2n}}{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n\, n^{2n}} = \frac{3(n+1)}{2(2n+1)} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2.$$

Quindi

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{3(n+1)}{2(2n+1)} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = \frac{3e^2}{4}.$$

Per il Teorema del rapporto il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \dfrac{4}{3e^2}$. La risposta corretta è $\boxed{\text{O}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\le -2\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ vale

$\boxed{S}$ $\dfrac{43}{12}$.

$\boxed{T}$ $\dfrac{43}{24}$.

$\boxed{G}$ $\dfrac{4}{3}$.

$\boxed{A}$ $\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{B}$ $\dfrac{6}{7}$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate polari centrate in (0,0) si ottiene

$$\int_\Omega x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^3\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta,$$

dove $\Omega'\subseteq\mathbb{R}^2$ è l'insieme Ω scritto in coordinate polari. Si ha che

$$(x,y)\in\Omega \iff \begin{cases} x^2+y^2\le 9 \\ x\ge 0 \\ y\le -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0\le\rho\le 3 \\ \rho\cos\vartheta\ge 0 \\ \rho\sin\vartheta\le -2 \\ -\pi\le\vartheta\le\pi \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{2}{\sin\vartheta}\le\rho\le 3 \\ -\dfrac{\pi}{2}\le\vartheta\le -\arcsin\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Quindi

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2 :\ -\frac{\pi}{2}\le\vartheta\le -\arcsin\frac{2}{3},\ -\frac{2}{\sin\vartheta}\le\rho\le 3\right\}.$$

Esendo Ω' un insieme ρ-semplice si ha che

$$\int_\Omega x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^3\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\frac{2}{3}} \left(\int_{-\frac{2}{\sin\vartheta}}^{3} \rho^3\cos\vartheta\,d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\frac{2}{3}} \cos\vartheta\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{-\frac{2}{\sin\vartheta}}^{3} d\vartheta = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\frac{2}{3}} \cos\vartheta\left(81-\frac{16}{\sin^4\vartheta}\right) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\frac{2}{3}} \left(81\cos\vartheta - 16\frac{\cos\vartheta}{\sin^4\vartheta}\right) d\vartheta = \frac{1}{4}\left[81\sin\vartheta + \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\sin^3\vartheta}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\frac{2}{3}} = \frac{43}{12}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{S}}$.

Quiz 4. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z = 5+3\,e^{x^2+y^2},\ 5\le x^2+y^2\le 6,\ y\le 0\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\dfrac{2x}{5-z}, \dfrac{2y}{5-z}, \log\left(\dfrac{z-5}{3}\right)\right)$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z, vale

$\boxed{B}$ $\dfrac{55}{2}\pi$.

$\boxed{A}$ $\frac{5}{3}\left(6\sqrt{6}-5\sqrt{5}\right)\pi.$

$\boxed{T}$ $\frac{55}{4}\pi.$

$\boxed{G}$ $\frac{10}{3}\left(6\sqrt{6}-5\sqrt{5}\right)\pi.$

$\boxed{S}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è definito e continuo su $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z > 5\}$. La superficie Σ, che è contenuta in Ω, è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 5 + 3\,e^{x^2+y^2}$, dove

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 5 \leq x^2 + y^2 \leq 6, \ \ y \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x, y, 5 + 3\,e^{x^2+y^2}\right)$.

Ne segue che

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ è

$$N_\sigma(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-6x\, e^{x^2+y^2}, -6y\, e^{x^2+y^2}, 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi

$$N(x,y) = N_\sigma(x,y) = \left(-6x\, e^{x^2+y^2}, -6y\, e^{x^2+y^2}, 1\right).$$

Si ha che

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = F\left(x, y, 5 + 3\,e^{x^2+y^2}\right) \cdot \left(-6x\, e^{x^2+y^2}, -6y\, e^{x^2+y^2}, 1\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{3} x\, e^{-x^2-y^2}, -\frac{2}{3} y\, e^{-x^2-y^2}, x^2+y^2\right) \cdot \left(-6x\, e^{x^2+y^2}, -6y\, e^{x^2+y^2}, 1\right) = 5\left(x^2+y^2\right).$$

Ne segue che

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy = 5 \int_K \left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= 5 \int_{K'} \rho^3\, d\rho\, d\vartheta =$$

essendo $K' = \left[\sqrt{5}, \sqrt{6}\right] \times [\pi, 2\pi]$ si ottiene

$$= 5\pi \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \rho^3\, d\rho = 5\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} = \frac{55}{4}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{T}}$.

