

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V1	B	D	E	A	D	D	D	C

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\log(1 + x^6 + x^8), \frac{1}{2}z^2 + 4x^2y + e^{y^9}, 2xy + yz + \sqrt{1 + z^8} \right)$$

lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 - 2y^2 + 5, x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$$

orientato positivamente rispetto al vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

SVOLGIMENTO

Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n \, d\sigma,$$

dove $\text{rot}F$ è il rotore del campo vettoriale F , che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è

$$\text{rot}F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \log(1 + x^6 + x^8) & \frac{1}{2}z^2 + 4x^2y + e^{y^9} & 2xy + yz + \sqrt{1 + z^8} \end{vmatrix} = (2x, -2y, 8xy).$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + 5$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, 2x^2 - 2y^2 + 5)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-4x, 4y, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Si ha che

$$\begin{aligned} \text{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \text{rot}F(x, y, 2x^2 - 2y^2 + 5) \cdot (-4x, 4y, 1) = \\ &= (2x, -2y, 8xy) \cdot (-4x, 4y, 1) = 8xy - 8x^2 - 8y^2. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (8xy - 8x^2 - 8y^2) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= \int_{K'} (8\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta - 8\rho^3) \, d\rho \, d\vartheta =$$

con $K' = [0, 3] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

$$= 8 \left(\int_0^3 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta \sin \vartheta - 1) \, d\vartheta \right) = 8 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^3 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta - \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 81 - 81\pi.$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V2	D	D	B	A	B	B	D	E

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\log(1 + x^2 + x^4), \frac{3}{4}z^2 + 3x^2y + e^{y^5}, 3xy + \frac{3}{2}yz + \sqrt{1 + z^4} \right)$$

lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3x^2 - 3y^2 + 4, x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \leq 0\}$$

orientato positivamente rispetto al vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

SVOLGIMENTO

Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove $\operatorname{rot} F$ è il rotore del campo vettoriale F , che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \log(1 + x^2 + x^4) & \frac{3}{4}z^2 + 3x^2y + e^{y^5} & 3xy + \frac{3}{2}yz + \sqrt{1 + z^4} \end{vmatrix} = \\ &= (3x, -3y, 6xy). \end{aligned}$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 4$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, 3x^2 - 3y^2 + 4)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-6x, 6y, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F(x, y, 3x^2 - 3y^2 + 4) \cdot (-6x, 6y, 1) = \\ &= (3x, -3y, 6xy) \cdot (-6x, 6y, 1) = 6xy - 18x^2 - 18y^2. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (6xy - 18x^2 - 18y^2) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= \int_{K'} (6\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta - 18\rho^3) \, d\rho \, d\vartheta =$$

con $K' = [0, 2] \times [\pi, \frac{3}{2}\pi]$

$$= 6 \left(\int_0^2 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (\cos \vartheta \sin \vartheta - 3) \, d\vartheta \right) = 6 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta - 3\vartheta \right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = 12 - 36\pi.$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V3	A	C	B	B	E	B	C	D

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\log(1 + x^4 + x^6), \frac{1}{2}z^2 - 4x^2y + e^{y^7}, 2xy + yz + \sqrt{1 + z^6} \right)$$

lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 7 - 2x^2 + 2y^2, x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \leq 0\}$$

orientato positivamente rispetto al vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

SVOLGIMENTO

Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove $\operatorname{rot} F$ è il rotore del campo vettoriale F , che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \log(1 + x^4 + x^6) & \frac{1}{2}z^2 - 4x^2y + e^{y^7} & 2xy + yz + \sqrt{1 + z^6} \end{vmatrix} = (2x, -2y, -8xy).$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 7 - 2x^2 + 2y^2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, 7 - 2x^2 + 2y^2)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (4x, -4y, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F(x, y, 7 - 2x^2 + 2y^2) \cdot (4x, -4y, 1) = \\ &= (2x, -2y, -8xy) \cdot (4x, -4y, 1) = 8x^2 + 8y^2 - 8xy. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (8x^2 + 8y^2 - 8xy) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= \int_{K'} (8\rho^3 - 8\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta =$$

con $K' = [0, 3] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]$

$$= 8 \left(\int_0^3 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos \vartheta \sin \vartheta) \, d\vartheta \right) = 8 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^3 \left[\vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 81 + 81\pi.$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V4	E	E	B	D	A	B	E	C

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\log(1 + x^4 + x^8), \frac{3}{4}z^2 - 3x^2y + e^{y^3}, 3xy + \frac{3}{2}yz + \sqrt{1 + z^2} \right)$$

lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 8 - 3x^2 + 3y^2, x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$$

orientato positivamente rispetto al vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

SVOLGIMENTO

Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove $\operatorname{rot} F$ è il rotore del campo vettoriale F , che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \log(1 + x^4 + x^8) & \frac{3}{4}z^2 - 3x^2y + e^{y^3} & 3xy + \frac{3}{2}yz + \sqrt{1 + z^2} \end{vmatrix} = \\ &= (3x, -3y, -6xy). \end{aligned}$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 8 - 3x^2 + 3y^2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, 8 - 3x^2 + 3y^2)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (6x, -6y, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \operatorname{rot} F(x, y, 8 - 3x^2 + 3y^2) \cdot (6x, -6y, 1) = \\ &= (3x, -3y, -6xy) \cdot (6x, -6y, 1) = 18x^2 + 18y^2 - 6xy. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (18x^2 + 18y^2 - 6xy) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= \int_{K'} (18\rho^3 - 6\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta =$$

con $K' = [0, 2] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$= 6 \left(\int_0^2 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (3 - \cos \vartheta \sin \vartheta) \, d\vartheta \right) = 6 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 \left[3\vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 36\pi + 12.$$