

Versione: V1

Quiz 1. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^6 + z^2 \leq 9, z \leq 2\}$. L'integrale $\int_{\Omega} 6z(x^2 + y^2)^5 dx dy dz$ vale

☐ A $-\frac{9}{4}\pi.$

☐ B $-\frac{25}{4}\pi.$

☐ C $\frac{9}{4}\pi.$

☐ D $-\frac{21}{4}\pi.$

☐ E $\frac{37}{4}\pi.$

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z si ha che

$$\int_{\Omega} 6z(x^2 + y^2)^5 dx dy dz = 6 \int_{\Omega'} z \rho^{11} d\rho d\vartheta dz,$$

dove

$$\begin{aligned} \Omega' &= \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho^{12} + z^2 \leq 9, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, z \leq 2, \rho \geq 0\} = \\ &= \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq \sqrt[12]{9 - z^2}, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, -3 \leq z \leq 2\}. \end{aligned}$$

Integrando per fili paralleli all'asse ϑ si ha che

$$\int_{\Omega} 6z(x^2 + y^2)^5 dx dy dz = 6 \int_{\Omega'} z \rho^{11} d\rho d\vartheta dz = 12\pi \int_D z \rho^{11} d\rho dz =$$

con $D = \{(\rho, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq \sqrt[12]{9 - z^2}, -3 \leq z \leq 2\}$ che è un insieme ρ -semplice e quindi si ottiene

$$= 12\pi \int_{-3}^2 z \left(\int_0^{\sqrt[12]{9 - z^2}} \rho^{11} d\rho \right) dz = 12\pi \int_{-3}^2 z \left[\frac{1}{12} \rho^{12} \right]_0^{\sqrt[12]{9 - z^2}} dz = \pi \int_{-3}^2 z (9 - z^2) dz = \pi \left[-\frac{1}{4} (9 - z^2)^2 \right]_{-3}^2 = -\frac{25}{4}\pi.$$

La risposta corretta è ☒ B.

Quiz 2. Il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x(z - 2), y(z - 2), z - \sqrt{3 - x^2 - y^2})$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 + \sqrt{3 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 2\}$, orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

☐ A $\frac{16}{3}\sqrt{2}\pi.$

☐ B $0.$

☐ C $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi.$

☐ D $6\pi.$

☐ E $2\pi.$

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = 2 + \sqrt{3 - x^2 - y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 2 + \sqrt{3 - x^2 - y^2})$.

Il flusso di F attraverso Σ , orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z è

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F(x, y, 2 + \sqrt{3-x^2-y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}, 1 \right) = \\ &= \left(x\sqrt{3-x^2-y^2}, y\sqrt{3-x^2-y^2}, 2 \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}, 1 \right) = x^2 + y^2 + 2. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (x^2 + y^2 + 2) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= \int_{K'} \rho (\rho^2 + 2) \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K' = [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho (\rho^2 + 2) \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{4} (\rho^2 + 2)^2 \right]_0^{\sqrt{2}} = 6\pi.$$

La risposta corretta è ☐ D ☒.

Quiz 3. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ A Nessuna delle altre è corretta.
- ☐ B Se $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.
- ☐ C Se $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.
- ☐ D Se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ converge, allora $\sum b_n$ converge.
- ☐ E Se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto asintotico se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge. La risposta corretta è ☐ E ☒.

Quiz 4. Siano $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 8y^2 + 3z^2 - 2xz \leq 4\}$. Posto $u = x + 2y - z$, $v = x - 2y - z$, $w = x + z$, l'integrale $\int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ è uguale a

- ☐ A $\int_A \frac{1}{8} f\left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right) \, du \, dv \, dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 4\}$.
- ☐ B $\int_A 8 f\left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right) \, du \, dv \, dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 4\}$.
- ☐ C $\int_A f\left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right) \, du \, dv \, dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 3u^2 + 8v^2 + 3w^2 - 2uw \leq 4\}$.
- ☐ D $\int_A f(u, v, w) \, du \, dv \, dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 3u^2 + 8v^2 + 3w^2 - 2uw \leq 4\}$.

$$\boxed{E} \int_A \left(-\frac{1}{8}\right) f\left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right) du dv dw, \text{ con } A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 4\}.$$

SVOLGIMENTO

Per ogni $(x, y, z) \in \Omega$ si ha che

$$\begin{cases} u = x + 2y - z \\ v = x - 2y - z \\ w = x + z. \end{cases}$$

Ricavando x, y, z in funzione di u, v, w si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{u+v+2w}{4} \\ y = \frac{u-v}{4} \\ z = \frac{2w-u-v}{4}. \end{cases}$$

Denotata con $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $\Phi(u, v, w) = \left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right)$, si osserva che Φ è di classe C^1 e che la matrice Jacobiana di Φ in ogni $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ è

$$J_{\Phi}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Quindi il modulo del determinante della matrice Jacobiana di Φ in (u, v, w) è $|\det J_{\Phi}(u, v, w)| = \frac{1}{8}$. Poiché la matrice Jacobiana di Φ è anche la matrice del sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{u+v+2w}{4} = x \\ \frac{u-v}{4} = y \\ \frac{2w-u-v}{4} = z, \end{cases}$$

ed essendo non nullo il suo determinante, ne segue che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ questo sistema ammette un'unica soluzione, ovvero la funzione Φ è biettiva.