Quiz 5. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y) = \left(\frac{14xy^4}{1+x^2y^4} - 4x, \ \frac{28x^2y^3}{1+x^2y^4} - 2\right)$ e la curva parametrica $\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^7 - 4t^6 + t\cos(4-t), \ t^4 - 4t^3 + (4-t)\,e^{5t^2}\right)$.

L'integrale di linea di F lungo γ vale

$\boxed{A}$ -24.

$\boxed{S}$ 24.

$\boxed{B}$ -48.

$\boxed{G}$ 48.

$\boxed{P}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{56xy^3}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su Ω, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \dfrac{14xy^4}{1+x^2y^4} - 4x, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \dfrac{28x^2y^3}{1+x^2y^4} - 2. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(\frac{14xy^4}{1+x^2y^4} - 4x \right) dx = 7 \log\left(1+x^2y^4\right) - 2x^2 + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{28x^2y^3}{1+x^2y^4} + c'(y) = \frac{28x^2y^3}{1+x^2y^4} - 2 \quad \Longrightarrow \quad c'(y) = -2 \quad \Longrightarrow \quad c(y) = -2y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su Ω è

$$f(x,y) = 7\log\left(1+x^2y^4\right) - 2x^2 - 2y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(4)) - f(\gamma(0)) = f(4,0) - f(0,4) = -32 + 8 = -24.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 6. La funzione $f(x,y) = 18 - \left(x^2 + 2y^2\right) e^{-x^2-y^2}$

$\boxed{P}$ ha solo un punto stazionario che è di massimo locale.

$\boxed{L}$ ha solo un punto stazionario che è di minimo locale.

$\boxed{I}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale, uno di massimo locale e uno di sella.

$\boxed{S}$ ha cinque punti stazionari: uno di massimo locale, due di minimo locale e due di sella.

$\boxed{T}$ ha cinque punti stazionari: uno di minimo locale, due di massimo locale e due di sella.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xe^{-x^2-y^2}\left(1 - x^2 - 2y^2\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2ye^{-x^2-y^2}\left(2 - x^2 - 2y^2\right).$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x\left(1 - x^2 - 2y^2\right) = 0 \\ y\left(2 - x^2 - 2y^2\right) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \quad x^2 + 2y^2 = 1 \\ y = 0, \quad x^2 + 2y^2 = 2. \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm 1, 0)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2e^{-x^2-y^2}\left[-2x^2\left(1 - x^2 - 2y^2\right) + 1 - 3x^2 - 2y^2\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2e^{-x^2-y^2}\left[-2y^2\left(2 - x^2 - 2y^2\right) + 2 - x^2 - 6y^2\right], \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xye^{-x^2-y^2}\left(3 - x^2 - 2y^2\right).$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 8\,e^{-1} \end{pmatrix}, \qquad H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 4\,e^{-1} & 0 \\ 0 & -2\,e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di massimo locale, i punti $(0,\pm1)$ sono di minimo locale mentre i punti e $(\pm1,0)$ sono di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{S}}$.

Quiz 7. Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0\}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale conservativo su Ω, $f : \Omega \to (0,+\infty)$ un potenziale di F su Ω, $G : \Omega \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G(x,y) = \dfrac{1}{1+[f(x,y)]^2} F(x,y)$ e $g,h : \Omega \to \mathbb{R}$ le funzioni $g(x,y) = \dfrac{1}{2}\arctan[f(x,y)]$, $h(x,y) = -\arctan\dfrac{1}{f(x,y)}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{I}$ Le funzioni $2g$ e h sono due potenziali di G su Ω ma la funzione $2g-h$ non è costante su Ω.

$\boxed{B}$ Le funzioni $2g$ e h sono due potenziali di G su Ω e la funzione $2g-h$ è costante su Ω.

$\boxed{A}$ La funzione $2g$ è un potenziale di G su Ω mentre la funzione h non lo è.

$\boxed{T}$ La funzione h è un potenziale di G su Ω mentre la funzione $2g$ non lo è.

$\boxed{P}$ Le funzioni $2g$ e h non sono potenziali di G su Ω.

SVOLGIMENTO

Si osserva che $2g$ e h sono due potenziali di G su Ω perché sono due funzioni differenziabili su Ω e per ogni $(x,y) \in \Omega$ risulta che $\nabla(2g)(x,y) = \nabla h(x,y) = G(x,y)$. Inoltre la funzione $g-2h$ è costante su Ω perché per ogni $(x,y) \in \Omega$ si ha che

$$2g(x,y) - h(x,y) = \arctan[f(x,y)] + \arctan\frac{1}{f(x,y)} = \frac{\pi}{2}$$

perché $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in \Omega$ e $\arctan t + \arctan\dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi}{2}$ per ogni $t > 0$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Quiz 8. Siano (a_n) una successione reale e $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k|$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{T}$ Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente, allora $\lim_n S_n = 0$.

