

**Quiz 1.** Sia  $a > 0$ . La serie numerica  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^n$  converge a

☐  $A$   $a$ .

☐  $I$   $1+a$ .

☐  $L$   $\frac{a^2}{1+a}$ .

☐  $P$   $\frac{1}{1-a}$ .

☐  $T$   $\frac{a}{1+a}$ .

## SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie geometrica con ragione  $\frac{a}{1+a}$ . Sappiamo che la serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$  converge se e solo se  $|b| < 1$  e in tal caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b}.$$

Essendo  $a > 0$ , risulta che  $0 < \frac{a}{1+a} < 1$  e di conseguenza la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^n$  converge e si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^n - \left[ \left(\frac{a}{1+a}\right)^0 + \left(\frac{a}{1+a}\right)^1 \right] = \frac{1}{1-\frac{a}{1+a}} - 1 - \frac{a}{1+a} = \frac{a^2}{1+a}.$$

La risposta corretta è ☒  $L$ .

**Quiz 2.** Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  ottenuta prolungando per periodicità a tutto  $\mathbb{R}$  la funzione

$$g(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ 2\pi & \text{se } 0 < x < \pi, \end{cases} \quad \text{e siano } a_n, b_n, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \text{ i coefficienti di Fourier di } f.$$

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

☐  $A$  converge a  $\frac{5}{6} \pi^2$ .

☐  $I$  converge a  $\frac{5}{24} \pi^2$ .

☐  $L$  converge a  $\frac{5}{12} \pi^2$ .

☐  $P$  converge a  $\frac{5}{48} \pi^2$ .

☐  $T$  diverge positivamente.

## SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^0 4x^2 dx + \int_0^{\pi} 4\pi^2 dx = \left[ \frac{4}{3} x^3 \right]_{-\pi}^0 + 4\pi^3 = \frac{16}{3} \pi^3,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-2x) dx + \int_0^{\pi} 2\pi dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \left[ -x^2 \right]_{-\pi}^0 + 2\pi^2 \right) = \frac{3}{2} \pi.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2a_0^2 = \frac{1}{\pi} \frac{16}{3} \pi^3 - 2 \left( \frac{3}{2} \pi \right)^2 = \frac{5}{6} \pi^2.$$

La risposta corretta è A.

**Quiz 3.** Sia  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$ . L'integrale  $\int_{\Omega} \frac{4z}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$  vale

A  $20\pi$ .

I  $8\pi (\log 3 - \log 2)$ .

L  $0$ .

P  $10\pi$ .

T  $4\pi (\log 3 - \log 2)$ .

#### SVOLGIMENTO

Passando in coordinate sferiche con la colatitudine misurata dall'asse  $z$  si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{4z}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_{\Omega'} 4\rho \cos \vartheta \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\varphi =$$

dove  $\Omega' = [2, 3] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$  e quindi si ottiene

$$= 8\pi \left( \int_2^3 \rho d\rho \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = 8\pi \left[ \frac{1}{2} \rho^2 \right]_2^3 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 10\pi.$$

La risposta corretta è P.

**Quiz 4.** Il flusso del campo vettoriale  $F(x, y, z) = \left( \frac{x}{z-3}, \frac{y}{z-3}, z - e^{xy} \right)$  attraverso la superficie  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 + e^{xy}, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$ , orientata in modo che il vettore normale a  $\Sigma$  formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ , vale

A  $4$ .

I  $2$ .

L  $8$ .

P  $1$ .

T  $0$ .

#### SVOLGIMENTO

La superficie  $\Sigma$  è il grafico della funzione  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $g(x, y) = 3 + e^{xy}$ , dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}.$$

Quindi  $\Sigma = \sigma(K)$ , dove  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  è la superficie parametrica  $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 3 + e^{xy})$ .

Il flusso di  $F$  attraverso  $\Sigma$ , orientata in modo che il vettore normale a  $\Sigma$  formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$  è

$$\int_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) dx dy,$$

dove  $N(x, y)$  è un vettore normale a  $\Sigma$  che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ .

Un vettore normale a  $\Sigma$  è

$$N_\sigma(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left( -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-ye^{xy}, -xe^{xy}, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ .

Quindi  $N(x, y) = N_\sigma(x, y) = (-ye^{xy}, -xe^{xy}, 1)$ .

Si ha che

$$F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) = F(x, y, 3 + e^{xy}) \cdot (-ye^{xy}, -xe^{xy}, 1) = (xe^{-xy}, ye^{-xy}, 3) \cdot (-ye^{xy}, -xe^{xy}, 1) = 3 - 2xy.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (3 - 2xy) \, dx \, dy =$$

essendo  $K$  un insieme  $y$ -semplice si ottiene

$$= \int_0^2 \left( \int_0^x (3 - 2xy) \, dy \right) dx = \int_0^2 [3y - xy^2]_0^x dx = \int_0^2 (3x - x^3) \, dx = \left[ \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = 2.$$

La risposta corretta è **I**.

---

**Quiz 5.** Il campo vettoriale  $F(x, y) = (|8y^2 - 4x| + 20y^2, y|8x - 4| + 32xy)$  è conservativo sull'insieme

**A**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2 < x < \frac{1}{2} \right\}.$

**I**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x < 2y^2 \right\}.$

**L**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 < y < \frac{1}{2} \right\}.$

**P**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < y < 2x^2 \right\}.$

**T**  $\mathbb{R}^2.$

#### SVOLGIMENTO

Posto  $F = (f_1, f_2)$ , si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 56y & \text{se } 2y^2 > x \\ 24y & \text{se } 2y^2 < x, \end{cases} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 40y & \text{se } 2x > 1 \\ 24y & \text{se } 2x < 1. \end{cases}$$

Quindi  $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$  se e solo se  $2y^2 < x < \frac{1}{2}$ . Poiché l'insieme  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2 < x < \frac{1}{2} \right\}$  è semplicemente connesso e  $F$  è di classe  $C^1$  su questo insieme, risulta che  $F$  è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è **A**.

---

**Quiz 6.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , e  $f(x, y) = x^n(y^n - 5)$ . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

**A** La funzione  $f$  non ha punti di massimo locale se  $n$  è pari.

**I** La funzione  $f$  ha punti di minimo locale se e solo se  $n$  è dispari.

**L** La funzione  $f$  non ha punti di sella se  $n$  è pari.

**P** La funzione  $f$  non ha punti di sella se  $n$  è dispari.

**T** La funzione  $f$  ha punti di minimo locale se e solo se  $n$  è pari.

#### SVOLGIMENTO

La funzione  $f$  è di classe  $C^2$  su  $\mathbb{R}^2$ . Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ . Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = nx^{n-1}(y^n - 5), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = nx^n y^{n-1}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x^{n-1}(y^n - 5) = 0 \\ x^n y^{n-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

I punti stazionari di  $f$  sono  $(0, y_0)$ , con  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

Scriviamo la matrice Hessiana di  $f$  in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \begin{cases} 2(y^2 - 5) & \text{se } n = 2 \\ n(n-1)x^{n-2}(y^n - 5) & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } n = 2 \\ n(n-1)x^n y^{n-2} & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

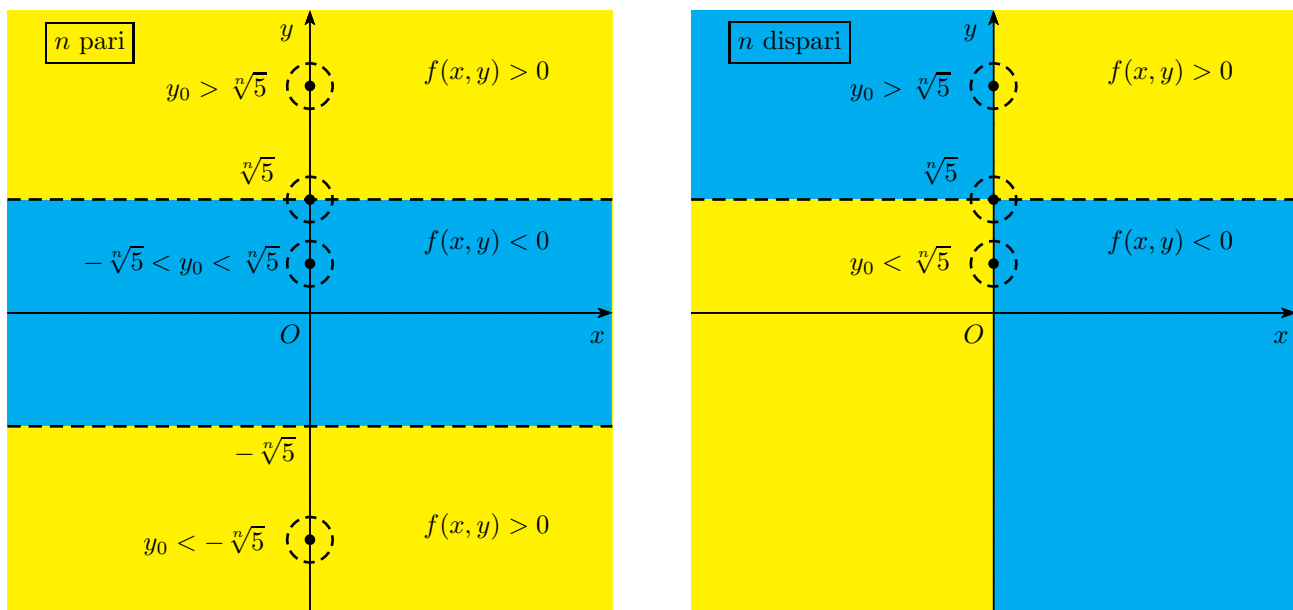
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = n^2 x^{n-1} y^{n-1}.$$

Quindi

$$H_f(0, y_0) = \begin{pmatrix} 2(y_0^2 - 5) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } n = 2, \quad H_f(0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } n \geq 3.$$

Ne segue che non possiamo dire con certezza se i punti  $(0, y_0)$  sono di massimo, di minimo o di sella. Proviamo a fare uno studio locale di  $f$  in un intorno di questi punti.

