

Svolgimento dell'esame di Analisi Matematica II del 3 febbraio 2020 ore 16

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V1	C	E	E	E	B	E	D	C

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(3x^2 - 7x^2y + e^{y^4 - z^2}, 7xy^2 + \arctan(1 + \sin^2 z), \frac{3}{2}z^2 + \log(5 + x^4y^6) \right)$$

attraverso il bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq 2 - y^2 - z^2 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = 6x + 3z.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} (6x + 3z) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x si ha

$$= \int_{\Omega'} (6x\rho + 3\rho^2 \sin \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho \leq x \leq 2 - \rho^2\}$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= \int_{\Omega'} (6x\rho + 3\rho^2 \sin \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta \, dx = 2\pi \int_0^1 \left(\int_{\rho}^{2-\rho^2} 6x\rho \, dx \right) d\rho + \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \right)}_{=0} \left[\int_0^1 \left(\int_{\rho}^{2-\rho^2} 3\rho^2 \, dx \right) d\rho \right] = \\ &= 6\pi \int_0^1 \rho \left[x^2 \right]_{\rho}^{2-\rho^2} d\rho = 6\pi \int_0^1 (\rho^5 - 5\rho^3 + 4\rho) \, d\rho = 6\pi \left[\frac{1}{6}\rho^6 - \frac{5}{4}\rho^4 + 2\rho^2 \right]_0^1 = \frac{11}{2}\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V2	C	B	D	D	D	B	C	E

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{5}{2}x^2 + \log(2 + y^4 z^6), \frac{3}{2}y^2 - 8y^2 z + e^{x^4 - z^2}, 8yz^2 + \arctan(1 + \sin^2 x) \right)$$

attraverso il bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 6 - x^2 - z^2 \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = 5x + 3y.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} (5x + 3y) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y si ha

$$= \int_{\Omega'} (5\rho^2 \cos \vartheta + 3y\rho) \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \rho \leq y \leq 6 - \rho^2\}$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= \int_{\Omega'} (5\rho^2 \cos \vartheta + 3y\rho) \, d\rho \, d\vartheta \, dy = \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta \right)}_{=0} \left[\int_0^2 \left(\int_{\rho}^{6-\rho^2} 5\rho^2 \, dy \right) d\rho \right] + 2\pi \int_0^2 \left(\int_{\rho}^{6-\rho^2} 3y\rho \, dy \right) d\rho = \\ &= 3\pi \int_0^2 \rho \left[y^2 \right]_{\rho}^{6-\rho^2} d\rho = 3\pi \int_0^2 (\rho^5 - 13\rho^3 + 36\rho) \, d\rho = 3\pi \left[\frac{1}{6}\rho^6 - \frac{13}{4}\rho^4 + 18\rho^2 \right]_0^2 = 92\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V3	E	C	E	E	B	A	D	B

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(7x^2y - 3x^2 + e^{y^4 - z^2}, \arctan(1 + \sin^2 z) - 7xy^2, \log(5 + x^4y^6) - \frac{3}{2}z^2 \right)$$

attraverso il bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 - 2 \leq x \leq -\sqrt{y^2 + z^2} \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = -6x - 3z.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = - \int_{\Omega} (6x + 3z) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x si ha

$$= - \int_{\Omega'} (6x\rho + 3\rho^2 \sin \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 - 2 \leq x \leq -\rho\}$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= - \int_{\Omega'} (6x\rho + 3\rho^2 \sin \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta \, dx = -2\pi \int_0^1 \left(\int_{\rho^2-2}^{\rho} 6x\rho \, dx \right) d\rho - \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \right)}_{=0} \left[\int_0^1 \left(\int_{\rho^2-2}^{\rho} 3\rho^2 \, dx \right) d\rho \right] = \\ &= -6\pi \int_0^1 \rho \left[x^2 \right]_{\rho^2-2}^{\rho} d\rho = -6\pi \int_0^1 (5\rho^3 - \rho^5 - 4\rho) \, d\rho = -6\pi \left[\frac{5}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6 - 2\rho^2 \right]_0^1 = \frac{11}{2}\pi. \end{aligned}$$

Versione	Quiz 1	Quiz 2	Quiz 3	Quiz 4	Quiz 5	Quiz 6	Quiz 7	Quiz 8
V4	C	D	E	A	A	A	E	E

Esercizio. (10 punti = 7 per lo svolgimento corretto e 3 per la forma)

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\log(2 + y^4 z^6) - \frac{5}{2}x^2, 8y^2 z - \frac{3}{2}y^2 + e^{x^4 - z^2}, \arctan(1 + \sin^2 x) - 8yz^2 \right)$$

attraverso il bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 - 6 \leq y \leq -\sqrt{x^2 + z^2} \right\}.$$

SVOLGIMENTO

Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, per il Teorema di Gauss (o della divergenza) si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = -5x - 3y.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = - \int_{\Omega} (5x + 3y) \, dx \, dy \, dz =$$

passando in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y si ha

$$= - \int_{\Omega'} (5\rho^2 \cos \vartheta + 3y\rho) \, d\rho \, d\vartheta \, dy,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \rho^2 - 6 \leq y \leq -\rho\}$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= - \int_{\Omega'} (5\rho^2 \cos \vartheta + 3y\rho) \, d\rho \, d\vartheta \, dy = \\ &= - \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta \right)}_{=0} \left[\int_0^2 \left(\int_{\rho^2-6}^{-\rho} 5\rho^2 \, dy \right) d\rho \right] - 2\pi \int_0^2 \left(\int_{\rho^2-6}^{-\rho} 3y\rho \, dy \right) d\rho = \\ &= -3\pi \int_0^2 \rho \left[y^2 \right]_{\rho^2-6}^{-\rho} d\rho = -3\pi \int_0^2 (13\rho^3 - \rho^5 - 36\rho) \, d\rho = -3\pi \left[\frac{13}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6 - 18\rho^2 \right]_0^2 = 92\pi. \end{aligned}$$