Inoltre

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \Omega &\implies 3x^2 + 8y^2 + 3z^2 - 2xz \leq 4 \implies \\ \frac{3}{16} (u^2 + v^2 + 4w^2 + 2uv + 4uw + 4vw) &+ \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + 2uv) + \\ &+ \frac{3}{16} (4w^2 + u^2 + 4w^2 - 4uw - 4vw + 2uv) - \frac{1}{8} (4w^2 - u^2 - v^2 - 2uv) \leq 4 \\ &\implies u^2 + v^2 + w^2 \leq 4. \end{aligned}$$

Ne segue che $\Phi(A) = \Omega$, dove $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 4\}$. Per il Teorema del cambiamento di variabili negli integrali tripli si ha che

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_A f(\Phi(u, v, w)) |\det J_{\Phi}(u, v, w)| du dv dw = \int_A \frac{1}{8} f\left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right) du dv dw.$$

La risposta corretta è $\boxed{A}$.

Quiz 5. L'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n \sqrt{n+1}}{n^2 4^n} (x-1)^n$ è

$\boxed{A}$ un intervallo aperto limitato.

$\boxed{B}$ un intervallo limitato contenente l'estremo di destra ma non quello di sinistra.

$\boxed{C}$ $\mathbb{R}$.

$\boxed{D}$ un intervallo chiuso limitato.

$\boxed{E}$ un intervallo limitato contenente l'estremo di sinistra ma non quello di destra.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 1$. Posto $t = x - 1$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n \sqrt{n+1}}{n^2 4^n} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n \sqrt{n+1}}{n^2 4^n} t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0.

Si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{3^n \sqrt{n+1}}{n^2 4^n} \right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{3^n \sqrt{n+1}}{n^2 4^n}} = \frac{3}{4}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{4}{3}$. Quindi la serie di potenze centrata in 0 converge assolutamente in $(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

Per $t = \frac{4}{3}$ si ha la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n \sqrt{n+1}}{n^2 4^n} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$$

che converge assolutamente perché

$$\left| (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} \right| \sim \frac{1}{n^{3/2}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Per $t = -\frac{4}{3}$ si ha la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n \sqrt{n+1}}{n^2 4^n} \left(-\frac{4}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$$

che converge per quanto appena detto. Quindi la serie di potenze centrata in 0 converge puntualmente in $[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$. Essendo $x = t + 1$, la serie di potenze centrata in 1 converge puntualmente in $[-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}]$. La risposta corretta è **D**.

Quiz 6. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = 2e^{x^2-3y^2} + 5y$ nel punto $(1, 0, f(1, 0))$ è

A $z = 2ex.$

B $z = x + 5y + 2e.$

C $z = 4ex + 5y + 6e.$

D $z = 4ex + 5y - 2e.$

E $z = 4ex + 5y - 4e.$

SVOLGIMENTO

L'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto $(1, 0, f(1, 0))$ è

$$z = f(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)y.$$

Si ha che $f(1, 0) = 2e$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x e^{x^2-3y^2} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 4e, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6y e^{x^2-3y^2} + 5 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 5.$$

Quindi l'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto $(1, 0, f(1, 0))$ è

$$z = 2e + 4e(x-1) + 5y \implies z = 4ex + 5y - 2e.$$

La risposta corretta è **D**.

Quiz 7. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n \log n}{n^5 + 3^n}$

A diverge negativamente.

☐ B diverge positivamente.

☐ C converge a zero.

☐ D converge ad un numero maggiore di zero.

☐ E converge ad un numero minore di zero.

SVOLGIMENTO

Poiché $2^n > \log n$ per ogni $n \geq 1$, la serie è a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente. Si ha che

$$\frac{2^n + (-1)^n \log n}{n^5 + 3^n} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge, evidentemente ad un numero maggiore di zero. La risposta corretta è ☒ D .

Quiz 8. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = (12x^3y^3 + 6x^2y^2 + 5y^4, 9x^4y^2 + 4x^3y + 20xy^3 + 2)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^8 - t^2 \cos(2\pi t) + t e^{t-1}, t^6 - t^5 + t + e^t \sin(\pi t))$ vale

☐ A -12.

☐ B 0.

☐ C 12.

☐ D 2.

☐ E -2

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è un insieme semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 36x^3y^2 + 12x^2y + 20y^3 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Un potenziale f di F su $\mathbb{R}^2$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 12x^3y^3 + 6x^2y^2 + 5y^4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 9x^4y^2 + 4x^3y + 20xy^3 + 2. \end{cases}$$

Integrando rispetto a x la prima relazione si ottiene

$$f(x, y) = \int [12x^3y^3 + 6x^2y^2 + 5y^4] dx = 3x^4y^3 + 2x^3y^2 + 5xy^4 + c(y),$$

dove c è una generica funzione dipendente solo da y . Sostituendo nella seconda relazione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 9x^4y^2 + 4x^3y + 20xy^3 + c'(y) = 9x^4y^2 + 4x^3y + 20xy^3 + 2 \implies c'(y) = 2 \implies c(y) = 2y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 3x^4y^3 + 2x^3y^2 + 5xy^4 + 2y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1, 1) - f(0, 0) = 12.$$

La risposta corretta è ☒ C .

Versione: V2

Quiz 1. L'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \sqrt{n+2}}{n 5^n} (x+1)^n$ è

- ☐ **A** $\mathbb{R}$.
- ☐ **B** un intervallo chiuso limitato.
- ☐ **C** un intervallo limitato contenente l'estremo di sinistra ma non quello di destra.
- ☐ **D** un intervallo limitato contenente l'estremo di destra ma non quello di sinistra.
- ☐ **E** un intervallo aperto limitato.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = -1$. Posto $t = x + 1$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \sqrt{n+2}}{n 5^n} (x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \sqrt{n+2}}{n 5^n} t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0.