Si ha che  $f(0, y_0) = 0$ . Inoltre  $f(x, y) < 0$  se e solo se  $x^n(y^n - 5) < 0$ . Distinguiamo due casi, a seconda che  $n$  sia pari o dispari.



Caso  $n$  pari. Si ha che  $f(x, y) < 0$  se e solo se  $x^n(y^n - 5) < 0$ , ovvero se  $x \neq 0$  e  $|y| < \sqrt[n]{5}$ .

Fissato  $(0, y_0)$  con  $|y_0| < \sqrt[n]{5}$ , esiste un intorno  $B_r(0, y_0)$  di  $(0, y_0)$  tutto contenuto nell'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $|y| < \sqrt[n]{5}$  tale che per ogni punto  $(x, y)$  di questo intorno

$$f(x, y) = x^n(y^n - 5) \leq 0.$$

Quindi il punto  $(0, y_0)$  con  $|y_0| < \sqrt[n]{5}$  è di massimo locale.

Similmente, fissato  $(0, y_0)$  con  $|y_0| > \sqrt[n]{5}$ , esiste un intorno  $B_r(0, y_0)$  di  $(0, y_0)$  tutto contenuto nell'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $|y| > \sqrt[n]{5}$  tale che per ogni punto  $(x, y)$  di questo intorno

$$f(x, y) = x^n(y^n - 5) \geq 0.$$

Quindi il punto  $(0, y_0)$  con  $|y_0| > \sqrt[n]{5}$  è di minimo locale.

Invece i punti  $(0, y_0)$  con  $y_0 = \pm \sqrt[n]{5}$ , sono di sella per  $f$ . Infatti, per esempio, in ogni intorno  $B_r(0, \sqrt[n]{5})$  di  $(0, \sqrt[n]{5})$  esistono sia punti  $(x, y)$  tali che  $y > \sqrt[n]{5}$  e quindi tali che  $f(x, y) > 0$ , sia punti  $(x, y)$  tali che  $-\sqrt[n]{5} < y < \sqrt[n]{5}$  e quindi tali che  $f(x, y) < 0$ .

Caso  $n$  dispari. Si ha che  $f(x, y) > 0$  se e solo se  $x^n(y^n - 5) > 0$ , ovvero se  $x > 0$  e  $y > \sqrt[n]{5}$  oppure  $x < 0$  e  $y < \sqrt[n]{5}$ .

Fissato  $(0, y_0)$  con  $y_0 > \sqrt[n]{5}$ , in ogni intorno  $B_r(0, y_0)$  di  $(0, y_0)$  esistono sia punti  $(x, y)$  tali che  $x > 0$  e  $y > \sqrt[n]{5}$  e quindi tali che  $f(x, y) > 0$ , sia punti  $(x, y)$  tali che  $x < 0$  e  $y > \sqrt[n]{5}$  e quindi tali che  $f(x, y) < 0$ . Ne segue che questo punto è di sella. In modo del tutto simile si prova che tutti punti  $(0, y_0)$  sono di sella nel caso  $n$  dispari.

La risposta corretta è .

---

**Quiz 7.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto non vuoto,  $x_0 \in \Omega$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Nessuna delle altre è corretta.
- ☐ **F** Se esiste  $\nabla f(x_0)$ , allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .
- ☐ **O** Se esiste  $\nabla f(x_0)$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ .
- ☐ **R** Se  $f$  non è differenziabile in  $x_0$ , allora  $f$  non è continua in  $x_0$ .
- ☐ **T** Se  $f$  non è continua in  $x_0$ , allora  $f$  non è differenziabile in  $x_0$ .

#### SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale in più variabili si ha che la continuità di una funzione in un punto è condizione necessaria affinché la funzione sia differenziabile in quel punto. Ne segue che se  $f$  non è continua in  $x_0$ , allora  $f$  non è differenziabile in  $x_0$ . La risposta corretta è ☒ **T**.

---

**Quiz 8.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  il campo vettoriale  $F(x) = x (5 + 4\|x\|^2) e^{4\|x\|^2}$ , dove  $\|x\|$  è la norma di  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2} e^{4\|x\|^2} (\|x\|^2 + 1)$ .
- ☐ **F**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2 e^{4\|x\|^2}$ .
- ☐ **M**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = 2\|x\|^2 e^{4\|x\|^2}$ .
- ☐ **O**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = 2\|x\| e^{4\|x\|^2}$ .
- ☐ **R**  $F$  non è conservativo su  $\Omega$ .

#### SVOLGIMENTO

Il campo  $F$  è radiale. Infatti, è della forma  $F(x) = \varphi(\|x\|) x$ , dove  $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione  $\varphi(t) = (5 + 4t^2) e^{4t^2}$ . Essendo  $\varphi$  continua, per le proprietà dei campi radiali risulta che  $F$  è conservativo su  $\Omega$ , e un suo potenziale è  $f(x) = \Phi(\|x\|)$ , dove  $\Phi$  è una primitiva della funzione  $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$ . Quindi si ha che

$$\forall t > 0 : \quad \Phi'(t) = t\varphi(t) = t(5 + 4t^2) e^{4t^2}.$$

Ne segue che

$$\Phi(t) = \int (5 + 4t^2) t e^{4t^2} dt =$$

integrando per parti si ottiene

$$= \frac{1}{8} e^{4t^2} (5 + 4t^2) - \int t e^{4t^2} dt = \frac{5}{8} e^{4t^2} + \frac{1}{2} t^2 e^{4t^2} - \frac{1}{8} e^{4t^2} + c = \frac{1}{2} (1 + t^2) e^{4t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2} e^{4\|x\|^2} (\|x\|^2 + 1)$ .

La risposta corretta è ☒ **A**.

---

**Quiz 9.** Sia  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x + 2, x \leq 0\}$ . L'integrale  $\int_{\Omega} 3xy \, dx \, dy$  vale

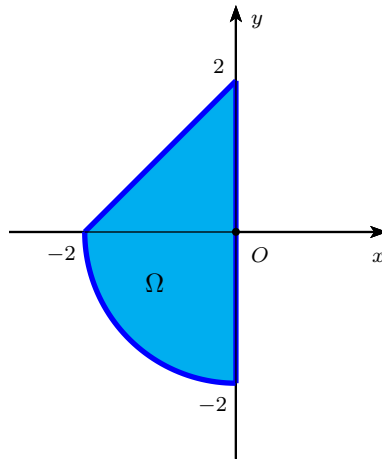
- ☐ **A** 8.
- ☐ **F** 4.
- ☐ **O** 16.
- ☐ **R** 2.
- ☐ **M** 0.

#### SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq x+2 \right\}$$

e quindi è un insieme  $y$ -semplice.



Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 3xy \, dx \, dy &= 3 \int_{-2}^0 \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x+2} xy \, dy \right) dx = 3 \int_{-2}^0 x \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{x+2} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-2}^0 x [(x+2)^2 - 4 + x^2] \, dx = 3 \int_{-2}^0 (x^3 + 2x^2) \, dx = 3 \left[ \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 \right]_{-2}^0 = 4. \end{aligned}$$

La risposta corretta è ☐ F .

---

**Quiz 10.** Siano  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vettoriale di classe  $C^1$ ,  $F = (f_1, f_2)$ , tale che  $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 5$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , e  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$ .

L'integrale di linea di  $F$  lungo il bordo di  $\Omega$  percorso positivamente vale

☐ A  $120\pi$ .

☐ F  $30\pi$ .

☐ M  $15\pi$ .

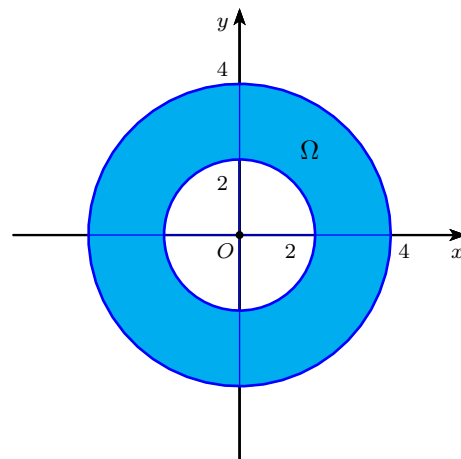
☐ O  $60\pi$ .

☐ R  $0$ .

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Green l'integrale di linea di  $F$  lungo il bordo di  $\Omega$  orientato positivamente è uguale a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx \, dy = \\ &= \int_{\Omega} 5 \, dx \, dy = 5m(\Omega) = 5(16\pi - 4\pi) = 60\pi. \end{aligned}$$



La risposta corretta è ☐ O .

---

# Versione V2

---

**Quiz 1.** Sia  $a < 0$ . La serie numerica  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{a-1}\right)^n$  converge a

☐  $\frac{1}{1-a}$ .

