

Quiz 1. Sia $p \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin\left(\frac{5n+6}{n^p}\right)$

☐ R converge assolutamente se $p = 4$.

☐ N converge assolutamente se $p < 3$.

☐ G converge assolutamente se $3 < p < 4$.

☐ I converge assolutamente se $p > 4$.

☐ E converge assolutamente se $p = 3$.

SVOLGIMENTO

Studiamo la convergenza assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin\left(\frac{5n+6}{n^p}\right)$, ovvero la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n n^2 \sin\left(\frac{5n+6}{n^p}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left| \sin\left(\frac{5n+6}{n^p}\right) \right|.$$

Se $p > 1$, allora $\frac{5n+6}{n^p} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Ne segue che definitivamente $0 < \frac{5n+6}{n^p} < \frac{\pi}{2}$ e quindi $\sin\left(\frac{5n+6}{n^p}\right) > 0$ e di conseguenza la serie da studiare è

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{5n+6}{n^p}\right).$$

Poiché $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$, per $p > 1$ risulta che

$$n^2 \sin\left(\frac{5n+6}{n^p}\right) \sim \frac{5}{n^{p-3}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-3}}$ converge se e solo se $p-3 > 1$, ovvero se $p > 4$, per il Criterio del Confronto asintotico la serie data converge assolutamente se $p > 4$.

Se $p = 1$ si ha che

$$n^2 \left| \sin\left(\frac{5n+6}{n^p}\right) \right| \rightarrow +\infty.$$

Quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza della serie, e di conseguenza la serie data non converge assolutamente.

Infine, se $p < 1$ si ha che

$$\lim_n n^2 \left| \sin\left(\frac{5n+6}{n^p}\right) \right| \nexists.$$

Quindi anche in questo caso non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza della serie, e di conseguenza la serie data non converge assolutamente.

La risposta corretta è ☒ I .

Quiz 2. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{2^{n/3} + 3^{n/5}} (x-7)^n$ è

☐ N $\frac{2^{1/3}}{5}$.

☐ I $\frac{5}{2^{1/3}}$.

☐ G $\frac{3^{1/5}}{5}$.

$$\boxed{R} \quad \frac{5}{3^{1/5}}.$$

$$\boxed{E} \quad 0.$$

SVOLGIMENTO

La serie di potenze è centrata in $x_0 = 7$. Posto $t = x - 7$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{2^{n/3} + 3^{n/5}} (x-7)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{2^{n/3} + 3^{n/5}} t^n.$$

Posto $a_n = (-1)^n \frac{5^n}{2^{n/3} + 3^{n/5}}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{5^n}{2^{n/3} + 3^{n/5}}} =$$

essendo $2^{1/3} > 3^{1/5}$ si ha che $3^{n/5} = o(2^{n/3})$ per $n \rightarrow +\infty$ e quindi si ottiene

$$= \lim_n \sqrt[n]{\frac{5^n}{2^{n/3} + o(2^{n/3})}} = \lim_n \frac{5}{\sqrt[n]{2^{n/3} + o(2^{n/3})}} = \frac{5}{2^{1/3}}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza è $R = \frac{2^{1/3}}{5}$. La risposta corretta è $\boxed{N}$.

Quiz 3. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 2\}$. L'integrale $\int_{\Sigma} 3(z - x^2 - y^2) d\sigma$ vale

$$\boxed{N} \quad 104\pi.$$

$$\boxed{M} \quad 12\pi (6\sqrt{2} + \arctan(2\sqrt{2})).$$

$$\boxed{R} \quad 0.$$

$$\boxed{G} \quad 52\pi.$$

$$\boxed{E} \quad 24\pi (6\sqrt{2} + \arctan(2\sqrt{2})).$$

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x, y) = 4 + x^2 + y^2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 4 + x^2 + y^2)$.

Posto $f(x, y, z) = 3(z - x^2 - y^2)$, l'integrale da calcolare è

$$\int_{\Sigma} 3(z - x^2 - y^2) d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ così definito

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-2x, -2y, 1).$$

Quindi $\|N(x, y)\| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$. Ne segue che

$$\int_{\Sigma} 3(z - x^2 - y^2) d\sigma = \int_K f(x, y, 4 + x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = 12 \int_K \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$\begin{aligned} &= 12 \int_{K'=[0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho d\vartheta = 24\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = 24\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho (1 + 4\rho^2)^{1/2} d\rho = \\ &= 24\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = 52\pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è G.

Quiz 4. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(10xy + 3y^2 + \frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}}, 5x^2 + 6xy + \frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^2 - 4t + \sin(2\pi t), t + t^3(e^{4t} - e^{16}) \right)$ vale

A 0.

M $\sqrt{5} - 1$.

G $4(\sqrt{5} - 1)$.

R $2\sqrt{2}$.

E $2(\sqrt{5} - 1)$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è un insieme semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 10x + 6y - \frac{xy}{(4+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Un potenziale f di F su $\mathbb{R}^2$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 10xy + 3y^2 + \frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 5x^2 + 6xy + \frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Integrando rispetto a x la prima relazione si ottiene

$$f(x, y) = \int \left(10xy + 3y^2 + \frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}} \right) dx = 5x^2y + 3xy^2 + \sqrt{4+x^2+y^2} + c(y),$$

dove c è una generica funzione dipendente solo da y . Sostituendo nella seconda relazione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5x^2 + 6xy + \frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}} + c'(y) = 5x^2 + 6xy + \frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}} \implies c'(y) = 0 \implies c(y) = k, k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 5x^2y + 3xy^2 + \sqrt{4+x^2+y^2} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(4)) - f(\gamma(0)) = f(0, 4) - f(0, 0) = 2(\sqrt{5} - 1).$$

La risposta corretta è E.

Quiz 5. La derivata della funzione $f(x, y) = 3x^2y + 5xy^2 + 14 \arctan(x + y)$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$ rispetto al vettore $v = (-3, 7)$ vale

G 49.

M 7.

R 3.