Si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{2^n \sqrt{n+2}}{n 5^n} \right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n \sqrt{n+2}}{n 5^n}} = \frac{2}{5}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{5}{2}$. Quindi la serie di potenze centrata in 0 converge assolutamente in $(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

Per $t = \frac{5}{2}$ si ha la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \sqrt{n+2}}{n 5^n} \left(\frac{5}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+2}}{n}$$

che è una serie a termini di segno alterno che non converge assolutamente perché

$$\left| (-1)^n \frac{\sqrt{n+2}}{n} \right| \sim \frac{1}{n^{1/2}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Posto $b_n = \frac{\sqrt{n+2}}{n}$, si ha che $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e inoltre (b_n) è decrescente. Infatti, posto $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$ per ogni $x \geq 1$, si ha che $f'(x) = -\frac{x+4}{2x^2\sqrt{x+2}} \leq 0$ per ogni $x \geq 1$. Quindi f è decrescente su $[1, +\infty)$ e di conseguenza (b_n) è decrescente. Per il Criterio di Leibniz la serie in $t = \frac{5}{2}$ converge.

Per $t = -\frac{5}{2}$ si ha la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+2}}{n} \left(-\frac{5}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n}$$

che diverge per quanto detto sopra. Quindi la serie di potenze centrata in 0 converge puntualmente in $(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$. Essendo $x = t - 1$, la serie di potenze centrata in -1 converge puntualmente in $(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}]$. La risposta corretta è ☒ **D**.

Quiz 2. Il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x(z+2), y(z+2), z - \sqrt{4-x^2-y^2})$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2 + \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 3\}$, orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

- ☐ **A** $-\sqrt{3}\pi$.
- ☐ **B** 0.
- ☐ **C** $-\frac{\pi}{2}$.
- ☐ **D** $-\frac{3}{2}\pi$.
- ☐ **E** $-2\sqrt{3}\pi$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = -2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, -2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2})$.

Il flusso di F attraverso Σ , orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z è

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F\left(x, y, -2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = \\ &= \left(x\sqrt{4 - x^2 - y^2}, y\sqrt{4 - x^2 - y^2}, -2 \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1 \right) = x^2 + y^2 - 2. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (x^2 + y^2 - 2) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= \int_{K'} \rho (\rho^2 - 2) \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K' = [0, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho (\rho^2 - 2) \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{4} (\rho^2 - 2)^2 \right]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{3}{2}\pi.$$

La risposta corretta è D.

Quiz 3. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = 3e^{y^2 - 2x^2} + 2x$ nel punto $(0, 1, f(0, 1))$ è

A $z = 2x + y + 3e.$

B $z = 2x + 6ey - 3e.$

C $z = 2x + 6ey - 6e.$

D $z = 3ey.$

E $z = 2x + 6ey + 9e.$

SVOLGIMENTO

L'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto $(0, 1, f(0, 1))$ è

$$z = f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1).$$

Si ha che $f(0, 1) = 3e$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -12x e^{y^2 - 2x^2} + 2 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6y e^{y^2 - 2x^2} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 6e.$$

Quindi l'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto $(0, 1, f(0, 1))$ è

$$z = 3e + 2x + 6e(y - 1) \implies z = 2x + 6ey - 3e.$$

La risposta corretta è ☐ B .

Quiz 4. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = (28x^3y + 6x^2y^4 + 8xy^3 + 3, 7x^4 + 8x^3y^3 + 12x^2y^2)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^8 - t^6 + t^3 + e^t \sin(\pi t), t^3 - t^2 \cos(2\pi t) + t^4 e^{t-1})$ vale

☐ A 16.

☐ B -3

☐ C 3.

☐ D -16.

☐ E 0.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è un insieme semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 28x^3 + 24x^2y^3 + 24xy^2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Un potenziale f di F su $\mathbb{R}^2$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 28x^3y + 6x^2y^4 + 8xy^3 + 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 7x^4 + 8x^3y^3 + 12x^2y^2. \end{cases}$$

Integrando rispetto a y la seconda relazione si ottiene

$$f(x, y) = \int [7x^4 + 8x^3y^3 + 12x^2y^2] dy = 7x^4y + 2x^3y^4 + 4x^2y^3 + c(x),$$

dove c è una generica funzione dipendente solo da x . Sostituendo nella prima relazione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 28x^3y + 6x^2y^4 + 8xy^3 + c'(x) = 28x^3y + 6x^2y^4 + 8xy^3 + 3 \implies c'(x) = 3 \implies c(x) = 3x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 7x^4y + 2x^3y^4 + 4x^2y^3 + 3x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1, 1) - f(0, 0) = 16.$$

La risposta corretta è ☐ A .

Quiz 5. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^{12} + z^2 \leq 4, \quad z \geq -1\}$. L'integrale $\int_{\Omega} 12z(x^2 + y^2)^{11} dx dy dz$ vale

☐ A -2π .

☐ B $\frac{9}{4}\pi$.

☐ C 2π .

☐ D $\frac{21}{4}\pi$.