☐  $1-a$ .

☐  $-a$ .

☐  $-\frac{a^2}{a-1}$ .

☐  $\frac{a}{a-1}$ .

## SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie geometrica con ragione  $\frac{a}{a-1}$ . Sappiamo che la serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$  converge se e solo se  $|b| < 1$  e in tal caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b}.$$

Essendo  $a < 0$ , risulta che  $0 < \frac{a}{a-1} < 1$  e di conseguenza la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{a-1}\right)^n$  converge e si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{a-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a-1}\right)^n - \left[ \left(\frac{a}{a-1}\right)^0 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^1 \right] = \frac{1}{1-\frac{a}{a-1}} - 1 - \frac{a}{a-1} = -\frac{a^2}{a-1}.$$

La risposta corretta è ☒ **R**.

---

**Quiz 2.** Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  ottenuta prolungando per periodicità a tutto  $\mathbb{R}$  la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 4x & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ -4\pi & \text{se } 0 < x < \pi, \end{cases} \text{ e siano } a_n, b_n, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \text{ i coefficienti di Fourier di } f.$$

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

☐ converge a  $\frac{20}{3} \pi^2$ .

☐ converge a  $\frac{5}{6} \pi^2$ .

☐ converge a  $\frac{10}{3} \pi^2$ .

☐ converge a  $\frac{5}{12} \pi^2$ .

☐ diverge positivamente.

## SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^0 16x^2 dx + \int_0^{\pi} 16\pi^2 dx = \left[ \frac{16}{3} x^3 \right]_{-\pi}^0 + 16\pi^3 = \frac{64}{3} \pi^3,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 4x dx + \int_0^{\pi} (-4\pi) dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left( [2x^2]_{-\pi}^0 - 4\pi^2 \right) = -3\pi.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2a_0^2 = \frac{1}{\pi} \frac{64}{3} \pi^3 - 2(-3\pi)^2 = \frac{10}{3} \pi^2.$$

La risposta corretta è **M**.

**Quiz 3.** Sia  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \geq 0\}$ . L'integrale  $\int_{\Omega} \frac{6z}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$  vale

**A**  $21\pi$ .

**E**  $12\pi (\log 4 - \log 3)$ .

**M**  $0$ .

**R**  $42\pi$ .

**X**  $6\pi (\log 4 - \log 3)$ .

#### SVOLGIMENTO

Passando in coordinate sferiche con la colatitudine misurata dall'asse  $z$  si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{6z}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_{\Omega'} 6\rho \cos \vartheta \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\varphi =$$

dove  $\Omega' = [3, 4] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$  e quindi si ottiene

$$= 12\pi \left( \int_3^4 \rho d\rho \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = 12\pi \left[ \frac{1}{2} \rho^2 \right]_3^4 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 21\pi.$$

La risposta corretta è **A**.

**Quiz 4.** Il flusso del campo vettoriale  $F(x, y, z) = \left( \frac{x}{6-z}, \frac{y}{6-z}, -z - e^{xy} \right)$  attraverso la superficie  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 6 - e^{xy}, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$ , orientata in modo che il vettore normale a  $\Sigma$  formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ , vale

**A**  $32$ .

**E**  $16$ .

**M**  $64$ .

**R**  $4$ .

**X**  $0$ .

#### SVOLGIMENTO

La superficie  $\Sigma$  è il grafico della funzione  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $g(x, y) = 6 - e^{xy}$ , dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq y\}.$$

Quindi  $\Sigma = \sigma(K)$ , dove  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  è la superficie parametrica  $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 6 - e^{xy})$ .

Il flusso di  $F$  attraverso  $\Sigma$ , orientata in modo che il vettore normale a  $\Sigma$  formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$  è

$$\int_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) dx dy,$$

dove  $N(x, y)$  è un vettore normale a  $\Sigma$  che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ .

Un vettore normale a  $\Sigma$  è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left( -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (ye^{xy}, xe^{xy}, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_\sigma(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy}, 1).$$

Si ha che

$$F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) = F(x, y, 6 - e^{xy}) \cdot (ye^{xy}, xe^{xy}, 1) = (xe^{-xy}, ye^{-xy}, -6) \cdot (ye^{xy}, xe^{xy}, 1) = 2xy - 6.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (2xy - 6) \, dx \, dy =$$

essendo  $K$  un insieme  $y$ -semplice si ottiene

$$= \int_0^4 \left( \int_0^y (2xy - 6) \, dx \right) dy = \int_0^4 \left[ x^2 y - 6x \right]_0^y dy = \int_0^4 (y^3 - 6y) \, dy = \left[ \frac{1}{4} y^4 - 3y^2 \right]_0^4 = 16.$$

La risposta corretta è **E**.

---

**Quiz 5.** Il campo vettoriale  $F(x, y) = (x|32y - 2| + 8xy, |8x^2 - 2y| - 4x^2)$  è conservativo sull'insieme

**A**  $\mathbb{R}^2$ .

**E**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{16} < y < 4x^2 \right\}$ .

**M**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 < x < \frac{1}{16} \right\}$ .

**R**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{16} < x < 4y^2 \right\}$ .

**X**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 < y < \frac{1}{16} \right\}$ .

#### SVOLGIMENTO

Posto  $F = (f_1, f_2)$ , si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 40x & \text{se } 16y > 1 \\ -24x & \text{se } 16y < 1, \end{cases} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 8x & \text{se } 4x^2 > y \\ -24x & \text{se } 4x^2 < y. \end{cases}$$

Quindi  $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$  se e solo se  $4x^2 < y < \frac{1}{16}$ . Poiché l'insieme  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 < y < \frac{1}{16} \right\}$  è semplicemente connesso e  $F$  è di classe  $C^1$  su questo insieme, risulta che  $F$  è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è **X**.

---

**Quiz 6.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , e  $f(x, y) = y^n(x^n - 3)$ . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

**A** La funzione  $f$  ha punti di minimo locale se e solo se  $n$  è pari.

**E** La funzione  $f$  ha punti di minimo locale se e solo se  $n$  è dispari.

**G** La funzione  $f$  non ha punti di sella se  $n$  è pari.

**M** La funzione  $f$  non ha punti di sella se  $n$  è dispari.

**N** La funzione  $f$  non ha punti di massimo locale se  $n$  è pari.

#### SVOLGIMENTO

La funzione  $f$  è di classe  $C^2$  su  $\mathbb{R}^2$ . Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ . Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = nx^{n-1}y^n, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = ny^{n-1}(x^n - 3).$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x^{n-1}y^n = 0 \\ y^{n-1}(x^n - 3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0. \end{cases}$$

I punti stazionari di  $f$  sono  $(x_0, 0)$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Scriviamo la matrice Hessiana di  $f$  in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \begin{cases} 2y^2 & \text{se } n = 2 \\ n(n-1)x^{n-2}y^n & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \begin{cases} 2(x^2 - 3) & \text{se } n = 2 \\ n(n-1)y^{n-2}(x^n - 3) & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

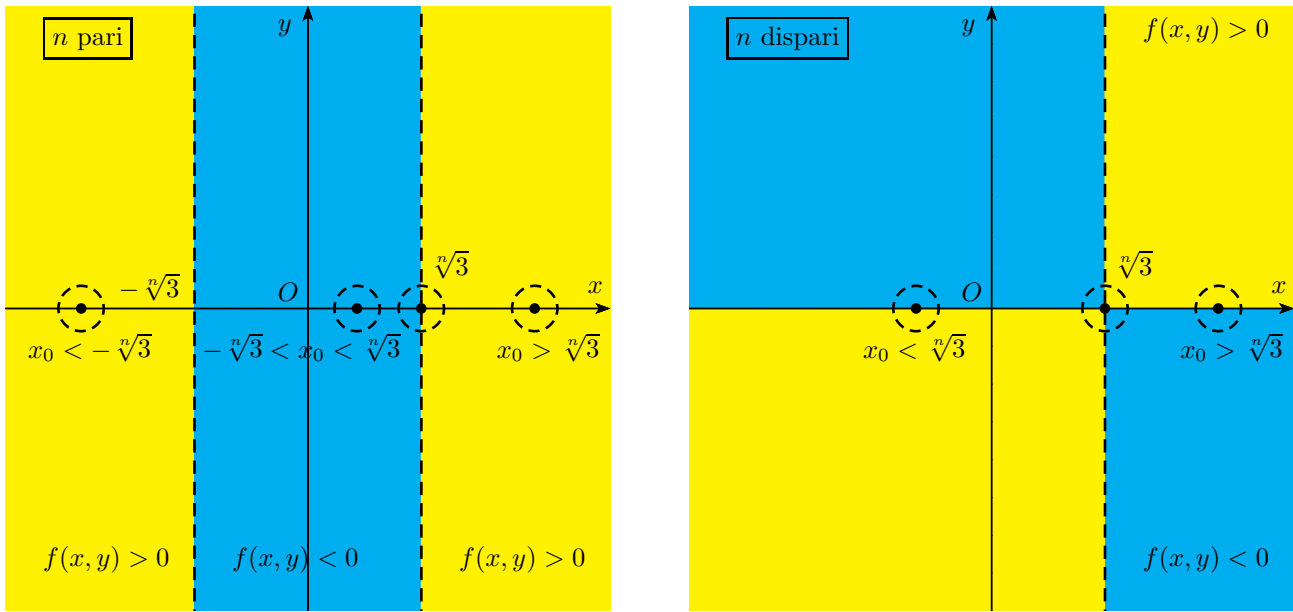
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = n^2 x^{n-1} y^{n-1}.$$

Quindi

$$H_f(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(x_0^2 - 3) \end{pmatrix}, \quad \text{se } n = 2, \quad H_f(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } n \geq 3.$$

Ne segue che non possiamo dire con certezza se i punti  $(x_0, 0)$  sono di massimo, di minimo o di sella. Proviamo a fare uno studio locale di  $f$  in un intorno di questi punti.