N 10.

E 0.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, e di conseguenza è differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Per le proprietà delle funzioni differenziabili, si ha che la derivata della funzione f in punto (x_0, y_0) rispetto ad un vettore v è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v.$$

Si ha che

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left(6xy + 5y^2 + \frac{14}{1 + (x + y)^2}, 3x^2 + 10xy + \frac{14}{1 + (x + y)^2} \right).$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot (-3, 7) = (7, 10) \cdot (-3, 7) = 49.$$

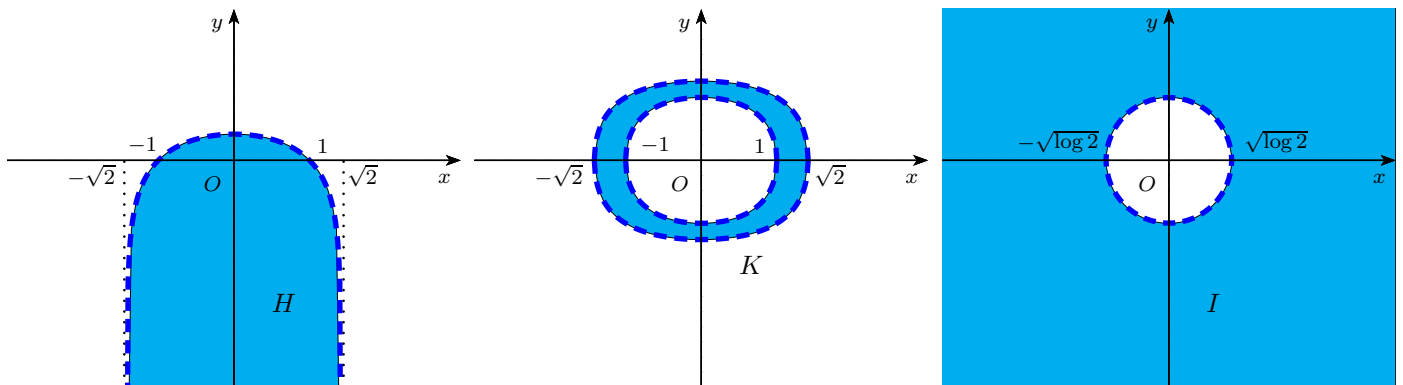
La risposta corretta è **G**.

Quiz 6. Siano $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + e^{2y} < 2\}$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x^2 + e^{y^2} < 3\}$, $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-x^2 - y^2} < \frac{1}{2}\}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Solo l'insieme K è semplicemente connesso.
- ☐ **N** Solo l'insieme H è semplicemente connesso.
- ☐ **M** Solo l'insieme I è semplicemente connesso.
- ☐ **R** Tutti i tre insiemi sono semplicemente connessi.
- ☐ **E** Nessuno dei tre insiemi è semplicemente connesso.

SVOLGIMENTO



Solo l'insieme H è semplicemente connesso. La risposta corretta è **N**.

Quiz 7. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo su Ω e $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Nessuna delle altre è corretta.
- ☐ **R** $f - g$ è costante su Ω .
- ☐ **N** Se Ω non è connesso per archi, allora $f - g$ non è costante su Ω .
- ☐ **M** Se F è di classe C^1 su Ω , allora $f - g$ è costante su Ω .
- ☐ **E** Se Ω è connesso per archi, allora $f - g$ è costante su Ω .

SVOLGIMENTO

Per le proprietà dei potenziali di un campo conservativo, se Ω è connesso per archi, allora $f - g$ è costante su Ω . La risposta corretta è **E**.

Quiz 8. Sia (a_n) una successione reale tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$.

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} (2a_n - 3a_{n-1})$

☐ A converge al numero reale $a_0 + a_1 - S$.

☐ M converge al numero reale $-S$.

☐ R converge al numero reale $a_0 - 2a_1 - S$.

☐ C converge al numero reale $3a_1 - S$.

☐ E converge al numero reale $a_0 - a_1 - S$.

SVOLGIMENTO

Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a S , per l'algebra delle serie anche le serie $\sum_{n=2}^{\infty} 2a_n$ e $\sum_{n=2}^{\infty} 3a_{n-1}$ convergono e quindi la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (2a_n - 3a_{n-1})$ converge. Più precisamente si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (2a_n - 3a_{n-1}) = 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n - 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} =$$

posto $k = n - 1$ nella serie di destra si ottiene

$$= 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n - 3 \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_0 - a_1 \right) - 3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k - a_0 \right) = a_0 - 2a_1 - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}_S = a_0 - 2a_1 - S.$$

La risposta corretta è ☐ R .

Quiz 9. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$. L'integrale $\int_{\Omega} 5x \, dx \, dy \, dz$ vale

☐ M 45π .

☐ I 30π .

☐ N $45\sqrt{2}\pi$.

☐ G 90π .

☐ E 60π .

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse conincidente con l'asse x si ha che

$$\int_{\Omega} 5x \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} 5x\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$ che è un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ, ϑ, x . Ne segue che

$$\int_{\Omega} 5x \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} 5x\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 10\pi \left(\int_0^3 \rho \, d\rho \right) \left(\int_0^{\sqrt{2}} x \, dx \right) = 10\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2 \right]_0^3 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{2}} = 45\pi.$$

La risposta corretta è ☐ M .

Quiz 10. Siano $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0\}$ e $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 tale che $\operatorname{div} F(x, y, z) = 3$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Il flusso uscente di F dal bordo di Ω vale

☐ A 16π .

☐ I 32π .

☐ N 8π .

☐ $\frac{32}{3}\pi.$

☐ $0.$

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza) il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 3 \, dx \, dy \, dz = 3m(\Omega) = 16\pi.$$

La risposta corretta è ☐ A .

Versione: V2

Quiz 1. Quiz 1. Sia $p \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^p \sin^3 \left(\frac{6n+4}{n^2} \right)$

☐ **A** converge assolutamente se $p = 2$.

☐ **I** converge assolutamente se $p > 3$.