☐ E $-\frac{37}{4}\pi$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z si ha che

$$\int_{\Omega} 12 z (x^2 + y^2)^{11} dx dy dz = 12 \int_{\Omega'} z \rho^{23} d\rho d\vartheta dz,$$

dove

$$\begin{aligned}\Omega' &= \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho^{24} + z^2 \leq 4, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, z \geq -1, \rho \geq 0\} = \\ &= \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq \sqrt[24]{4 - z^2}, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, -1 \leq z \leq 2\}.\end{aligned}$$

Integrando per fili paralleli all'asse ϑ si ha che

$$\int_{\Omega} 12 z (x^2 + y^2)^{11} dx dy dz = 12 \int_{\Omega'} z \rho^{23} d\rho d\vartheta dz = 24\pi \int_D z \rho^{23} d\rho dz =$$

con $D = \{(\rho, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq \sqrt[24]{4 - z^2}, -1 \leq z \leq 2\}$ che è un insieme ρ -semplice e quindi si ottiene

$$= 24\pi \int_{-1}^2 z \left(\int_0^{\sqrt[24]{4 - z^2}} \rho^{23} d\rho \right) dz = 24\pi \int_{-1}^2 z \left[\frac{1}{24} \rho^{24} \right]_0^{\sqrt[24]{4 - z^2}} dz = \pi \int_{-1}^2 z (4 - z^2) dz = \pi \left[-\frac{1}{4} (4 - z^2)^2 \right]_{-1}^2 = \frac{9}{4}\pi.$$

La risposta corretta è .

Quiz 6. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Se $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.
- ☐ **B** Se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.
- ☐ **C** Se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge.
- ☐ **D** Se $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge.
- ☐ **E** Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto asintotico se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge. La risposta corretta è .

Quiz 7. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-1)^n \log n}{n^2 + n 4^n}$

- ☐ **A** diverge negativamente.
- ☐ **B** converge ad un numero maggiore di zero.
- ☐ **C** converge a zero.
- ☐ **D** diverge positivamente.
- ☐ **E** converge ad un numero minore di zero.

SVOLGIMENTO

Poiché $4^n > \log n$ per ogni $n \geq 1$, la serie è a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente. Si ha che

$$\frac{4^n + (-1)^n \log n}{n^2 + n 4^n} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data diverge. La risposta corretta è .

Quiz 8. Siano $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 + 18z^2 - 2xy \leq 1\}$. Posto $u = x - y + 3z$, $v = x - y - 3z$, $w = x + y$, l'integrale $\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ è uguale a

$$\boxed{A} \int_A f(u, v, w) du dv dw, \text{ con } A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 3u^2 + 3v^2 + 18w^2 - 2uv \leq 1\}.$$

$$\boxed{B} \int_A 12 f\left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right) du dv dw, \text{ con } A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}.$$

$$\boxed{C} \int_A f\left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right) du dv dw, \text{ con } A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 3u^2 + 3v^2 + 18w^2 - 2uv \leq 1\}.$$

$$\boxed{D} \int_A \left(-\frac{1}{12}\right) f\left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right) du dv dw, \text{ con } A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}.$$

$$\boxed{E} \int_A \frac{1}{12} f\left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right) du dv dw, \text{ con } A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}.$$

SVOLGIMENTO

Per ogni $(x, y, z) \in \Omega$ si ha che

$$\begin{cases} u = x - y + 3z \\ v = x - y - 3z \\ w = x + y. \end{cases}$$

Ricavando x, y, z in funzione di u, v, w si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{u+v+2w}{4} \\ y = \frac{2w-u-v}{4} \\ z = \frac{u-v}{6}. \end{cases}$$

Denotata con $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $\Phi(u, v, w) = \left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right)$, si osserva che Φ è di classe C^1 e che la matrice Jacobiana di Φ in ogni $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ è

$$J_{\Phi}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il modulo del determinante della matrice Jacobiana di Φ in (u, v, w) è $|\det J_{\Phi}(u, v, w)| = \frac{1}{12}$. Poiché la matrice Jacobiana di Φ è anche la matrice del sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{u+v+2w}{4} = x \\ \frac{2w-u-v}{4} = y \\ \frac{u-v}{6} = z, \end{cases}$$

ed essendo non nullo il suo determinante, ne segue che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ questo sistema ammette un'unica soluzione, ovvero la funzione Φ è biettiva.

Inoltre

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \Omega &\implies 3x^2 + 3y^2 + 18z^2 - 2xy \leq 1 \implies \\ &\frac{3}{16} (u^2 + v^2 + 4w^2 + 2uv + 4uw + 4vw) + \frac{3}{16} (4w^2 + u^2 + 4w^2 - 4uw - 4vw + 2uv) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 - 2uv) - \frac{1}{8} (4w^2 - u^2 - v^2 - 2uv) \leq 1 \\ &\implies u^2 + v^2 + w^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Ne segue che $\Phi(A) = \Omega$, dove $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$. Per il Teorema del cambiamento di variabili negli integrali tripli si ha che

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_A f(\Phi(u, v, w)) |\det J_{\Phi}(u, v, w)| du dv dw = \int_A \frac{1}{12} f\left(\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right) du dv dw.$$

La risposta corretta è $\boxed{E}$.

Versione: V3

Quiz 1. L'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n \sqrt{n^2+1}}{n 3^n} (x-2)^n$ è

- ☐ **A** un intervallo aperto limitato.
- ☐ **B** $\mathbb{R}$.
- ☐ **C** un intervallo limitato contenente l'estremo di destra ma non quello di sinistra.
- ☐ **D** un intervallo chiuso limitato.
- ☐ **E** un intervallo limitato contenente l'estremo di sinistra ma non quello di destra.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 2$. Posto $t = x - 2$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n \sqrt{n^2+1}}{n 3^n} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n \sqrt{n^2+1}}{n 3^n} t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0.