Si ha che  $f(x_0, 0) = 0$ . Inoltre  $f(x, y) < 0$  se e solo se  $y^n(x^n - 3) < 0$ . Distinguiamo due casi, a seconda che  $n$  sia pari o dispari.



Caso  $n$  pari. Si ha che  $f(x, y) < 0$  se e solo se  $y^n(x^n - 3) < 0$ , ovvero se  $y \neq 0$  e  $|x| < \sqrt[n]{3}$ .

Fissato  $(x_0, 0)$  con  $|x_0| < \sqrt[n]{3}$ , esiste un intorno  $B_r(x_0, 0)$  di  $(x_0, 0)$  tutto contenuto nell'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $|x| < \sqrt[n]{3}$  tale che per ogni punto  $(x, y)$  di questo intorno

$$f(x, y) = y^n(x^n - 3) \leq 0.$$

Quindi il punto  $(x_0, 0)$  con  $|x_0| < \sqrt[n]{3}$  è di massimo locale.

Similmente, fissato  $(x_0, 0)$  con  $|x_0| > \sqrt[n]{3}$ , esiste un intorno  $B_r(x_0, 0)$  di  $(x_0, 0)$  tutto contenuto nell'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $|x| > \sqrt[n]{3}$  tale che per ogni punto  $(x, y)$  di questo intorno

$$f(x, y) = y^n(x^n - 3) \geq 0.$$

Quindi il punto  $(x_0, 0)$  con  $|x_0| > \sqrt[n]{3}$  è di minimo locale.

Invece i punti  $(x_0, 0)$  con  $x_0 = \pm \sqrt[n]{3}$ , sono di sella per  $f$ . Infatti, per esempio, in ogni intorno  $B_r(\sqrt[n]{3}, 0)$  di  $(\sqrt[n]{3}, 0)$  esistono sia punti  $(x, y)$  tali che  $x > \sqrt[n]{3}$  e quindi tali che  $f(x, y) > 0$ , sia punti  $(x, y)$  tali che  $-\sqrt[n]{3} < x < \sqrt[n]{3}$  e quindi tali che  $f(x, y) < 0$ .

Caso  $n$  dispari. Si ha che  $f(x, y) > 0$  se e solo se  $y^n(x^n - 3) > 0$ , ovvero se  $y > 0$  e  $x > \sqrt[n]{3}$  oppure  $y < 0$  e  $x < \sqrt[n]{3}$ .

Fissato  $(x_0, 0)$  con  $x_0 > \sqrt[n]{3}$ , in ogni intorno  $B_r(x_0, 0)$  di  $(x_0, 0)$  esistono sia punti  $(x, y)$  tali che  $y > 0$  e  $x > \sqrt[n]{3}$  e quindi tali che  $f(x, y) > 0$ , sia punti  $(x, y)$  tali che  $y < 0$  e  $x > \sqrt[n]{3}$  e quindi tali che  $f(x, y) < 0$ . Ne segue che questo punto è di sella. In modo del tutto simile si prova che tutti punti  $(x_0, 0)$  sono di sella nel caso  $n$  dispari.

La risposta corretta è A.

**Quiz 7.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto non vuoto,  $x_0 \in \Omega$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ **A** Se  $f$  non è differenziabile in  $x_0$ , allora  $f$  non è continua in  $x_0$ .

☐ **E** Se esiste  $\nabla f(x_0)$ , allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .

☐ **G** Se esiste  $\nabla f(x_0)$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ .

☐ **M** Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$ , allora esiste  $\nabla f(x_0)$ .

☐ **N** Nessuna delle altre è corretta.

#### SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale in più variabili si ha che se  $f$  è differenziabile in  $x_0$ , allora esiste  $\nabla f(x_0)$ . La risposta corretta è ☒ **M**.

---

**Quiz 8.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  il campo vettoriale  $F(x) = x (9 - 4\|x\|^2) e^{-4\|x\|^2}$ , dove  $\|x\|$  è la norma di  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ **A**  $F$  non è conservativo su  $\Omega$ .

☐ **E**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 e^{-4\|x\|^2}$ .

☐ **G**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2} e^{-4\|x\|^2} (\|x\|^2 - 2)$ .

☐ **M**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = -2\|x\| e^{-4\|x\|^2}$ .

☐ **N**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = -2\|x\|^2 e^{-4\|x\|^2}$ .

#### SVOLGIMENTO

Il campo  $F$  è radiale. Infatti, è della forma  $F(x) = \varphi(\|x\|) x$ , dove  $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione  $\varphi(t) = (9 - 4t^2) e^{-4t^2}$ . Essendo  $\varphi$  continua, per le proprietà dei campi radiali risulta che  $F$  è conservativo su  $\Omega$ , e un suo potenziale è  $f(x) = \Phi(\|x\|)$ , dove  $\Phi$  è una primitiva della funzione  $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$ . Quindi si ha che

$$\forall t > 0 : \quad \Phi'(t) = t\varphi(t) = t(9 - 4t^2) e^{-4t^2}.$$

Ne segue che

$$\Phi(t) = \int (9 - 4t^2) t e^{-4t^2} dt =$$

integrando per parti si ottiene

$$= -\frac{1}{8} (9 - 4t^2) e^{-4t^2} - \int t e^{-4t^2} dt = -\frac{9}{8} e^{-4t^2} + \frac{1}{2} t^2 e^{-4t^2} + \frac{1}{8} e^{-4t^2} + c = \frac{1}{2} (t^2 - 2) e^{-4t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2} e^{-4\|x\|^2} (\|x\|^2 - 2)$ .

La risposta corretta è ☒ **G**.

---

**Quiz 9.** Sia  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \leq y + 3, y \leq 0\}$ . L'integrale  $\int_{\Omega} 4xy \, dx \, dy$  vale

☐ **A** 9.

☐ **E** 27.

☐ **G** 3.

☐ **M** 54.

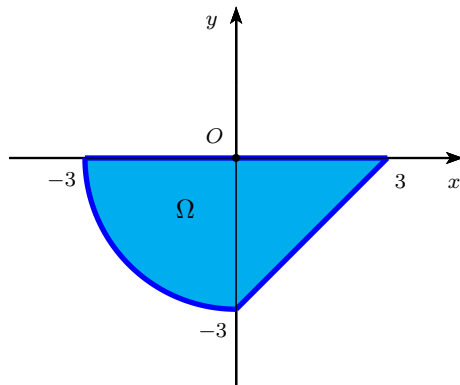
☐ **N** 0.

#### SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq y \leq 0, -\sqrt{9 - y^2} \leq x \leq y + 3\}$$

e quindi è un insieme  $x$ -semplice.



Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 4xy \, dx \, dy &= 4 \int_{-3}^0 \left( \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{y+3} xy \, dx \right) dy = 4 \int_{-3}^0 y \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_{-\sqrt{9-y^2}}^{y+3} dy = \\ &= 2 \int_{-3}^0 y [(y+3)^2 - 9 + y^2] dy = 4 \int_{-3}^0 (y^3 + 3y^2) dy = 4 \left[ \frac{1}{4}y^4 + y^3 \right]_{-3}^0 = 27. \end{aligned}$$

La risposta corretta è ☐ E ☒.

**Quiz 10.** Siano  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vettoriale di classe  $C^1$ ,  $F = (f_1, f_2)$ , tale che  $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -2$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , e  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 36\}$ .

L'integrale di linea di  $F$  lungo il bordo di  $\Omega$  percorso positivamente vale

☐ A 0.

☐ E  $-27\pi$ .

☐ G  $-18\pi$ .

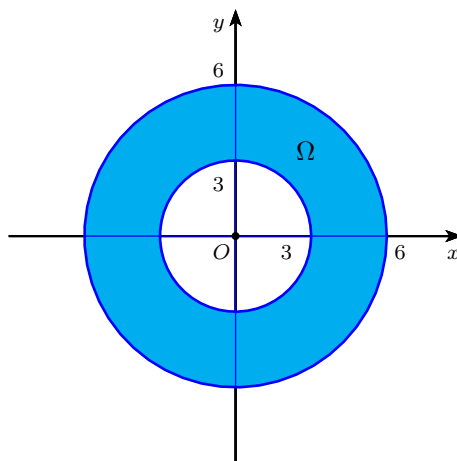
☐ M  $-108\pi$ .

☐ N  $-54\pi$ .

#### SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Green l'integrale di linea di  $F$  lungo il bordo di  $\Omega$  orientato positivamente è uguale a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx \, dy = \\ &= \int_{\Omega} (-2) dx \, dy = -2m(\Omega) = -2(36\pi - 9\pi) = -54\pi. \end{aligned}$$



La risposta corretta è ☐ N ☒.

# Versione V3

---

**Quiz 1.** Sia  $a > 1$ . La serie numerica  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a-1}{a}\right)^n$  converge a

☐  $A$   $a$ .

☐  $E$   $\frac{(a-1)^2}{a}$ .