$\boxed{B}$ Se $\lim_n |a_n| = 0$, allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente.

$\boxed{A}$ Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente, allora $\lim_n |a_n| = 0$.

$\boxed{S}$ Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge assolutamente, allora $\lim_n |a_n| \neq 0$.

$\boxed{P}$ Se $\lim_n S_n \neq 0$, allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge assolutamente.

SVOLGIMENTO

Per definizione la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. Per la condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica, se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora $\lim_n |a_n| = 0$. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Versione V4

Quiz 1. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6-(-1)^n n^2}{5+n^3 \log n}$

$\boxed{K}$ diverge positivamente.

$\boxed{L}$ converge ad un numero maggiore di zero.

$\boxed{I}$ è indeterminata.

$\boxed{T}$ converge ad un numero minore di zero.

$\boxed{G}$ diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6-(-1)^n n^2}{5+n^3 \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2+(-1)^n 6}{5+n^3 \log n}.$$

Poiché per ogni $n \geq 3$ si ha che $-n^2+(-1)^n 6 \leq 0$, la serie è a termini negativi. Quindi converge o diverge negativamente. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{-n^2+(-1)^n 6}{5+n^3 \log n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-(-1)^n 6}{5+n^3 \log n}$$

che è una serie è a termini positivi. Si ha che

$$\frac{n^2-(-1)^n 6}{5+n^3 \log n} \sim \frac{1}{n \log n}, \qquad n \to +\infty.$$

La successione $a_n = \dfrac{1}{n \log n}$ è non negativa e decrescente. Considerata la funzione associata $f(x) = \dfrac{1}{x \log x}$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 2$, si osserva che anche f è non negativa e decrescente. Per il Criterio di Maclaurin la serie di a_n converge se e solo l'integrale improprio di f su $[2,+\infty)$ converge. Si ha che

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\,dx =$$

posto $t = \log x$ da cui $dt = \frac{1}{x}\,dx$ si ottiene

$$= \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$$

che diverge. Per il Criterio di Maclaurin la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ diverge, e per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-(-1)^n 6}{5+n^3 \log n}$ diverge positivamente. Quindi la serie data diverge negativamente. La risposta corretta è $\boxed{\text{G}}$.

Quiz 2. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n n^{3n}}{(3n)!}(x+2)^n$ è

$\boxed{L}$ $\dfrac{27}{2e^3}$.

$\boxed{I}$ $\dfrac{2e^3}{27}$.

$\boxed{A}$ $\dfrac{e^3}{27}$.

$\boxed{T}$ $\dfrac{27}{e^3}$.

$\boxed{K}$ 0.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = -2$. Posto $t = x+2$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n n^{3n}}{(3n)!}(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n n^{3n}}{(3n)!} t^n.$$

Posto $a_n = (-1)^n \dfrac{2^n\, n^{3n}}{(3n)!}$, si ha che

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}\,(n+1)^{3n+3}}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{2^n\, n^{3n}} = \frac{2 \cdot 2^n\,(n+1)^3 \cdot (n+1)^{3n}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cdot(3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{2^n\, n^{3n}} = \frac{2(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3.$$

Quindi

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{2(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = \frac{2e^3}{27}.$$

Per il Teorema del rapporto il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \dfrac{27}{2e^3}$. La risposta corretta è $\boxed{\mathrm{L}}$.

Quiz 3. Sia $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \le -2\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega x\left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy$ vale

$\boxed{O}$ $\dfrac{43}{6}$.

$\boxed{A}$ $\dfrac{97}{20}$.

$\boxed{T}$ $\dfrac{43}{12}$.

$\boxed{I}$ $\dfrac{97}{10}$.