Si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{4^n \sqrt{n^2+1}}{n 3^n} \right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{4^n \sqrt{n^2+1}}{n 3^n}} = \frac{4}{3}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{3}{4}$. Quindi la serie di potenze centrata in 0 converge assolutamente in $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$.

Per $t = \frac{3}{4}$ si ha la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n \sqrt{n^2+1}}{n 3^n} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$$

che non converge perché non soddisfa la condizione necessaria, essendo

$$\lim_n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1 \neq 0.$$

Per $t = -\frac{4}{3}$ si ha la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n \sqrt{n^2+1}}{n 3^n} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$$

che non converge per quanto appena detto. Quindi la serie di potenze centrata in 0 converge puntualmente in $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. Essendo $x = t + 2$, la serie di potenze centrata in 2 converge puntualmente in $(\frac{5}{4}, \frac{11}{4})$. La risposta corretta è ☒ **A**.

Quiz 2. Siano $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 8y^2 + 3z^2 + 2xz \leq 9\}$. Posto $u = -x + 2y - z$, $v = -x - 2y - z$, $w = -x + z$, l'integrale $\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ è uguale a

- ☐ **A** $\int_A f(u, v, w) du dv dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 3u^2 + 8v^2 + 3w^2 + 2uw \leq 9\}$.
- ☐ **B** $\int_A \left(-\frac{1}{8}\right) f\left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right) du dv dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 9\}$.
- ☐ **C** $\int_A \frac{1}{8} f\left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right) du dv dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 9\}$.
- ☐ **D** $\int_A f\left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right) du dv dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 3u^2 + 8v^2 + 3w^2 + 2uw \leq 9\}$.
- ☐ **E** $\int_A 8 f\left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right) du dv dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 9\}$.

SVOLGIMENTO

Per ogni $(x, y, z) \in \Omega$ si ha che

$$\begin{cases} u = -x + 2y - z \\ v = -x - 2y - z \\ w = -x + z. \end{cases}$$

Ricavando x, y, z in funzione di u, v, w si ottiene

$$\begin{cases} x = -\frac{u+v+2w}{4} \\ y = \frac{u-v}{4} \\ z = \frac{2w-u-v}{4}. \end{cases}$$

Denotata con $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $\Phi(u, v, w) = \left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right)$, si osserva che Φ è di classe C^1 e che la matrice Jacobiana di Φ in ogni $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ è

$$J_{\Phi}(u, v, w) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Quindi il modulo del determinante della matrice Jacobiana di Φ in (u, v, w) è $|\det J_{\Phi}(u, v, w)| = \frac{1}{8}$. Poiché la matrice Jacobiana di Φ è anche la matrice del sistema lineare

$$\begin{cases} -\frac{u+v+2w}{4} = x \\ \frac{u-v}{4} = y \\ \frac{2w-u-v}{4} = z, \end{cases}$$

ed essendo non nullo il suo determinante, ne segue che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ questo sistema ammette un'unica soluzione, ovvero la funzione Φ è biettiva.

Inoltre

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \Omega &\implies 3x^2 + 8y^2 + 3z^2 + 2xz \leq 9 \implies \\ \frac{3}{16} (u^2 + v^2 + 4w^2 + 2uv + 4uw + 4vw) &+ \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + 2uv) + \\ &+ \frac{3}{16} (4w^2 + u^2 + 4w^2 - 4uw - 4vw + 2uv) - \frac{1}{8} (4w^2 - u^2 - v^2 - 2uv) \leq 9 \\ &\implies u^2 + v^2 + w^2 \leq 9. \end{aligned}$$

Ne segue che $\Phi(A) = \Omega$, dove $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 9\}$. Per il Teorema del cambiamento di variabili negli integrali tripli si ha che

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_A f(\Phi(u, v, w)) |\det J_{\Phi}(u, v, w)| du dv dw = \int_A \frac{1}{8} f\left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{u-v}{4}, \frac{2w-u-v}{4}\right) du dv dw.$$

La risposta corretta è ☐ C ☐.

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = (6x^2y^2 - 12x^3y^3 - 6y^4, 4x^3y - 9x^4y^2 - 24xy^3 - 2)$ lungo la curva parametrica $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^4 - t^2 \cos(2\pi t) + t e^{t-1}, t^7 - t^4 + t^2 + e^t \sin(\pi t))$ vale

☐ A -2.

☐ B -9.

☐ C 0.

☐ D 2

☐ E 9.

SVOLGIMENTO

Per il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è un insieme semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 12x^2y - 36x^3y^2 - 24y^3 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Un potenziale f di F su $\mathbb{R}^2$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 6x^2y^2 - 12x^3y^3 - 6y^4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 4x^3y - 9x^4y^2 - 24xy^3 - 2. \end{cases}$$

Integrando rispetto a x la prima relazione si ottiene

$$f(x, y) = \int [6x^2y^2 - 12x^3y^3 - 6y^4] dx = 2x^3y^2 - 3x^4y^3 - 6xy^4 + c(y),$$

dove c è una generica funzione dipendente solo da y . Sostituendo nella seconda relazione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x^3y - 9x^4y^2 - 24xy^3 + c'(y) = 4x^3y - 9x^4y^2 - 24xy^3 - 2 \implies c'(y) = -2 \implies c(y) = -2y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 2x^3y^2 - 3x^4y^3 - 6xy^4 - 2y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1, 1) - f(0, 0) = -9.$$

La risposta corretta è B.

Quiz 4. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A Se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ converge, allora $\sum b_n$ converge.
- B Se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.
- C Nessuna delle altre è corretta.
- D Se $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.
- E Se $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto asintotico se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge. La risposta corretta è B.