☐  $I$   $a-1$ .

☐  $R$   $\frac{1}{1-a}$ .

☐  $S$   $\frac{a-1}{a}$ .

## SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie geometrica con ragione  $\frac{a-1}{a}$ . Sappiamo che la serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$  converge se e solo se  $|b| < 1$  e in tal caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b}.$$

Essendo  $a > 1$ , risulta che  $0 < \frac{a-1}{a} < 1$  e di conseguenza la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a-1}{a}\right)^n$  converge e si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a-1}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{a}\right)^n - \left[ \left(\frac{a-1}{a}\right)^0 + \left(\frac{a-1}{a}\right)^1 \right] = \frac{1}{1 - \frac{a-1}{a}} - 1 - \frac{a-1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}.$$

La risposta corretta è ☒  $E$ .

---

**Quiz 2.** Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  ottenuta prolungando per periodicità a tutto  $\mathbb{R}$  la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 3\pi & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ 3x & \text{se } 0 < x < \pi, \end{cases} \text{ e siano } a_n, b_n, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \text{ i coefficienti di Fourier di } f.$$

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

☐  $A$  converge a  $\frac{15}{64} \pi^2$ .

☐  $E$  converge a  $\frac{15}{32} \pi^2$ .

☐  $I$  converge a  $\frac{15}{16} \pi^2$ .

☐  $R$  converge a  $\frac{15}{8} \pi^2$ .

☐  $S$  diverge positivamente.

## SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^0 9\pi^2 dx + \int_0^{\pi} 9x^2 dx = 9\pi^3 + \left[ 3x^3 \right]_0^{\pi} = 12\pi^3,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 3\pi dx + \int_0^{\pi} 3x dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left( 3\pi^2 + \left[ \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\pi} \right) = \frac{9}{4}\pi.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2a_0^2 = \frac{1}{\pi} 12\pi^3 - 2 \left( \frac{9}{4}\pi \right)^2 = \frac{15}{8}\pi^2.$$

La risposta corretta è **R**.

**Quiz 3.** Sia  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \leq 0\}$ . L'integrale  $\int_{\Omega} \frac{8z}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$  vale

**A**  $-64\pi$ .

**E**  $-16\pi (\log 5 - \log 3)$ .

**I**  $0$ .

**R**  $-128\pi$ .

**S**  $-8\pi (\log 5 - \log 3)$ .

#### SVOLGIMENTO

Passando in coordinate sferiche con la colatitudine misurata dall'asse  $z$  si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{8z}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_{\Omega'} 8\rho \cos \vartheta \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\varphi =$$

dove  $\Omega' = [3, 5] \times [\frac{\pi}{2}, \pi] \times [0, 2\pi]$  e quindi si ottiene

$$= 16\pi \left( \int_3^5 \rho d\rho \right) \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = 16\pi \left[ \frac{1}{2}\rho^2 \right]_3^5 \left[ \frac{1}{2}\sin^2 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -64\pi.$$

La risposta corretta è **A**.

**Quiz 4.** Il flusso del campo vettoriale  $F(x, y, z) = \left( \frac{x}{z-9}, \frac{y}{z-9}, z - e^{xy} \right)$  attraverso la superficie  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 9 + e^{xy}, 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$ , orientata in modo che il vettore normale a  $\Sigma$  formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ , vale

**A**  $16$ .

**E**  $8$ .

**I**  $32$ .

**R**  $2$ .

**S**  $0$ .

#### SVOLGIMENTO

La superficie  $\Sigma$  è il grafico della funzione  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $g(x, y) = 9 + e^{xy}$ , dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}.$$

Quindi  $\Sigma = \sigma(K)$ , dove  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  è la superficie parametrica  $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 9 + e^{xy})$ .

Il flusso di  $F$  attraverso  $\Sigma$ , orientata in modo che il vettore normale a  $\Sigma$  formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$  è

$$\int_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) dx dy,$$

dove  $N(x, y)$  è un vettore normale a  $\Sigma$  che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ .

Un vettore normale a  $\Sigma$  è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left( -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-ye^{xy}, -xe^{xy}, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_\sigma(x, y) = (-ye^{xy}, -xe^{xy}, 1).$$

Si ha che

$$F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) = F(x, y, 9 + e^{xy}) \cdot (-ye^{xy}, -xe^{xy}, 1) = (xe^{-xy}, ye^{-xy}, 9) \cdot (-ye^{xy}, -xe^{xy}, 1) = 9 - 2xy.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (9 - 2xy) \, dx \, dy =$$

essendo  $K$  un insieme  $y$ -semplice si ottiene

$$= \int_0^4 \left( \int_0^x (9 - 2xy) \, dy \right) dx = \int_0^4 [9y - xy^2]_0^x dx = \int_0^4 (9x - x^3) dx = \left[ \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^4 = 8.$$

La risposta corretta è **E**.

---

**Quiz 5.** Il campo vettoriale  $F(x, y) = (|6y^2 - 2x| + 15y^2, y|6x - 2| + 24xy)$  è conservativo sull'insieme

**A**  $\mathbb{R}^2$ .

**E**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{3} < x < 3y^2 \right\}$ .

**I**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 < y < \frac{1}{3} \right\}$ .

**R**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{3} < y < 3x^2 \right\}$ .

**S**  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3y^2 < x < \frac{1}{3} \right\}$ .

#### SVOLGIMENTO

Posto  $F = (f_1, f_2)$ , si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 42y & \text{se } 3y^2 > x \\ 18y & \text{se } 3y^2 < x, \end{cases} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 30y & \text{se } 3x > 1 \\ 18y & \text{se } 3x < 1. \end{cases}$$

Quindi  $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$  se e solo se  $3y^2 < x < \frac{1}{3}$ . Poiché l'insieme  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3y^2 < x < \frac{1}{3} \right\}$  è semplicemente connesso e  $F$  è di classe  $C^1$  su questo insieme, risulta che  $F$  è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è **S**.

---

**Quiz 6.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , e  $f(x, y) = x^n(7 - y^n)$ . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

**A** La funzione  $f$  ha punti di massimo locale se e solo se  $n$  è pari.

**E** La funzione  $f$  ha punti di massimo locale se e solo se  $n$  è dispari.

**I** La funzione  $f$  non ha punti di sella se  $n$  è pari.

**R** La funzione  $f$  non ha punti di sella se  $n$  è dispari.

**S** La funzione  $f$  non ha punti di minimo locale se  $n$  è pari.

#### SVOLGIMENTO

La funzione  $f$  è di classe  $C^2$  su  $\mathbb{R}^2$ . Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ . Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = nx^{n-1}(7 - y^n), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -nx^n y^{n-1}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x^{n-1}(7 - y^n) = 0 \\ x^n y^{n-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

I punti stazionari di  $f$  sono  $(0, y_0)$ , con  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

Scriviamo la matrice Hessiana di  $f$  in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \begin{cases} 2(7 - y^2) & \text{se } n = 2 \\ n(n-1)x^{n-2}(7 - y^n) & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \begin{cases} -2x^2 & \text{se } n = 2 \\ n(n-1)x^n y^{n-2} & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

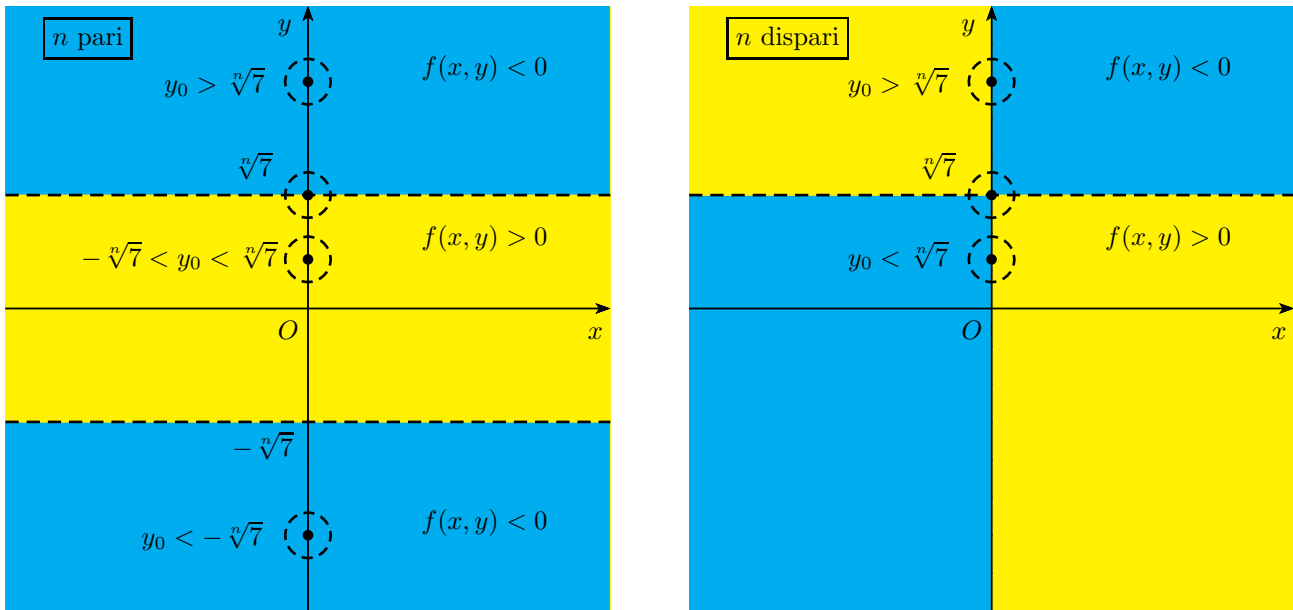
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -n^2 x^{n-1} y^{n-1}.$$

Quindi

$$H_f(0, y_0) = \begin{pmatrix} 2(7 - y_0^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } n = 2, \quad H_f(0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } n \geq 3.$$

Ne segue che non possiamo dire con certezza se i punti  $(0, y_0)$  sono di massimo, di minimo o di sella. Proviamo a fare uno studio locale di  $f$  in un intorno di questi punti.