☐ **C** converge assolutamente se $2 < p < 3$.

☐ **D** converge assolutamente se $p < 2$.

☐ **L** converge assolutamente se $p = 3$.

SVOLGIMENTO

Studiamo la convergenza assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^p \sin^3 \left(\frac{6n+4}{n^2} \right)$, ovvero la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n n^p \sin^3 \left(\frac{6n+4}{n^2} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \left| \sin^3 \left(\frac{6n+4}{n^2} \right) \right|.$$

Poiché $\frac{6n+4}{n^2} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, si ha che definitivamente $0 < \frac{6n+4}{n^2} < \pi$ e quindi $\sin \left(\frac{6n+4}{n^2} \right) > 0$ e di conseguenza la serie da studiare è

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \sin^3 \left(\frac{6n+4}{n^2} \right).$$

Poiché $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$, per ogni $p \in \mathbb{R}$ risulta che

$$n^p \sin^3 \left(\frac{6n+4}{n^2} \right) \sim \frac{1}{n^{3-p}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}}$ converge se e solo se $3-p > 1$, ovvero se $p < 2$, per il Criterio del Confronto asintotico la serie data converge assolutamente se $p < 2$.

La risposta corretta è ☒ **D**.

Quiz 2. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{3^{n/4} + 4^{n/5}} (x+5)^n$ è

☐ **A** $\frac{4^{1/5}}{7}$.

☐ **I** $\frac{7}{4^{1/5}}$.

☐ **C** $\frac{3^{1/4}}{7}$.

☐ **D** $\frac{7}{3^{1/4}}$.

☐ **L** 0.

SVOLGIMENTO

La serie di potenze è centrata in $x_0 = -5$. Posto $t = x+5$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{3^{n/4} + 4^{n/5}} (x+5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{3^{n/4} + 4^{n/5}} t^n.$$

Posto $a_n = (-1)^n \frac{7^n}{3^{n/4} + 4^{n/5}}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{7^n}{3^{n/4} + 4^{n/5}}} =$$

essendo $4^{1/5} > 3^{1/4}$ si ha che $3^{n/4} = o(4^{n/5})$ per $n \rightarrow +\infty$ e quindi si ottiene

$$= \lim_n \sqrt[n]{\frac{7^n}{3^{n/4} + o(4^{n/5})}} = \lim_n \frac{7}{\sqrt[n]{4^{n/5} + o(4^{n/5})}} = \frac{7}{4^{1/5}}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza è $R = \frac{4^{1/5}}{7}$. La risposta corretta è **A**.

Quiz 3. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 6\}$. L'integrale $\int_{\Sigma} 2(z - x^2 - y^2) d\sigma$ vale

A 0.

L $6\pi(10\sqrt{6} + \arctan(2\sqrt{6}))$.

C 124π .

D 62π .

E $3\pi(10\sqrt{6} + \arctan(2\sqrt{6}))$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x, y) = 3 + x^2 + y^2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 6\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 3 + x^2 + y^2)$.

Posto $f(x, y, z) = 2(z - x^2 - y^2)$, l'integrale da calcolare è

$$\int_{\Sigma} 2(z - x^2 - y^2) d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ così definito

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-2x, -2y, 1).$$

Quindi $\|N(x, y)\| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$. Ne segue che

$$\int_{\Sigma} 2(z - x^2 - y^2) d\sigma = \int_K f(x, y, 3 + x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = 6 \int_K \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$\begin{aligned} &= 6 \int_{K'=[0, \sqrt{6}] \times [0, 2\pi]} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho d\vartheta = 12\pi \int_0^{\sqrt{6}} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = 12\pi \int_0^{\sqrt{6}} \rho (1 + 4\rho^2)^{1/2} d\rho = \\ &= 12\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{6}} = 124\pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è **C**.

Quiz 4. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(8xy + 6y^2 + \frac{x}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}}, 4x^2 + 12xy + \frac{y}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t - t^4 (e^{6t} - e^{36}), t^3 - 6t^2 - \sin(3\pi t) \right)$ vale

A 0.

I $\sqrt{13} - 1$.

C $4(\sqrt{13} - 1)$.

L $2\sqrt{13}$.

E $2(\sqrt{13} - 2)$.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è un insieme semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 8x + 12y - \frac{xy}{(16 + x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Un potenziale f di F su $\mathbb{R}^2$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 8xy + 6y^2 + \frac{x}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x^2 + 12xy + \frac{y}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Integrando rispetto a x la prima relazione si ottiene

$$f(x, y) = \int \left(8xy + 6y^2 + \frac{x}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}} \right) dx = 4x^2y + 6xy^2 + \sqrt{16 + x^2 + y^2} + c(y),$$

dove c è una generica funzione dipendente solo da y . Sostituendo nella seconda relazione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x^2 + 12xy + \frac{y}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}} + c'(y) = 4x^2 + 12xy + \frac{y}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}} \implies c'(y) = 0 \implies c(y) = k, k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 4x^2y + 6xy^2 + \sqrt{16 + x^2 + y^2} + c(y) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(6)) - f(\gamma(0)) = f(6, 0) - f(0, 0) = 2(\sqrt{13} - 2).$$

La risposta corretta è ☐ E ☒.

Quiz 5. La derivata della funzione $f(x, y) = 9x^2y + 7xy^2 + 10 \arctan(x + y)$ nel punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ rispetto al vettore $v = (5, -7)$ vale

☐ A 10.

☐ L 25.

☐ R 7.

☐ I 12.