Quiz 5. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = 4e^{x^2-5y^2} + 3y$ nel punto $(1, 0, f(1, 0))$ è

- A $z = 8ex + 3y + 12e$.
- B $z = x + 3y + 4e$.
- C $z = 4ex$.
- D $z = 8ex + 3y - 8e$.
- E $z = 8ex + 3y - 4e$.

SVOLGIMENTO

L'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto $(1, 0, f(1, 0))$ è

$$z = f(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)y.$$

Si ha che $f(1, 0) = 4e$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8x e^{x^2-5y^2} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 8e, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -10y e^{x^2-5y^2} + 3 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 3.$$

Quindi l'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto $(1, 0, f(1, 0))$ è

$$z = 4e + 8e(x - 1) + 3y \implies z = 8ex + 3y - 4e.$$

La risposta corretta è E.

Quiz 6. Il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x(z-3), y(z-3), z - \sqrt{2-x^2-y^2})$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 + \sqrt{2-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$, orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

A 0.

B $\frac{7}{2}\pi$.

C 7π .

D $\frac{20}{3}\pi$.

E $\frac{10}{3}\pi$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 3 + \sqrt{2-x^2-y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 3 + \sqrt{2-x^2-y^2})$.

Il flusso di F attraverso Σ , orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z è

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, 1 \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F\left(x, y, 3 + \sqrt{2-x^2-y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, 1 \right) = \\ &= \left(x\sqrt{2-x^2-y^2}, y\sqrt{2-x^2-y^2}, 3 \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, 1 \right) = x^2 + y^2 + 3. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (x^2 + y^2 + 3) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= \int_{K'} \rho(\rho^2 + 3) \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K' = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 2\pi \int_0^1 \rho(\rho^2 + 3) \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{4}(\rho^2 + 3)^2 \right]_0^1 = \frac{7}{2}\pi.$$

La risposta corretta è B.

Quiz 7. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n - 3^n}{n^7 + 4^n}$

A diverge positivamente.

B converge a zero.

☐ *C* converge ad un numero minore di zero.

☐ *D* converge ad un numero maggiore di zero.

☐ *E* diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Poiché $3^n > \log n$ per ogni $n \geq 1$, la serie è a termini negativi. Quindi converge o diverge negativamente. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n - 3^n}{n^7 + 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3^n - (-1)^n \log n}{n^7 + 4^n} \right).$$

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-1)^n \log n}{n^7 + 4^n}$ che è a termini positivi. Si ha che

$$\frac{3^n - (-1)^n \log n}{n^7 + 4^n} \sim \left(\frac{3}{4} \right)^n, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-1)^n \log n}{n^7 + 4^n}$ converge, evidentemente ad un numero maggiore di zero. Ne segue che la serie data converge ad un numero minore di zero. La risposta corretta è ☒ *C*.

Quiz 8. Sia $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^8 + z^2 \leq 4, \quad z \leq 1 \right\}$. L'integrale $\int_{\Omega} 16z (x^2 + y^2)^7 \, dx \, dy \, dz$ vale

☐ *A* $-\frac{21}{3}\pi$.

☐ *B* -4π .

☐ *C* 4π .

☐ *D* $-\frac{9}{2}\pi$.

☐ *E* $\frac{37}{4}\pi$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z si ha che

$$\int_{\Omega} 16z (x^2 + y^2)^7 \, dx \, dy \, dz = 16 \int_{\Omega'} z \rho^{15} \, d\rho \, d\vartheta \, dz,$$

dove

$$\begin{aligned} \Omega' &= \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho^{16} + z^2 \leq 4, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad z \leq 1, \quad \rho \geq 0\} = \\ &= \left\{ (\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq \sqrt[16]{4 - z^2}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad -2 \leq z \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Integrando per fili paralleli all'asse ϑ si ha che

$$\int_{\Omega} 16z (x^2 + y^2)^7 \, dx \, dy \, dz = 16 \int_{\Omega'} z \rho^{15} \, d\rho \, d\vartheta \, dz = 32\pi \int_D z \rho^{15} \, d\rho \, dz =$$

con $D = \left\{ (\rho, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq \sqrt[16]{4 - z^2}, \quad -2 \leq z \leq 1 \right\}$ che è un insieme ρ -semplice e quindi si ottiene

$$= 32\pi \int_{-2}^1 z \left(\int_0^{\sqrt[16]{4 - z^2}} \rho^{15} \, d\rho \right) dz = 32\pi \int_{-2}^1 z \left[\frac{1}{16} \rho^{16} \right]_0^{\sqrt[16]{4 - z^2}} dz = 2\pi \int_{-2}^1 z (4 - z^2) \, dz = 2\pi \left[-\frac{1}{4} (4 - z^2)^2 \right]_{-2}^1 = -\frac{9}{2}\pi.$$

La risposta corretta è ☐ *D*.

Versione: V4

Quiz 1. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = 5e^{y^2-4x^2} + 4x$ nel punto $(0, 1, f(0, 1))$ è

☐ A $z = 4x + 10ey - 10e.$

☐ B $z = 4x + y + 5e.$

☐ C $z = 5ey.$

☐ D $z = 4x + 10ey + 15e.$

☐ E $z = 4x + 10ey - 5e.$

SVOLGIMENTO

L'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto $(0, 1, f(0, 1))$ è

$$z = f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1).$$

Si ha che $f(0, 1) = 5e$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -40xe^{y^2-4x^2} + 4 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 10ye^{y^2-2x^2} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 10e.$$

Quindi l'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto $(0, 1, f(0, 1))$ è

$$z = 5e + 4x + 10e(y - 1) \implies z = 4x + 10ey - 5e.$$

La risposta corretta è ☒ E .