Si ha che  $f(0, y_0) = 0$ . Inoltre  $f(x, y) > 0$  se e solo se  $x^n(7 - y^n) > 0$ . Distinguiamo due casi, a seconda che  $n$  sia pari o dispari.



Caso  $n$  pari. Si ha che  $f(x, y) > 0$  se e solo se  $x^n(7 - y^n) > 0$ , ovvero se  $x \neq 0$  e  $|y| < \sqrt[n]{7}$ .

Fissato  $(0, y_0)$  con  $|y_0| < \sqrt[n]{7}$ , esiste un intorno  $B_r(0, y_0)$  di  $(0, y_0)$  tutto contenuto nell'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $|y| < \sqrt[n]{7}$  tale che per ogni punto  $(x, y)$  di questo intorno

$$f(x, y) = x^n(7 - y^n) \geq 0.$$

Quindi il punto  $(0, y_0)$  con  $|y_0| < \sqrt[n]{7}$  è di minimo locale.

Similmente, fissato  $(0, y_0)$  con  $|y_0| > \sqrt[n]{7}$ , esiste un intorno  $B_r(0, y_0)$  di  $(0, y_0)$  tutto contenuto nell'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $|y| > \sqrt[n]{7}$  tale che per ogni punto  $(x, y)$  di questo intorno

$$f(x, y) = x^n(7 - y^n) \leq 0.$$

Quindi il punto  $(0, y_0)$  con  $|y_0| > \sqrt[n]{7}$  è di massimo locale.

Invece i punti  $(0, y_0)$  con  $y_0 = \pm \sqrt[n]{7}$ , sono di sella per  $f$ . Infatti, per esempio, in ogni intorno  $B_r(0, \sqrt[n]{7})$  di  $(0, \sqrt[n]{7})$  esistono sia punti  $(x, y)$  tali che  $y > \sqrt[n]{7}$  e quindi tali che  $f(x, y) < 0$ , sia punti  $(x, y)$  tali che  $-\sqrt[n]{7} < y < \sqrt[n]{7}$  e quindi tali che  $f(x, y) > 0$ .

Caso  $n$  dispari. Si ha che  $f(x, y) > 0$  se e solo se  $x^n(7 - y^n) > 0$ , ovvero se  $x > 0$  e  $y < \sqrt[n]{7}$  oppure  $x < 0$  e  $y > \sqrt[n]{7}$ .

Fissato  $(0, y_0)$  con  $y_0 < \sqrt[n]{7}$ , in ogni intorno  $B_r(0, y_0)$  di  $(0, y_0)$  esistono sia punti  $(x, y)$  tali che  $x > 0$  e  $y < \sqrt[n]{7}$  e quindi tali che  $f(x, y) > 0$ , sia punti  $(x, y)$  tali che  $x < 0$  e  $y < \sqrt[n]{7}$  e quindi tali che  $f(x, y) < 0$ . Ne segue che questo punto è di sella. In modo del tutto simile si prova che tutti punti  $(0, y_0)$  sono di sella nel caso  $n$  dispari.

La risposta corretta è A.

**Quiz 7.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto non vuoto,  $x_0 \in \Omega$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Nessuna delle altre è corretta.
- ☐ **D** Se esiste  $\nabla f(x_0)$ , allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .
- ☐ **E** Se esiste  $\nabla f(x_0)$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ .
- ☐ **I** Se  $f$  non è differenziabile in  $x_0$ , allora  $f$  non è continua in  $x_0$ .
- ☐ **M** Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ .

#### SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale in più variabili si ha che la continuità di una funzione in un punto è condizione necessaria affinché la funzione sia differenziabile in quel punto. Ne segue che  $f$  è differenziabile in  $x_0$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ . La risposta corretta è ☒ **M**.

**Quiz 8.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  il campo vettoriale  $F(x) = x (7 + 6\|x\|^2) e^{6\|x\|^2}$ , dove  $\|x\|$  è la norma di  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = 3\|x\| e^{6\|x\|^2}$ .
- ☐ **D**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 e^{6\|x\|^2}$ .
- ☐ **E**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = 3\|x\|^2 e^{6\|x\|^2}$ .
- ☐ **I**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2} e^{6\|x\|^2} (\|x\|^2 + 1)$ .
- ☐ **M**  $F$  non è conservativo su  $\Omega$ .

#### SVOLGIMENTO

Il campo  $F$  è radiale. Infatti, è della forma  $F(x) = \varphi(\|x\|) x$ , dove  $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione  $\varphi(t) = (7 + 6t^2) e^{6t^2}$ . Essendo  $\varphi$  continua, per le proprietà dei campi radiali risulta che  $F$  è conservativo su  $\Omega$ , e un suo potenziale è  $f(x) = \Phi(\|x\|)$ , dove  $\Phi$  è una primitiva della funzione  $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$ . Quindi si ha che

$$\forall t > 0 : \quad \Phi'(t) = t\varphi(t) = t(7 + 6t^2) e^{6t^2}.$$

Ne segue che

$$\Phi(t) = \int (7 + 6t^2) t e^{6t^2} dt =$$

integrando per parti si ottiene

$$= \frac{1}{12} (7 + 6t^2) e^{6t^2} - \int t e^{6t^2} dt = \frac{7}{12} e^{6t^2} + \frac{1}{2} t^2 e^{6t^2} - \frac{1}{12} e^{6t^2} + c = \frac{1}{2} (1 + t^2) e^{6t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2} e^{6\|x\|^2} (\|x\|^2 + 1)$ .

La risposta corretta è ☒ **I**.

**Quiz 9.** Sia  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 2 - x, x \geq 0\}$ . L'integrale  $\int_{\Omega} (-3xy) dx dy$  vale

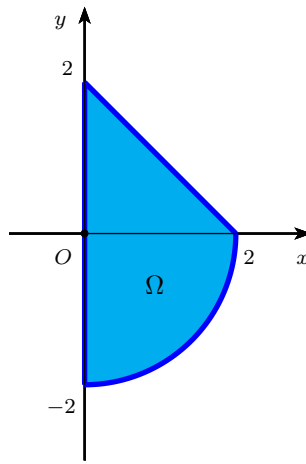
- ☐ **A** 8.
- ☐ **D** 4.
- ☐ **E** 16.
- ☐ **I** 2.
- ☐ **M** 0.

#### SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq 2 - x\}$$

e quindi è un insieme  $y$ -semplice.



Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-3xy) \, dx \, dy &= -3 \int_0^2 \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{2-x} xy \, dy \right) dx = -3 \int_0^2 x \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{2-x} dx = \\ &= -\frac{3}{2} \int_0^2 x [(2-x)^2 - 4 + x^2] \, dx = -3 \int_0^2 (x^3 - 2x^2) \, dx = -3 \left[ \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^2 = 4. \end{aligned}$$

La risposta corretta è **D**.

**Quiz 10.** Siano  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vettoriale di classe  $C^1$ ,  $F = (f_1, f_2)$ , tale che  $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 1$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , e  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16 \leq x^2 + y^2 \leq 64\}$ .

L'integrale di linea di  $F$  lungo il bordo di  $\Omega$  percorso positivamente vale

**A**  $96\pi$ .

**D**  $24\pi$ .

**E**  $12\pi$ .

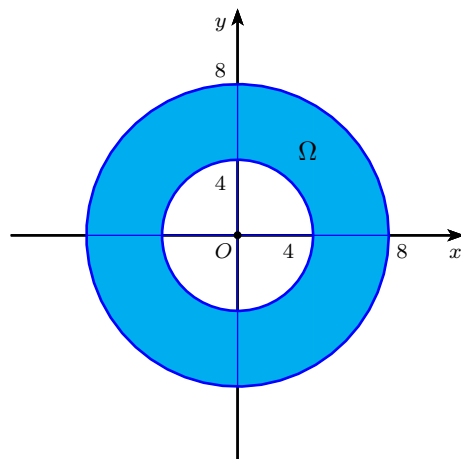
**I**  $48\pi$ .

**M**  $0$ .

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Green l'integrale di linea di  $F$  lungo il bordo di  $\Omega$  orientato positivamente è uguale a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx \, dy = \\ &= \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy = m(\Omega) = 64\pi - 16\pi = 48\pi. \end{aligned}$$



La risposta corretta è **I**.

# Versione V4

---

**Quiz 1.** Sia  $a < -1$ . La serie numerica  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a+1}{a}\right)^n$  converge a

☐  $\frac{a+1}{a}$ .

☐  $-a$ .

☐  $-a-1$ .

☐  $\frac{1}{1-a}$ .

☒  $-\frac{(a+1)^2}{a}$ .

## SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie geometrica con ragione  $\frac{a+1}{a}$ . Sappiamo che la serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$  converge se e solo se  $|b| < 1$  e in tal caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b}.$$

Essendo  $a < -1$ , risulta che  $0 < \frac{a+1}{a} < 1$  e di conseguenza la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a+1}{a}\right)^n$  converge e si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a+1}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a+1}{a}\right)^n - \left[ \left(\frac{a+1}{a}\right)^0 + \left(\frac{a+1}{a}\right)^1 \right] = \frac{1}{1 - \frac{a+1}{a}} - 1 - \frac{a+1}{a} = -\frac{(a+1)^2}{a}.$$

La risposta corretta è ☒  $V$ .

---

**Quiz 2.** Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  ottenuta prolungando per periodicità a tutto  $\mathbb{R}$  la funzione

$$g(x) = \begin{cases} -6\pi & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ -6x & \text{se } 0 < x < \pi, \end{cases} \quad \text{e siano } a_n, b_n, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \text{ i coefficienti di Fourier di } f.$$

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

☐ converge a  $\frac{15}{2} \pi^2$ .

☐ converge a  $\frac{15}{8} \pi^2$ .

☐ converge a  $15\pi^2$ .

☐ converge a  $\frac{15}{16} \pi^2$ .

☐ diverge positivamente.

## SVOLGIMENTO

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^0 36\pi^2 dx + \int_0^{\pi} 36x^2 dx = 36\pi^3 + \left[12x^3\right]_0^{\pi} = 48\pi^3,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-6\pi) dx + \int_0^{\pi} (-6x) dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left( -6\pi^2 - \left[ 3x^2 \right]_0^{\pi} \right) = -\frac{9}{2}\pi.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2a_0^2 = \frac{1}{\pi} 48\pi^3 - 2 \left( -\frac{9}{2}\pi \right)^2 = \frac{15}{2}\pi^2.$$

La risposta corretta è **E**.

**Quiz 3.** Sia  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, z \leq 0\}$ . L'integrale  $\int_{\Omega} \frac{5z}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$  vale

**E**  $-100\pi$ .

**I**  $-10\pi (\log 6 - \log 4)$ .

**R**  $-50\pi$ .

**S**  $0$ .

**V**  $-5\pi (\log 6 - \log 4)$ .

### SVOLGIMENTO

Passando in coordinate sferiche con la colatitudine misurata dall'asse  $z$  si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{5z}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_{\Omega'} 5\rho \cos \vartheta \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\varphi =$$

dove  $\Omega' = [4, 6] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [0, 2\pi]$  e quindi si ottiene

$$= 10\pi \left( \int_4^6 \rho d\rho \right) \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = 10\pi \left[ \frac{1}{2}\rho^2 \right]_4^6 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -50\pi.$$

La risposta corretta è **R**.

**Quiz 4.** Il flusso del campo vettoriale  $F(x, y, z) = \left( \frac{x}{14-z}, \frac{y}{14-z}, -z - e^{xy} \right)$  attraverso la superficie  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 14 - e^{xy}, 0 \leq y \leq 6, 0 \leq x \leq y\}$ , orientata in modo che il vettore normale a  $\Sigma$  formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ , vale

**E**  $12$ .

**I**  $144$ .

**R**  $288$ .

**S**  $72$ .

**V**  $0$ .

### SVOLGIMENTO

La superficie  $\Sigma$  è il grafico della funzione  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $g(x, y) = 14 - e^{xy}$ , dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 6, 0 \leq x \leq y\}.$$

Quindi  $\Sigma = \sigma(K)$ , dove  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  è la superficie parametrica  $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 14 - e^{xy})$ .

Il flusso di  $F$  attraverso  $\Sigma$ , orientata in modo che il vettore normale a  $\Sigma$  formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$  è

$$\int_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) dx dy,$$

dove  $N(x, y)$  è un vettore normale a  $\Sigma$  che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ .

Un vettore normale a  $\Sigma$  è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left( -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (ye^{xy}, xe^{xy}, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse  $z$ .

$$\text{Quindi } N(x, y) = N_\sigma(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy}, 1).$$

Si ha che

$$F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) = F(x, y, 14 - e^{xy}) \cdot (ye^{xy}, xe^{xy}, 1) = (xe^{-xy}, ye^{-xy}, -14) \cdot (ye^{xy}, xe^{xy}, 1) = 2xy - 14.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (2xy - 14) \, dx \, dy =$$

essendo  $K$  un insieme  $y$ -semplice si ottiene

$$= \int_0^6 \left( \int_0^y (2xy - 14) \, dx \right) dy = \int_0^6 [x^2 y - 14x]_0^y dy = \int_0^6 (y^3 - 14y) \, dx = \left[ \frac{1}{4} y^4 - 7y^2 \right]_0^6 = 72.$$

La risposta corretta è ☐ S ☐.

---

**Quiz 5.** Il campo vettoriale  $F(x, y) = \left( x|20y - 1| + 5xy, \quad |5x^2 - y| - \frac{5}{2}x^2 \right)$  è conservativo sull'insieme

☐ E  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{20} < y < 5x^2 \right\}.$

☐ I  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 < y < \frac{1}{20} \right\}.$

☐ R  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5y^2 < x < \frac{1}{20} \right\}.$

☐ S  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{20} < x < 5y^2 \right\}.$

☐ V  $\mathbb{R}^2.$

#### SVOLGIMENTO

Posto  $F = (f_1, f_2)$ , si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 25x & \text{se } 20y > 1 \\ -15x & \text{se } 20y < 1, \end{cases} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 5x & \text{se } 5x^2 > y \\ -15x & \text{se } 5x^2 < y. \end{cases}$$

Quindi  $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$  se e solo se  $5x^2 < y < \frac{1}{20}$ . Poiché l'insieme  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 < y < \frac{1}{20} \right\}$  è semplicemente connesso e  $F$  è di classe  $C^1$  su questo insieme, risulta che  $F$  è conservativo su questo insieme. La risposta corretta è ☐ I ☐.

---

**Quiz 6.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , e  $f(x, y) = y^n(9 - x^n)$ . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ A La funzione  $f$  non ha punti di sella se  $n$  è pari.

☐ I La funzione  $f$  ha punti di massimo locale se e solo se  $n$  è dispari.

☐ G La funzione  $f$  ha punti di massimo locale se e solo se  $n$  è pari.

☐ N La funzione  $f$  non ha punti di sella se  $n$  è dispari.

☐ R La funzione  $f$  non ha punti di minimo locale se  $n$  è pari.

#### SVOLGIMENTO

La funzione  $f$  è di classe  $C^2$  su  $\mathbb{R}^2$ . Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ . Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -nx^{n-1}y^n, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = ny^{n-1}(9 - x^n).$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x^{n-1}y^n = 0 \\ y^{n-1}(9 - x^n) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0. \end{cases}$$

I punti stazionari di  $f$  sono  $(x_0, 0)$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Scriviamo la matrice Hessiana di  $f$  in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \begin{cases} -2y^2 & \text{se } n = 2 \\ -n(n-1)x^{n-2}y^n & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \begin{cases} 2(9-x^2) & \text{se } n = 2 \\ n(n-1)y^{n-2}(9-x^n) & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

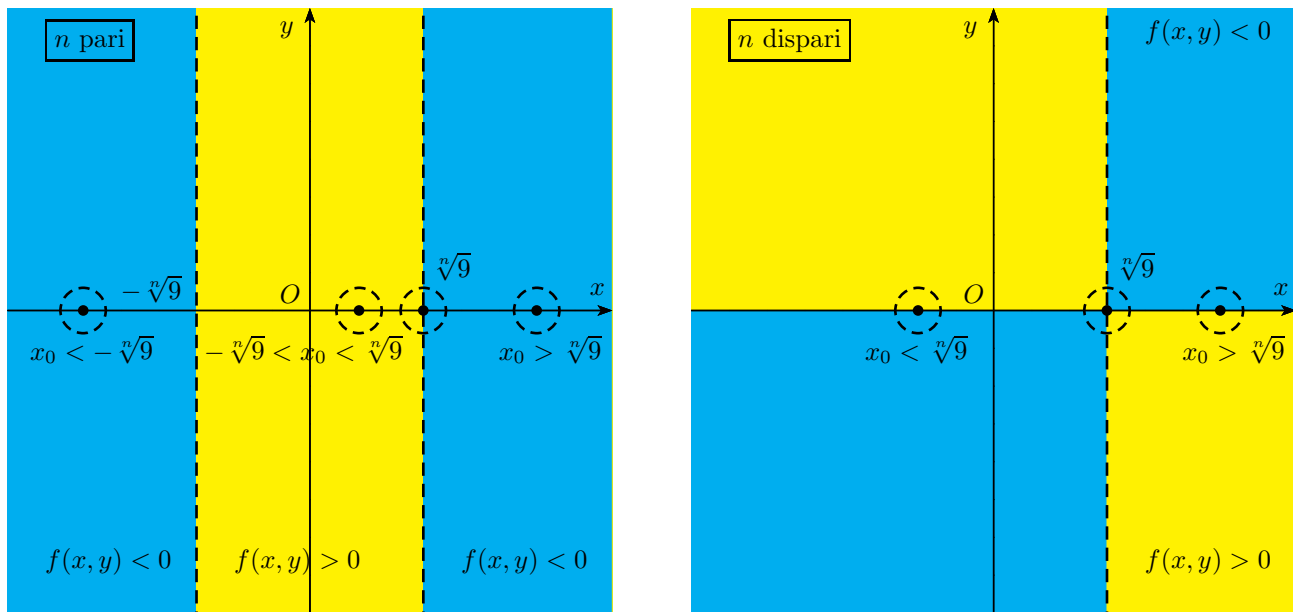
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -n^2 x^{n-1} y^{n-1}.$$

Quindi

$$H_f(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(9-x_0^2) \end{pmatrix}, \quad \text{se } n = 2, \quad H_f(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } n \geq 3.$$

Ne segue che non possiamo dire con certezza se i punti  $(x_0, 0)$  sono di massimo, di minimo o di sella. Proviamo a fare uno studio locale di  $f$  in un intorno di questi punti.