☐ E 0.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, e di conseguenza è differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Per le proprietà delle funzioni differenziabili, si ha che la derivata della funzione f in punto (x_0, y_0) rispetto ad un vettore v è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v.$$

Si ha che

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left(18xy + 7y^2 + \frac{10}{1 + (x + y)^2}, 9x^2 + 14xy + \frac{10}{1 + (x + y)^2} \right).$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 1) = \nabla f(0, 1) \cdot (5, -7) = (12, 5) \cdot (5, -7) = 25.$$

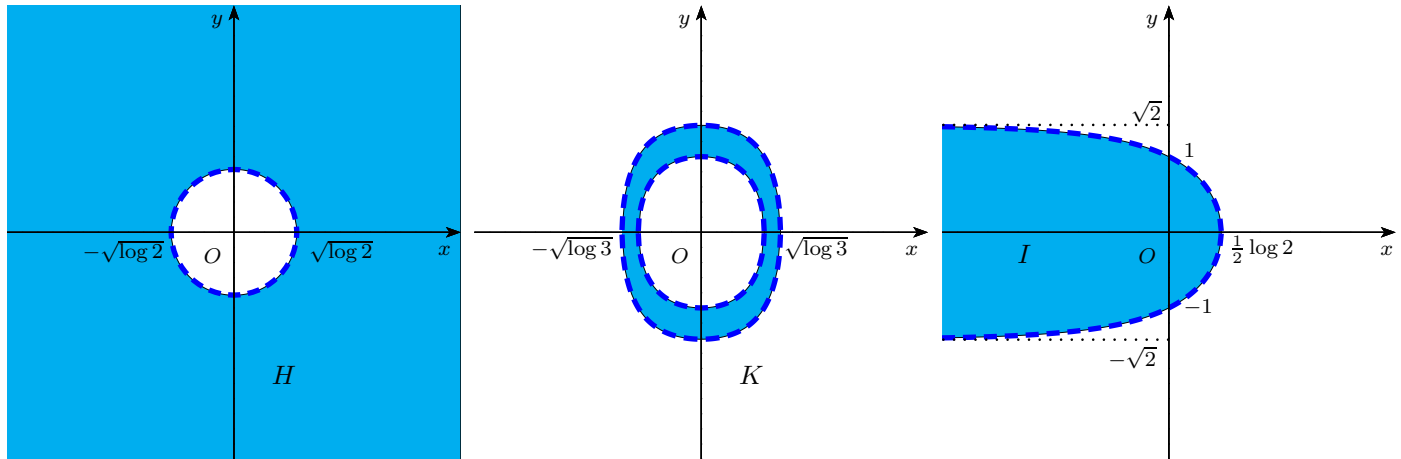
La risposta corretta è ☐ L ☒.

Quiz 6. Siano $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x^2+y^2} > 2\}$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < e^{x^2} + y^2 < 3\}$, $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{2x} + y^2 < 2\}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ R Tutti i tre insiemi sono semplicemente connessi.
- ☐ P Solo l'insieme K è semplicemente connesso.
- ☐ I Solo l'insieme H è semplicemente connesso.
- ☐ A Solo l'insieme I è semplicemente connesso.
- ☐ S Nessuno dei tre insiemi è semplicemente connesso.

SVOLGIMENTO



Solo l'insieme I è semplicemente connesso. La risposta corretta è ☐ A .

Quiz 7. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo su Ω e $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ A $f - g$ è costante su Ω .
- ☐ R Se Ω è connesso per archi, allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - g(x) = c$ per ogni $x \in \Omega$.
- ☐ S Se Ω è connesso per archi, allora per ogni $c \in \mathbb{R}$ esiste $x \in \Omega$ tale che $f(x) - g(x) = c$.
- ☐ P Se F è di classe C^1 su Ω , allora $f - g$ è costante su Ω .
- ☐ I Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per le proprietà dei potenziali di un campo conservativo, se Ω è connesso per archi, allora $f - g$ è costante su Ω . Quindi esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - g(x) = c$ per ogni $x \in \Omega$. La risposta corretta è ☐ R .

Quiz 8. Sia (a_n) una successione reale tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$.

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} (3a_n - 2a_{n-1})$

- ☐ P converge al numero reale $S - a_0 - a_1$.
- ☐ S converge al numero reale S .
- ☐ R converge al numero reale $S - a_0 - 2a_1$.
- ☐ A converge al numero reale $S - 3a_1$.
- ☐ I converge al numero reale $S - a_0 - 3a_1$.

SVOLGIMENTO

Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a S , per l'algebra delle serie anche le serie $\sum_{n=2}^{\infty} 3a_n$ e $\sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1}$ convergono e quindi la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (3a_n - 2a_{n-1})$ converge. Più precisamente si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (3a_n - 2a_{n-1}) = 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} =$$

posto $k = n - 1$ nella serie di destra si ottiene

$$= 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_n - 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_0 - a_1 \right) - 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k - a_0 \right) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}_S - a_0 - 3a_1 = S - a_0 - 3a_1.$$

La risposta corretta è **I**.

Quiz 9. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$. L'integrale $\int_{\Omega} 3y \, dx \, dy \, dz$ vale

S 27π .

O 18π .

T $27\sqrt{2}\pi$.

P 54π .

I 36π .

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse conincidente con l'asse y si ha che

$$\int_{\Omega} 3y \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} 3y\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 3\}$ che è un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ, ϑ, y . Ne segue che

$$\int_{\Omega} 3y \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} 3y\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 6\pi \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \right) \left(\int_0^3 y \, dy \right) = 6\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2 \right]_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^3 = 27\pi.$$

La risposta corretta è **S**.

Quiz 10. Siano $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0\}$ e $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 tale che $\operatorname{div} F(x, y, z) = 4$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Il flusso uscente di F dal bordo di Ω vale

A 8π .

O 144π .

S 36π .

P 72π .

T 0 .

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza) il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 4 \, dx \, dy \, dz = 4m(\Omega) = 72\pi.$$

La risposta corretta è **P**.

Quiz 1. Sia $p \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^4 \sin^p \left(\frac{6n+5}{n^2} \right)$

☐ converge assolutamente se $p > 5$.

☐ converge assolutamente se $p < 4$.

☐ converge assolutamente se $4 < p < 5$.

☐ converge assolutamente se $p = 5$.

☐ converge assolutamente se $p = 4$.