$\boxed{K}$ $\dfrac{6}{7}$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate polari centrate in (0,0) si ottiene

$$\int_\Omega x\left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy = \int_{\Omega'} \rho^4 \cos\vartheta\, d\rho\, d\vartheta,$$

dove $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ è l'insieme Ω scritto in coordinate polari. Si ha che

$$(x,y) \in \Omega \quad \iff \quad \begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ x \ge 0 \\ y \le -2 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le 3 \\ \rho\cos\vartheta \ge 0 \\ \rho\sin\vartheta \le -2 \\ -\pi \le \vartheta \le \pi \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} -\dfrac{2}{\sin\vartheta} \le \rho \le 3 \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \vartheta \le -\arcsin\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Quindi

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le -\arcsin\frac{2}{3},\ -\frac{2}{\sin\vartheta} \le \rho \le 3\right\}.$$

Esendo Ω' un insieme ρ-semplice si ha che

$$\int_\Omega x\left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy = \int_{\Omega'} \rho^4 \cos\vartheta\, d\rho\, d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\frac{2}{3}} \left(\int_{-\frac{2}{\sin\vartheta}}^{3} \rho^4 \cos\vartheta\, d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\frac{2}{3}} \cos\vartheta \left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_{-\frac{2}{\sin\vartheta}}^{3} d\vartheta = \frac{1}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\frac{2}{3}} \cos\vartheta \left(243 + \frac{32}{\sin^5\vartheta}\right) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\frac{2}{3}} \left(243\cos\vartheta + 32\frac{\cos\vartheta}{\sin^5\vartheta}\right) d\vartheta = \frac{1}{5}\left[243\sin\vartheta - 8\cdot\frac{1}{\sin^4\vartheta}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\frac{2}{3}} = \frac{97}{10}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\mathrm{I}}$.

Quiz 4. Si considerino la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 9 + 5\,e^{x^2+y^2},\ 6 \le x^2+y^2 \le 7,\ x \le 0\right\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{9-z}, \dfrac{y}{9-z}, \log\left(\dfrac{z-9}{5}\right)\right)$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z, vale

$\boxed{T}$ $\left(6\sqrt{6} - 5\sqrt{5}\right)\pi$.

$\boxed{A}$ $\frac{39}{4}\pi$.

$\boxed{G}$ $\frac{39}{2}\pi$.

$\boxed{O}$ $2\pi\left(6\sqrt{6}-5\sqrt{5}\right)$.

$\boxed{K}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è definito e continuo su $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ z>9\right\}$. La superficie Σ, che è contenuta in Ω, è il grafico della funzione $g: K\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=9+5\,e^{x^2+y^2}$, dove

$$K = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ 6\le x^2+y^2\le 7,\ \ x\le 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma=\sigma(K)$, dove $\sigma: K\to\mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y)=(x,y,g(x,y))=\left(x,y,9+5\,e^{x^2+y^2}\right)$.

Ne segue che

$$\int_\Sigma F\cdot n\,d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y)\,dx\,dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ in $\sigma(x,y)$ è

$$N_\sigma(x,y)=\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)=\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),1\right)=\left(-10x\,e^{x^2+y^2},-10y\,e^{x^2+y^2},1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi

$$N(x,y)=N_\sigma(x,y)=\left(-10x\,e^{x^2+y^2},-10y\,e^{x^2+y^2},1\right).$$

Si ha che

$$F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y)=F\left(x,y,9+5\,e^{x^2+y^2}\right)\cdot\left(-10x\,e^{x^2+y^2},-10y\,e^{x^2+y^2},1\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{5}x\,e^{-x^2-y^2},-\frac{1}{5}y\,e^{-x^2-y^2},x^2+y^2\right)\cdot\left(-10x\,e^{x^2+y^2},-10y\,e^{x^2+y^2},1\right)=3\left(x^2+y^2\right).$$

Ne segue che

$$\int_\Sigma F\cdot n\,d\sigma=\int_K F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y)\,dx\,dy=3\int_K\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy=$$

passando in coordinate polari

$$=3\int_{K'}\rho^3\,d\rho\,d\vartheta=$$

essendo $K'=\left[\sqrt{6},\sqrt{7}\right]\times\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ si ottiene

$$=3\pi\int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{7}}\rho^3\,d\rho=3\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{\sqrt{6}}^{\sqrt{7}}=\frac{39}{4}\pi.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 5. Si considerino il campo vettoriale $F(x,y)=\left(\frac{28x^3y^2}{1+x^4y^2}-3,\ \frac{14x^4y}{1+x^4y^2}-6y\right)$ e la curva parametrica $\gamma:[0,5]\to\mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t)=\left(t^4-5t^3+(5-t)\,e^{7t^2},\ t^7-5t^6+t\,\cos(5-t)\right)$.

L'integrale di linea di F lungo γ vale

$\boxed{G}$ -120.

$\boxed{A}$ 60.

$\boxed{T}$ -60.

$\boxed{O}$ 120.