Si ha che  $f(x_0, 0) = 0$ . Inoltre  $f(x, y) > 0$  se e solo se  $y^n(9-x^n) > 0$ . Distinguiamo due casi, a seconda che  $n$  sia pari o dispari.



Caso  $n$  pari. Si ha che  $f(x, y) > 0$  se e solo se  $y^n(9-x^n) > 0$ , ovvero se  $y \neq 0$  e  $|x| < \sqrt[n]{9}$ .

Fissato  $(x_0, 0)$  con  $|x_0| < \sqrt[n]{9}$ , esiste un intorno  $B_r(x_0, 0)$  di  $(x_0, 0)$  tutto contenuto nell'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $|x| < \sqrt[n]{9}$  tale che per ogni punto  $(x, y)$  di questo intorno

$$f(x, y) = y^n(9-x^n) \geq 0.$$

Quindi il punto  $(x_0, 0)$  con  $|x_0| < \sqrt[n]{9}$  è di minimo locale.

Similmente, fissato  $(x_0, 0)$  con  $|x_0| > \sqrt[n]{9}$ , esiste un intorno  $B_r(x_0, 0)$  di  $(x_0, 0)$  tutto contenuto nell'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $|x| > \sqrt[n]{9}$  tale che per ogni punto  $(x, y)$  di questo intorno

$$f(x, y) = y^n(9-x^n) \leq 0.$$

Quindi il punto  $(x_0, 0)$  con  $|x_0| > \sqrt[n]{9}$  è di massimo locale.

Invece i punti  $(x_0, 0)$  con  $x_0 = \pm \sqrt[n]{9}$ , sono di sella per  $f$ . Infatti, per esempio, in ogni intorno  $B_r(\sqrt[n]{9}, 0)$  di  $(\sqrt[n]{9}, 0)$  esistono sia punti  $(x, y)$  tali che  $x > \sqrt[n]{9}$  e quindi tali che  $f(x, y) < 0$ , sia punti  $(x, y)$  tali che  $-\sqrt[n]{9} < x < \sqrt[n]{9}$  e quindi tali che  $f(x, y) > 0$ .

Caso  $n$  dispari. Si ha che  $f(x, y) > 0$  se e solo se  $y^n(9-x^n) > 0$ , ovvero se  $y > 0$  e  $x < \sqrt[n]{9}$  oppure  $y < 0$  e  $x > \sqrt[n]{9}$ .

Fissato  $(x_0, 0)$  con  $x_0 > \sqrt[n]{9}$ , in ogni intorno  $B_r(x_0, 0)$  di  $(x_0, 0)$  esistono sia punti  $(x, y)$  tali che  $y > 0$  e  $x > \sqrt[n]{9}$  e quindi tali che  $f(x, y) < 0$ , sia punti  $(x, y)$  tali che  $y < 0$  e  $x > \sqrt[n]{9}$  e quindi tali che  $f(x, y) > 0$ . Ne segue che questo punto è di sella. In modo del tutto simile si prova che tutti punti  $(x_0, 0)$  sono di sella nel caso  $n$  dispari.

La risposta corretta è .

**Quiz 7.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto non vuoto,  $x_0 \in \Omega$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ **A** Se  $f$  non è differenziabile in  $x_0$ , allora  $f$  non è continua in  $x_0$ .

☐ **I** Se esiste  $\nabla f(x_0)$ , allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .

☐ **G** Se esiste  $\nabla f(x_0)$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ .

☐ **N** Se non esiste  $\nabla f(x_0)$ , allora  $f$  non è differenziabile in  $x_0$ .

☐ **R** Nessuna delle altre è corretta.

#### SVOLGIMENTO

Per le proprietà del calcolo differenziale in più variabili si ha che condizione necessaria affinché  $f$  sia differenziabile in  $x_0$  è che esista  $\nabla f(x_0)$ . Quindi se non esiste  $\nabla f(x_0)$ , allora  $f$  non è differenziabile in  $x_0$ . La risposta corretta è ☒ **N**.

---

**Quiz 8.** Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  il campo vettoriale  $F(x) = x(7 - 3\|x\|^2)e^{-3\|x\|^2}$ , dove  $\|x\|$  è la norma di  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ **A**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-3\|x\|^2}(\|x\|^2 - 2)$ .

☐ **I**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 e^{-3\|x\|^2}$ .

☐ **G**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = -\frac{3}{2}\|x\|^2 e^{-3\|x\|^2}$ .

☐ **N**  $F$  è conservativo su  $\Omega$  e un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = -\frac{3}{2}\|x\| e^{-3\|x\|^2}$ .

☐ **R**  $F$  non è conservativo su  $\Omega$ .

#### SVOLGIMENTO

Il campo  $F$  è radiale. Infatti, è della forma  $F(x) = \varphi(\|x\|)x$ , dove  $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione  $\varphi(t) = (7 - 3t^2)e^{-3t^2}$ . Essendo  $\varphi$  continua, per le proprietà dei campi radiali risulta che  $F$  è conservativo su  $\Omega$ , e un suo potenziale è  $f(x) = \Phi(\|x\|)$ , dove  $\Phi$  è una primitiva della funzione  $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$ . Quindi si ha che

$$\forall t > 0 : \quad \Phi'(t) = t\varphi(t) = t(7 - 3t^2)e^{-3t^2}.$$

Ne segue che

$$\Phi(t) = \int (7 - 3t^2)t e^{-3t^2} dt =$$

integrando per parti si ottiene

$$= -\frac{1}{6}(7 - 3t^2)e^{-3t^2} - \int t e^{-3t^2} dt = -\frac{7}{6}e^{-3t^2} + \frac{1}{2}t^2 e^{-3t^2} + \frac{1}{6}e^{-3t^2} + c = \frac{1}{2}(t^2 - 2)e^{-3t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di  $F$  su  $\Omega$  è  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-3\|x\|^2}(\|x\|^2 - 2)$ .

La risposta corretta è ☒ **A**.

---

**Quiz 9.** Sia  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 3 - y, y \geq 0\}$ . L'integrale  $\int_{\Omega} (-4xy) dx dy$  vale

☐ **A** 0.

☐ **I** 9.

☐ **G** 3.

☐ **N** 54.

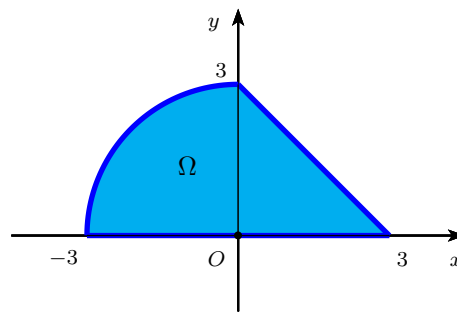
☐ **R** 27.

#### SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 3, -\sqrt{9 - y^2} \leq x \leq 3 - y\}$$

e quindi è un insieme  $x$ -semplice.



Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-4xy) \, dx \, dy &= -4 \int_0^3 \left( \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} xy \, dx \right) dy = -4 \int_0^3 y \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} dy = \\ &= -2 \int_0^3 y [(3-y)^2 - 9 + y^2] \, dy = -4 \int_0^3 (y^3 - 3y^2) \, dy = -4 \left[ \frac{1}{4} y^4 - y^3 \right]_0^3 = 27. \end{aligned}$$

La risposta corretta è **R**.

**Quiz 10.** Siano  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vettoriale di classe  $C^1$ ,  $F = (f_1, f_2)$ , tale che  $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -1$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , e  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 25 \leq x^2 + y^2 \leq 100\}$ .

L'integrale di linea di  $F$  lungo il bordo di  $\Omega$  percorso positivamente vale

**A**  $-25\pi$ .

**I**  $-75\pi$ .

**G**  $-50\pi$ .

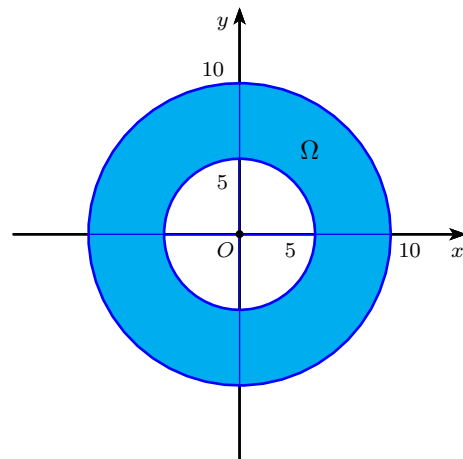
**N**  $-150\pi$ .

**R**  $0$ .

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Green l'integrale di linea di  $F$  lungo il bordo di  $\Omega$  orientato positivamente è uguale a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx \, dy = \\ &= \int_{\Omega} (-1) \, dx \, dy = -m(\Omega) = -(100\pi - 25\pi) = -75\pi. \end{aligned}$$



La risposta corretta è **I**.