Quiz 2. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n - 5^n}{n^3 + n5^n}$

☐ A converge ad un numero maggiore di zero.

☐ B diverge positivamente.

☐ C converge a zero.

☐ D converge ad un numero minore di zero.

☐ E diverge negativamente.

SVOLGIMENTO

Poiché $5^n > \log n$ per ogni $n \geq 1$, la serie è a termini negativi. Quindi converge o diverge negativamente. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n - 5^n}{n^3 + n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5^n - (-1)^n \log n}{n^3 + n5^n} \right).$$

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - (-1)^n \log n}{n^3 + n5^n}$ che è a termini positivi. Si ha che

$$\frac{5^n - (-1)^n \log n}{n^3 + n5^n} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - (-1)^n \log n}{n^3 + n5^n}$ diverge. Quindi la serie data diverge negativamente. La risposta corretta è ☒ E .

Quiz 3. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = (8xy^3 - 6x^2y^4 - 32x^3y - 4, 12x^2y^2 - 8x^3y^3 - 8x^4)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^5 - t^3 + t^2 + e^t \sin(\pi t), t^4 - t^3 \cos(2\pi t) + t^2 e^{t-1})$ vale

☐ A 10.

☐ B -10 .

☐ C 4

☐ D 0 .

☐ E -4 .

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è un insieme semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 24xy^2 - 24x^2y^3 - 32x^3 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Un potenziale f di F su $\mathbb{R}^2$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 8xy^3 - 6x^2y^4 - 32x^3y - 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 12x^2y^2 - 8x^3y^3 - 8x^4. \end{cases}$$

Integrando rispetto a y la seconda relazione si ottiene

$$f(x, y) = \int [12x^2y^2 - 8x^3y^3 - 8x^4] dy = 4x^2y^3 - 2x^3y^4 - 8x^4y + c(x),$$

dove c è una generica funzione dipendente solo da x . Sostituendo nella prima relazione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8xy^3 - 6x^2y^4 - 32x^3y + c'(x) = 8xy^3 - 6x^2y^4 - 32x^3y - 4 \implies c'(x) = -4 \implies c(x) = -4x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 4x^2y^3 - 2x^3y^4 - 8x^4y - 4x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1, 1) - f(0, 0) = -10.$$

La risposta corretta è ☒ B .

Quiz 4. L'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt{n+3}}{n 2^n} (x+2)^n$ è

☐ A un intervallo limitato contenente l'estremo di destra ma non quello di sinistra.

☐ B un intervallo aperto limitato.

☐ C un intervallo chiuso limitato.

☐ D un intervallo limitato contenente l'estremo di sinistra ma non quello di destra.

☐ E $\mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = -2$. Posto $t = x + 2$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt{n+3}}{n 2^n} (x+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt{n+3}}{n 2^n} t^n$$

che è una serie di potenze centrata in 0.

Si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\left| \frac{5^n \sqrt{n+3}}{n 2^n} \right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{5^n \sqrt{n+3}}{n 2^n}} = \frac{5}{2}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{2}{5}$. Quindi la serie di potenze centrata in 0 converge assolutamente in $(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

Per $t = \frac{2}{5}$ si ha la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt{n+3}}{n 2^n} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n}$$

che è una serie divergente perché

$$\frac{\sqrt{n+3}}{n} \sim \frac{1}{n^{1/2}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Per $t = -\frac{2}{5}$ si ha la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt{n+3}}{n 2^n} \left(-\frac{2}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+3}}{n}$$

che è una serie a termini di segno alterno che non converge assolutamente per quanto detto sopra.

Posto $b_n = \frac{\sqrt{n+3}}{n}$, si ha che $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e inoltre (b_n) è decrescente. Infatti, posto $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$ per ogni $x \geq 1$, si ha che $f'(x) = -\frac{x+6}{2x^2\sqrt{x+3}} \leq 0$ per ogni $x \geq 1$. Quindi f è decrescente su $[1, +\infty)$ e di conseguenza (b_n) è decrescente. Per il Criterio di Leibniz la serie in $t = -\frac{2}{5}$ converge.

Quindi la serie di potenze centrata in 0 converge puntualmente in $[-\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$. Essendo $x = t - 2$, la serie di potenze centrata in -2 converge puntualmente in $[-\frac{12}{5}, -\frac{8}{5})$. La risposta corretta è **D**.

Quiz 5. Siano $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 + 18z^2 + 2xy \leq 16\}$. Posto $u = -x - y + 3z$, $v = -x - y - 3z$, $w = -x + y$, l'integrale $\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ è uguale a

A $\int_A \frac{1}{12} f\left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right) du dv dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 16\}$.

B $\int_A \left(-\frac{1}{12}\right) f\left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right) du dv dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 16\}$.

C $\int_A f(u, v, w) du dv dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 3u^2 + 3v^2 + 18w^2 + 2uv \leq 16\}$.

D $\int_A f\left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right) du dv dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 3u^2 + 3v^2 + 18w^2 + 2uv \leq 16\}$.

E $\int_A 12 f\left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right) du dv dw$, con $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 16\}$.