$\boxed{K}$ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$, si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{56x^3y}{(1+x^4y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Denotato con f un potenziale di F su Ω, si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \dfrac{28x^4y^2}{1+x^4y^2} - 3, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \dfrac{14x^4y}{1+x^2y^4} - 6y. \end{cases}$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ha che

$$f(x,y) = \int \left(\frac{28x^4y^2}{1+x^4y^2} - 3 \right) dx = 7\log\left(1+x^4y^2\right) - 3x + c(y),$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y. Sostituendo nella seconda uguaglianza si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{14x^4y}{1+x^2y^4} + c'(y) = \frac{14x^4y}{1+x^2y^4} - 6y \quad \Longrightarrow \quad c'(y) = -6y \quad \Longrightarrow \quad c(y) = -3y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su Ω è

$$f(x,y) = 7\log\left(1+x^4y^2\right) - 3x - 3y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà dei campi conservativi, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(5)) - f(\gamma(0)) = f(0,5) - f(5,0) = -75 + 15 = -60.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{T}}$.

Quiz 6. La funzione $f(x,y) = 19 - \left(2x^2+y^2\right) e^{-x^2-y^2}$

$\boxed{A}$ ha cinque punti stazionari: uno di massimo locale, due di minimo locale e due di sella.

$\boxed{G}$ ha solo un punto stazionario che è di minimo locale.

$\boxed{T}$ ha tre punti stazionari: uno di minimo locale, uno di massimo locale e uno di sella.

$\boxed{L}$ ha solo un punto stazionario che è di massimo locale.

$\boxed{I}$ ha cinque punti stazionari: uno di minimo locale, due di massimo locale e due di sella.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xe^{-x^2-y^2}\left(2-2x^2-y^2\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2ye^{-x^2-y^2}\left(1-2x^2-y^2\right).$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x\left(2-2x^2-y^2\right) = 0 \\ y\left(1-2x^2-y^2\right) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \quad 2x^2+y^2 = 2 \\ y = 0, \quad 2x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm 1, 0)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2e^{-x^2-y^2}\left[-2x^2\left(2-x^2-2y^2\right) + 2 - 6x^2 - y^2\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2e^{-x^2-y^2}\left[-2y^2\left(1-2x^2-y^2\right) + 1 - 2x^2 - 3y^2\right], \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xye^{-x^2-y^2}\left(3-2x^2-y^2\right).$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8\,e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -2\,e^{-1} & 0 \\ 0 & 4\,e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di massimo locale, i punti $(\pm 1, 0)$ sono di minimo locale mentre i punti e $(0, \pm 1)$ sono di sella per f. La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Quiz 7. Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \neq 0\}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale conservativo su Ω, $f : \Omega \to (-\infty, 0)$ un potenziale di F su Ω, $G : \Omega \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G(x,y) = \dfrac{1}{1 + [f(x,y)]^2} F(x,y)$ e $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ le funzioni $g(x,y) = \arctan[f(x,y)]$, $h(x,y) = -\dfrac{1}{3} \arctan \dfrac{1}{f(x,y)}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{T}$ Le funzioni g e $3h$ non sono potenziali di G su Ω.

$\boxed{A}$ Le funzioni g e $3h$ sono due potenziali di G su Ω ma la funzione $g - 3h$ non è costante su Ω.

$\boxed{G}$ La funzione g è un potenziale di G su Ω mentre la funzione $3h$ non lo è.

$\boxed{K}$ La funzione $3h$ è un potenziale di G su Ω mentre la funzione g non lo è.

$\boxed{O}$ Le funzioni g e $3h$ sono due potenziali di G su Ω e la funzione $g - 3h$ è costante su Ω.

SVOLGIMENTO

Si osserva che g e $3h$ sono due potenziali di G su Ω perché sono due funzioni differenziabili su Ω e per ogni $(x,y) \in \Omega$ risulta che $\nabla g(x,y) = \nabla(3h)(x,y) = G(x,y)$. Inoltre la funzione $g - 3h$ è costante su Ω perché per ogni $(x,y) \in \Omega$ si ha che

$$g(x,y) - 3h(x,y) = \arctan[f(x,y)] + \arctan \frac{1}{f(x,y)} = -\frac{\pi}{2}$$

perché $f(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \in \Omega$ e $\arctan t + \arctan \dfrac{1}{t} = -\dfrac{\pi}{2}$ per ogni $t < 0$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{O}}$.

Quiz 8. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{O}$ Se $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

$\boxed{K}$ Se $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

$\boxed{A}$ Se $a_n \leq 0 \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

$\boxed{L}$ Se $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ converge, allora $\sum b_n$ converge.

$\boxed{G}$ Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto se $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge. La risposta corretta è $\boxed{\text{K}}$.