SVOLGIMENTO

Studiamo la convergenza assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^4 \sin^p \left(\frac{6n+5}{n^2} \right)$, ovvero la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n n^4 \sin^p \left(\frac{6n+5}{n^2} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left| \sin^p \left(\frac{6n+5}{n^2} \right) \right|.$$

Poiché $\frac{6n+5}{n^2} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, definitivamente $0 < \frac{6n+5}{n^2} < \pi$ e quindi $\sin^p \left(\frac{6n+5}{n^2} \right) > 0$. Ne segue che la serie da studiare è

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \sin^p \left(\frac{6n+5}{n^2} \right).$$

Poiché $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$, per ogni $p \in \mathbb{R}$ risulta che

$$n^4 \sin^p \left(\frac{6n+5}{n^2} \right) \sim \frac{6^p}{n^{p-4}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-4}}$ converge se e solo se $p-4 > 1$, ovvero se $p > 5$, per il Criterio del Confronto asintotico la serie data converge assolutamente se $p > 5$.

La risposta corretta è ☒.

Quiz 2. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n/3} + 3^{n/5}}{5^n} (x-9)^n$ è

☐ $\frac{2^{1/3}}{5}$.

☐ $\frac{5}{2^{1/3}}$.

☐ $\frac{3^{1/5}}{5}$.

☐ $\frac{5}{3^{1/5}}$.

☐ 0.

SVOLGIMENTO

La serie di potenze è centrata in $x_0 = 9$. Posto $t = x - 9$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n/3} + 3^{n/5}}{5^n} (x-9)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n/3} + 3^{n/5}}{5^n} t^n.$$

Posto $a_n = (-1)^n \frac{2^{n/3} + 3^{n/5}}{5^n}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^{n/3} + 3^{n/5}}{5^n}} =$$

essendo $2^{1/3} > 3^{1/5}$ si ha che $3^{n/5} = o(2^{n/3})$ per $n \rightarrow +\infty$ e quindi si ottiene

$$= \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^{n/3} + o(2^{n/3})}{5^n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^{n/3} + o(2^{n/3})}{5}} = \frac{2^{1/3}}{5}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza è $R = \frac{5}{2^{1/3}}$. La risposta corretta è **[S]**.

Quiz 3. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 2\}$. L'integrale $\int_{\Sigma} 4(z + x^2 + y^2) d\sigma$ vale

[A] 0.

[S] $12\pi(6\sqrt{2} + \arctan(2\sqrt{2}))$.

[T] 52π .

[R] 104π .

[E] $24\pi(6\sqrt{2} + \arctan(2\sqrt{2}))$.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x, y) = 3 - x^2 - y^2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 3 - x^2 - y^2)$.

Posto $f(x, y, z) = 4(z + x^2 + y^2)$, l'integrale da calcolare è

$$\int_{\Sigma} 4(z + x^2 + y^2) d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ così definito

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (2x, 2y, 1).$$

Quindi $\|N(x, y)\| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$. Ne segue che

$$\int_{\Sigma} 4(z + x^2 + y^2) d\sigma = \int_K f(x, y, 3 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = 12 \int_K \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$\begin{aligned} &= 12 \int_{K'=[0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho d\vartheta = 24\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = 24\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho (1 + 4\rho^2)^{1/2} d\rho = \\ &= 24\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = 52\pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è **[T]**.

Quiz 4. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(14xy + 5y^2 + \frac{x}{\sqrt{9 + x^2 + y^2}}, 7x^2 + 10xy + \frac{y}{\sqrt{9 + x^2 + y^2}} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^2 - 5t + \sin(4\pi t), t + t^3(e^{5t} - e^{25}))$ vale

[A] $\sqrt{34} - 3$.

[S] $\frac{1}{2}(\sqrt{34} - 3)$.

[C] $2(\sqrt{34} - 3)$.

[O] $\sqrt{34}$.

[E] 0.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è un insieme semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 14x + 10y - \frac{xy}{(9 + x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Un potenziale f di F su $\mathbb{R}^2$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 14xy + 5y^2 + \frac{x}{\sqrt{9 + x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 7x^2 + 10xy + \frac{y}{\sqrt{9 + x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Integrando rispetto a x la prima relazione si ottiene

$$f(x, y) = \int \left(14xy + 5y^2 + \frac{x}{\sqrt{9 + x^2 + y^2}} \right) dx = 7x^2y + 5xy^2 + \sqrt{9 + x^2 + y^2} + c(y),$$

dove c è una generica funzione dipendente solo da y . Sostituendo nella seconda relazione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 7x^2 + 10xy + \frac{y}{\sqrt{9 + x^2 + y^2}} + c'(y) = 7x^2 + 10xy + \frac{y}{\sqrt{9 + x^2 + y^2}} \implies c'(y) = 0 \implies c(y) = k, k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 7x^2y + 10xy^2 + \sqrt{9 + x^2 + y^2} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(5)) - f(\gamma(0)) = f(0, 5) - f(0, 0) = \sqrt{34} - 3.$$

La risposta corretta è A.

Quiz 4. La derivata della funzione $f(x, y) = 4x^2y + 6xy^2 + 16 \arctan(x + y)$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$ rispetto al vettore $v = (-4, 8)$ vale

A 4.

O 8.

C 64.

R 12.