SVOLGIMENTO

Per ogni $(x, y, z) \in \Omega$ si ha che

$$\begin{cases} u = -x - y + 3z \\ v = -x - y - 3z \\ w = -x + y. \end{cases}$$

Ricavando x, y, z in funzione di u, v, w si ottiene

$$\begin{cases} x = -\frac{u+v+2w}{4} \\ y = \frac{2w-u-v}{4} \\ z = \frac{u-v}{6}. \end{cases}$$

Denotata con $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $\Phi(u, v, w) = \left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right)$, si osserva che Φ è di classe C^1 e che la matrice Jacobiana di Φ in ogni $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ è

$$J_{\Phi}(u, v, w) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il modulo del determinante della matrice Jacobiana di Φ in (u, v, w) è $|\det J_{\Phi}(u, v, w)| = \frac{1}{12}$. Poiché la matrice Jacobiana di Φ è anche la matrice del sistema lineare

$$\begin{cases} -\frac{u+v+2w}{4} = x \\ \frac{2w-u-v}{4} = y \\ \frac{u-v}{6} = z, \end{cases}$$

ed essendo non nullo il suo determinante, ne segue che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ questo sistema ammette un'unica soluzione, ovvero la funzione Φ è biettiva.

Inoltre

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \Omega &\implies 3x^2 + 3y^2 + 18z^2 + 2xy \leq 16 \implies \\ \frac{3}{16} (u^2 + v^2 + 4w^2 + 2uv + 4uw + 4vw) &+ \frac{3}{16} (4w^2 + u^2 + 4w^2 - 4uw - 4vw + 2uv) + \\ &+ \frac{1}{2} (u^2 + v^2 - 2uv) - \frac{1}{8} (4w^2 - u^2 - v^2 - 2uv) \leq 16 \\ \implies u^2 + v^2 + w^2 &\leq 16. \end{aligned}$$

Ne segue che $\Phi(A) = \Omega$, dove $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 16\}$. Per il Teorema del cambiamento di variabili negli integrali tripli si ha che

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_A f(\Phi(u, v, w)) |\det J_{\Phi}(u, v, w)| du dv dw = \int_A \frac{1}{12} f\left(-\frac{u+v+2w}{4}, \frac{2w-u-v}{4}, \frac{u-v}{6}\right) du dv dw.$$

La risposta corretta è A.

Quiz 6. Il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x(z+3), y(z+3), z - \sqrt{5-x^2-y^2})$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -3 + \sqrt{5-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 4\}$, orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , vale

A $-\pi$.

B -4π .

C -2π .

D 0 .

E -8π .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = -3 + \sqrt{5-x^2-y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, -3 + \sqrt{5-x^2-y^2})$.

Il flusso di F attraverso Σ , orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z è

$$\int_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{5-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{5-x^2-y^2}}, 1\right).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{5-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{5-x^2-y^2}}, 1\right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F\left(x, y, -3 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{5 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{5 - x^2 - y^2}}, 1\right) = \\ &= \left(x\sqrt{5 - x^2 - y^2}, y\sqrt{5 - x^2 - y^2}, -3\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{5 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{5 - x^2 - y^2}}, 1\right) = x^2 + y^2 - 3. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (x^2 + y^2 - 3) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= \int_{K'} \rho (\rho^2 - 3) \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K' = [0, 2] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 2\pi \int_0^2 \rho (\rho^2 - 3) \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{4} (\rho^2 - 3)^2 \right]_0^2 = -4\pi.$$

La risposta corretta è ☐ B ☒.

Quiz 7. Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ A Se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge.
- ☐ B Se $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge.
- ☐ C Nessuna delle altre è corretta.
- ☐ D Se $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.
- ☐ E Se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

SVOLGIMENTO

Per il Criterio del confronto asintotico se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge. La risposta corretta è ☐ E ☒.

Quiz 8. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^{10} + z^2 \leq 9, \, z \geq -2\}$. L'integrale $\int_{\Omega} 5z(x^2 + y^2)^9 \, dx \, dy \, dz$ vale

- ☐ A $\frac{21}{8}\pi$.
- ☐ B $-\frac{21}{8}\pi$.
- ☐ C $\frac{25}{8}\pi$.
- ☐ D $\frac{21}{4}\pi$.
- ☐ E $-\frac{37}{4}\pi$.

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z si ha che

$$\int_{\Omega} 5z(x^2 + y^2)^9 \, dx \, dy \, dz = 5 \int_{\Omega'} z \rho^{19} \, d\rho \, d\vartheta \, dz,$$

dove

$$\begin{aligned} \Omega' &= \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho^{20} + z^2 \leq 9, \, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \, z \geq -2, \, \rho \geq 0\} = \\ &= \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq \sqrt[20]{9 - z^2}, \, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \, -2 \leq z \leq 3\}. \end{aligned}$$

Integrando per fili paralleli all'asse ϑ si ha che

$$\int_{\Omega} 5z(x^2 + y^2)^9 \, dx \, dy \, dz = 5 \int_{\Omega'} z \rho^{19} \, d\rho \, d\vartheta \, dz = 10\pi \int_D z \rho^{19} \, d\rho \, dz =$$

con $D = \left\{(\rho, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq \sqrt[20]{9 - z^2}, -2 \leq z \leq 3\right\}$ che è un insieme ρ -semplice e quindi si ottiene

$$= 10\pi \int_{-2}^3 z \left(\int_0^{\sqrt[20]{9-z^2}} \rho^{19} d\rho \right) dz = 10\pi \int_{-2}^3 z \left[\frac{1}{20} \rho^{20} \right]_0^{\sqrt[20]{9-z^2}} dz = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^3 z (9 - z^2) dz = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{4} (9 - z^2)^2 \right]_{-2}^3 = \frac{25}{8} \pi.$$

La risposta corretta è .