T 0.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, e di conseguenza è differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Per le proprietà delle funzioni differenziabili, si ha che la derivata della funzione f in punto (x_0, y_0) rispetto ad un vettore v è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v.$$

Si ha che

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left(8xy + 6y^2 + \frac{16}{1 + (x + y)^2}, 4x^2 + 12xy + \frac{16}{1 + (x + y)^2} \right).$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot (-4, 8) = (8, 12) \cdot (-4, 8) = 64.$$

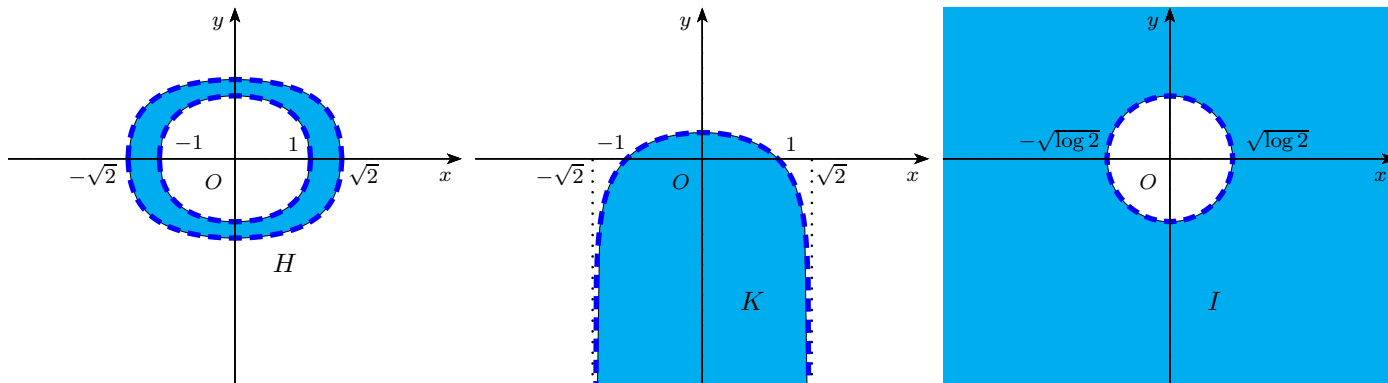
La risposta corretta è C.

Quiz 6. Siano $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x^2 + e^{y^2} < 3\}$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + e^{2y} < 2\}$, $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-x^2 - y^2} < \frac{1}{2}\}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** Tutti i tre insiemi sono semplicemente connessi.
- ☐ **R** Solo l'insieme H è semplicemente connesso.
- ☐ **C** Solo l'insieme I è semplicemente connesso.
- ☐ **O** Solo l'insieme K è semplicemente connesso.
- ☐ **T** Nessuno dei tre insiemi è semplicemente connesso.

SVOLGIMENTO



Solo l'insieme K è semplicemente connesso. La risposta corretta è ☒ **O**.

Quiz 7. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo su Ω e $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ **A** $f - g$ è costante su Ω .
- ☐ **R** Se Ω è connesso per archi, allora $f - g$ è costante su Ω .
- ☐ **C** Se Ω non è connesso per archi, allora $f - g$ non è costante su Ω .
- ☐ **T** Se F è di classe C^1 su Ω , allora $f - g$ è costante su Ω .
- ☐ **E** Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per le proprietà dei potenziali di un campo conservativo, se Ω è connesso per archi, allora $f - g$ è costante su Ω . La risposta corretta è ☒ **R**.

Quiz 8. Sia (a_n) una successione reale tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$.

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} (3a_{n-1} - 2a_n)$

- ☐ **A** converge al numero reale $S - 3a_1$.
- ☐ **T** converge al numero reale S .
- ☐ **C** converge al numero reale $S - a_0 - a_1$.
- ☐ **R** converge al numero reale $S - a_0 + 2a_1$.
- ☐ **E** converge al numero reale $S - a_0 + a_1$.

SVOLGIMENTO

Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a S , per l'algebra delle serie anche le serie $\sum_{n=2}^{\infty} 2a_n$ e $\sum_{n=2}^{\infty} 3a_{n-1}$ convergono e quindi la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (3a_{n-1} - 2a_n)$ converge. Più precisamente si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (3a_{n-1} - 2a_n) = 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n =$$

posto $k = n - 1$ nella serie di sinistra si ottiene

$$= 3 \sum_{k=1}^{\infty} a_k - 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k - a_0 \right) - 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_0 - a_1 \right) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}_{S} - a_0 + 2a_1 = S - a_0 + 2a_1.$$

La risposta corretta è **R**.

Quiz 9. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 9, -\sqrt{2} \leq x \leq 0\}$. L'integrale $\int_{\Omega} 5x \, dx \, dy \, dz$ vale

A -60π .

R -30π .

C $-45\sqrt{2}\pi$.

T -90π .

E -45π .

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse conincidente con l'asse x si ha che

$$\int_{\Omega} 5x \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} 5x\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, -\sqrt{2} \leq x \leq 0\}$ che è un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ, ϑ, x . Ne segue che

$$\int_{\Omega} 5x \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} 5x\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 10\pi \left(\int_0^3 \rho \, d\rho \right) \left(\int_{-\sqrt{2}}^0 x \, dx \right) = 10\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2 \right]_0^3 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{-\sqrt{2}}^0 = -45\pi.$$

La risposta corretta è **E**.

Quiz 10. Siano $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \leq 0\}$ e $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 tale che $\operatorname{div} F(x, y, z) = -3$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Il flusso uscente di F dal bordo di Ω vale

A -32π .

T -16π .

C -8π .

R $-\frac{32}{3}\pi$.

E 0 .

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza) il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} (-3) \, dx \, dy \, dz = -3m(\Omega) = -16\pi.$$

La risposta corretta è **T**.

Quiz 1. Sia $p \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin\left(\frac{n^p}{3n+2}\right)$

☐ **A** converge assolutamente se $p = -2$.

☐ **R** converge assolutamente se $p > -1$.

☐ **S** converge assolutamente se $-2 < p < -1$.

☐ **T** converge assolutamente se $p < -2$.

☐ **E'** converge assolutamente se $p = -1$.

SVOLGIMENTO

Studiamo la convergenza assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin\left(\frac{n^p}{3n+2}\right)$, ovvero la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n n^2 \sin\left(\frac{n^p}{3n+2}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left| \sin\left(\frac{n^p}{3n+2}\right) \right|.$$

Se $p < 1$, allora $\frac{n^p}{3n+2} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Ne segue che definitivamente $0 < \frac{n^p}{3n+2} < \pi$ e quindi $\sin\left(\frac{n^p}{3n+2}\right) > 0$ e di conseguenza la serie da studiare è

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{n^p}{3n+2}\right).$$

Poiché $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$, per $p < 1$ risulta che

$$n^2 \sin\left(\frac{n^p}{3n+2}\right) \sim \frac{1}{3n^{-1-p}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1-p}}$ converge se e solo se $-1 - p > 1$, ovvero se $p < -2$, per il Criterio del Confronto asintotico la serie data converge assolutamente se $p < -2$.

Se $p = 1$ si ha che

$$n^2 \left| \sin\left(\frac{n^p}{3n+2}\right) \right| \rightarrow +\infty.$$

Quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza della serie, e di conseguenza la serie data non converge assolutamente.

Infine, se $p > 1$ si ha che

$$\lim_n n^2 \left| \sin\left(\frac{n^p}{3n+2}\right) \right| \nexists.$$

Quindi anche in questo caso non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza della serie, e di conseguenza la serie data non converge assolutamente.

La risposta corretta è ☒ **T**.

Quiz 2. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n/4} + 4^{n/5}}{7^n} (x+9)^n$ è

☐ **A** $\frac{7}{4^{1/5}}$.

☐ **R** $\frac{4^{1/5}}{7}$.

☐ **S** $\frac{3^{1/4}}{7}$.

☐ **T** $\frac{7}{3^{1/4}}$.

☐ **E'** 0.

SVOLGIMENTO

La serie di potenze è centrata in $x_0 = -9$. Posto $t = x + 9$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n/4} + 4^{n/5}}{7^n} (x+9)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n/4} + 4^{n/5}}{7^n} t^n.$$

Posto $a_n = (-1)^n \frac{3^{n/4} + 4^{n/5}}{7^n}$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{3^{n/4} + 4^{n/5}}{7^n}} =$$

essendo $4^{1/5} > 3^{1/4}$ si ha che $3^{n/4} = o(4^{n/5})$ per $n \rightarrow +\infty$ e quindi si ottiene

$$= \lim_n \sqrt[n]{\frac{4^{n/5} + o(4^{n/5})}{7^n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{4^{n/5} + o(4^{n/5})}}{7} = \frac{4^{1/5}}{7}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza è $R = \frac{7}{4^{1/5}}$. La risposta corretta è **A**.

Quiz 3. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 6\}$. L'integrale $\int_{\Sigma} 3(z + x^2 + y^2) d\sigma$ vale

A $3\pi(10\sqrt{6} + \arctan(2\sqrt{6}))$.

R $6\pi(10\sqrt{6} + \arctan(2\sqrt{6}))$.

S 0.

T 62π .

E' 124π .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x, y) = 2 - x^2 - y^2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 6\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 2 - x^2 - y^2)$.

Posto $f(x, y, z) = 3(z + x^2 + y^2)$, l'integrale da calcolare è

$$\int_{\Sigma} 3(z + x^2 + y^2) d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (2x, 2y, 1).$$

Quindi $\|N(x, y)\| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$. Ne segue che

$$\int_{\Sigma} 3(z + x^2 + y^2) d\sigma = \int_K f(x, y, 2 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = 6 \int_K \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$\begin{aligned} &= 6 \int_{K'=[0, \sqrt{6}] \times [0, 2\pi]} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho d\vartheta = 12\pi \int_0^{\sqrt{6}} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = 12\pi \int_0^{\sqrt{6}} \rho (1 + 4\rho^2)^{1/2} d\rho = \\ &= 12\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{6}} = 124\pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è **E'**.

Quiz 4. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = \left(18xy + 7y^2 + \frac{x}{\sqrt{25 + x^2 + y^2}}, 9x^2 + 14xy + \frac{y}{\sqrt{25 + x^2 + y^2}} \right)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t - t^4 (e^{2t} - e^4), t^3 - 2t^2 - \sin(6\pi t) \right)$ vale

☐ $\frac{1}{2} (\sqrt{29} - 5)$.

☐ $\sqrt{29} - 5$.

☐ $2 (\sqrt{29} - 5)$.

☐ $\sqrt{29}$.

☐ 0.

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è un insieme semplicemente connesso. Posto $F = (f_1, f_2)$ si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 18x + 14y - \frac{xy}{(25 + x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Quindi F è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Un potenziale f di F su $\mathbb{R}^2$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = 18xy + 7y^2 + \frac{x}{\sqrt{25 + x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 9x^2 + 14xy + \frac{y}{\sqrt{25 + x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Integrando rispetto a x la prima relazione si ottiene

$$f(x, y) = \int \left(18xy + 7y^2 + \frac{x}{\sqrt{25 + x^2 + y^2}} \right) dx = 9x^2y + 7xy^2 + \sqrt{25 + x^2 + y^2} + c(y),$$

dove c è una generica funzione dipendente solo da y . Sostituendo nella seconda relazione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 9x^2 + 14xy + \frac{y}{\sqrt{25 + x^2 + y^2}} + c'(y) = 9x^2 + 14xy + \frac{y}{\sqrt{25 + x^2 + y^2}} \implies c'(y) = 0 \implies c(y) = k, k \in \mathbb{R}.$$

Quindi un potenziale di F su $\mathbb{R}^2$ è

$$f(x, y) = 9x^2y + 7xy^2 + \sqrt{25 + x^2 + y^2} + c(y) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(2)) - f(\gamma(0)) = f(2, 0) - f(0, 0) = \sqrt{29} - 5.$$

La risposta corretta è ☒ S.

Quiz 5. La derivata della funzione $f(x, y) = 6x^2y + 8xy^2 + 8 \arctan(x + y)$ rispetto al vettore $v = (4, -8)$ nel punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ vale

☐ 0.

☐ 8.

☐ 6.

☐ 12.

☐ 16.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, e di conseguenza è differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Per le proprietà delle funzioni differenziabili, si ha che la derivata della funzione f in punto (x_0, y_0) rispetto ad un vettore v è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v.$$

Si ha che

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left(12xy + 8y^2 + \frac{8}{1 + (x + y)^2}, 6x^2 + 16xy + \frac{8}{1 + (x + y)^2} \right).$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 1) = \nabla f(0, 1) \cdot (4, -8) = (12, 4) \cdot (4, -8) = 16.$$

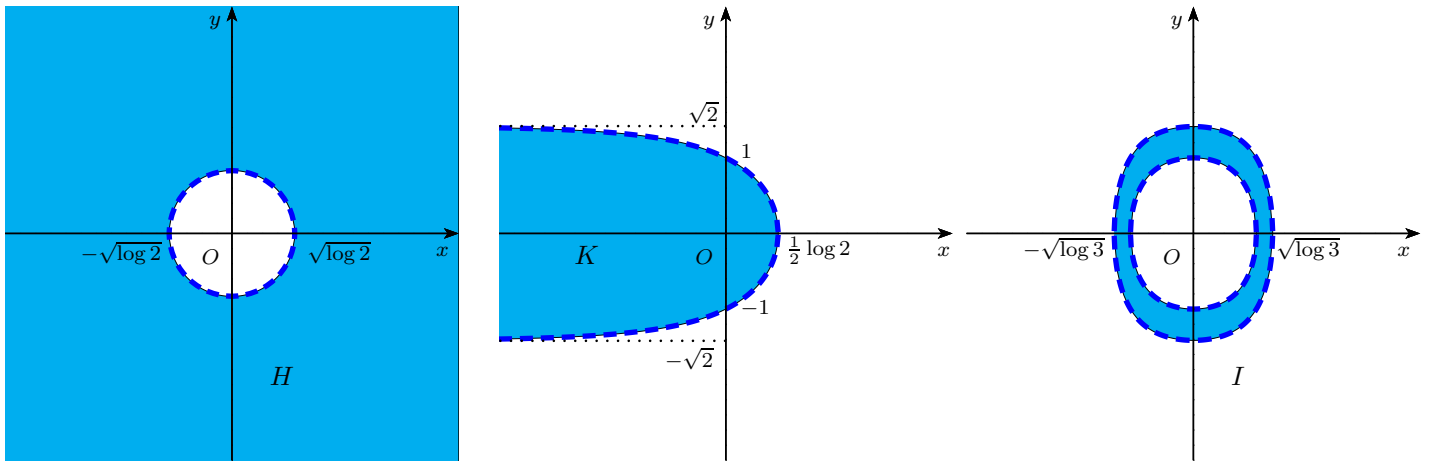
La risposta corretta è ☐ E ☒.

Quiz 6. Siano $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x^2+y^2} > 2\}$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{2x} + y^2 < 2\}$, $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < e^{x^2} + y^2 < 3\}$.

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ R Solo l'insieme H è semplicemente connesso.
- ☐ L Solo l'insieme I è semplicemente connesso.
- ☐ M Solo l'insieme K è semplicemente connesso.
- ☐ P Tutti i tre insiemi sono semplicemente connessi.
- ☐ E Nessuno dei tre insiemi è semplicemente connesso.

SVOLGIMENTO



Solo l'insieme K è semplicemente connesso. La risposta corretta è ☐ M ☒.

Quiz 7. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo su Ω e $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ A $f - g$ è costante su Ω .
- ☐ P Se Ω è connesso per archi, allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - g(x) = c$ per ogni $x \in \Omega$.
- ☐ M Se Ω è connesso per archi, allora per ogni $c \in \mathbb{R}$ esiste $x \in \Omega$ tale che $f(x) - g(x) = c$.
- ☐ R Se F è di classe C^1 su Ω , allora $f - g$ è costante su Ω .
- ☐ E Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

Per le proprietà dei potenziali di un campo conservativo, se Ω è connesso per archi, allora $f - g$ è costante su Ω . Quindi esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - g(x) = c$ per ogni $x \in \Omega$. La risposta corretta è ☐ P ☒.

Quiz 8. Sia (a_n) una successione reale tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$.

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} - 3a_n)$

- ☐ A converge al numero reale $3a_1 - S$.

☐ M converge al numero reale $-S$.

☐ P converge al numero reale $a_0 + 2a_1 - S$.

☐ R converge al numero reale $a_0 + 3a_1 - S$.

☐ E converge al numero reale $a_0 + a_1 - S$.

SVOLGIMENTO

Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a S , per l'algebra delle serie anche le serie $\sum_{n=2}^{\infty} 3a_n$ e $\sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1}$ convergono e quindi la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} - 3a_n)$ converge. Più precisamente si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} - 3a_n) = 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} - 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_n =$$

posto $k = n - 1$ nella serie di sinistra si ottiene

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k - 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k - a_0 \right) - 3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_0 - a_1 \right) = a_0 + 3a_1 - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}_S = a_0 + 3a_1 - S.$$

La risposta corretta è ☒ R .

Quiz 9. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 2, -3 \leq y \leq 0\}$. L'integrale $\int_{\Omega} 3y \, dx \, dy \, dz$ vale

☐ A -36π .

☐ M -18π .

☐ P $-27\sqrt{2}\pi$.

☐ R -54π .

☐ E -27π .

SVOLGIMENTO

Passando in coordinate cilindriche con asse conincidente con l'asse y si ha che

$$\int_{\Omega} 3y \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} 3y\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, -3 \leq y \leq 0\}$ che è un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ, ϑ, y . Ne segue che

$$\int_{\Omega} 3y \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} 3y\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dy = 6\pi \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \right) \left(\int_{-3}^0 y \, dy \right) = 6\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2 \right]_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_{-3}^0 = -27\pi.$$

La risposta corretta è ☒ E .

Quiz 10. Siano $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \leq 0\}$ e $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 tale che $\operatorname{div} F(x, y, z) = -4$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Il flusso uscente di F dal bordo di Ω vale

☐ A -72π .

☐ M -144π .

☐ P -36π .

☐ R -8π .

☐ E 0 .

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Gauss (o della divergenza) il flusso uscente di F dal bordo di Ω è uguale a

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} (-4) \, dx \, dy \, dz = -4m(\Omega) = -72\pi.$$

La risposta corretta è A.
