

Versione: V1

Quiz 1. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n 2^n + 3^n}{n^2 4^n + 5^n} (x-1)^n$ è

☐ A $\frac{8}{3}$.

☐ B $\frac{3}{5}$.

☐ C $\frac{5}{3}$.

☐ D $\frac{3}{4}$.

☐ E $\frac{4}{3}$.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 1$. Posto $t = x - 1$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n 2^n + 3^n}{n^2 4^n + 5^n} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n 2^n + 3^n}{n^2 4^n + 5^n} t^n.$$

Poiché $n 2^n = o(3^n)$, $n^2 4^n = o(5^n)$, per $n \rightarrow +\infty$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{n 2^n + 3^n}{n^2 4^n + 5^n} \right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n 2^n + 3^n}{n^2 4^n + 5^n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{3^n + o(3^n)}{5^n + o(5^n)}} = \frac{3}{5}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{5}{3}$. La risposta corretta è ☒ C.

Quiz 2. Siano $F(x, y) = \left(\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{30}, x^2y \right)$ e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -x-1 \leq y \leq (x+1)^2\}$. L'integrale di linea di F lungo la parte del bordo di Ω appartenente al I e II quadrante, percorsa in senso antiorario, vale

☐ A $\frac{1}{40}$.

☐ B 0 .

☐ C $\frac{1}{20}$.

☐ D $\frac{13}{120}$.

☐ E $\frac{7}{40}$.

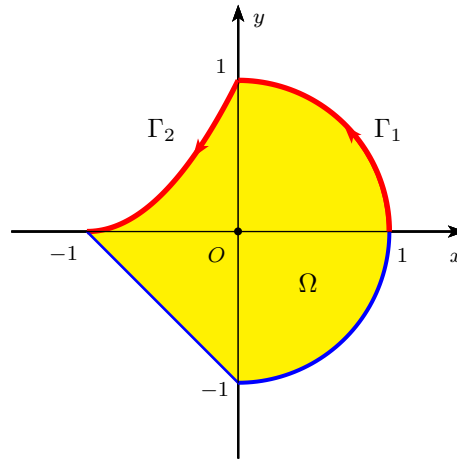
SVOLGIMENTO

Si osserva che la parte di $\partial\Omega$ compresa nel I e II quadrante è l'unione delle curve Γ_1 e Γ_2 ,

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, y = (x+1)^2\},$$

orientate in modo che il bordo di Ω sia complessivamente orientato in senso antiorario.



Quindi, posto $\Gamma = \partial\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, si ha che

$$\int_{\Gamma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP.$$

Una parametrizzazione di Γ_1 in senso antiorario è $\gamma_1 : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$.

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) &= F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \left(\frac{1}{2} \cos t \sin^2 t - \frac{1}{30}, \cos^2 t \sin t \right) \cdot (-\sin t, \cos t) = \\ &= \frac{1}{30} \sin t + \cos^3 t \sin t - \frac{1}{2} \cos t \sin^3 t \end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{30} \sin t + \cos^3 t \sin t - \frac{1}{2} \cos t \sin^3 t \right) dt = \left[-\frac{1}{30} \cos t - \frac{1}{4} \cos^4 t - \frac{1}{8} \sin^4 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{19}{120}.$$

Una parametrizzazione di Γ_2 in senso antiorario è $\gamma_2 : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma_2(t) = (-1 - t, t^2)$. Quindi

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-1}^0 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(-1 - t, t^2) \cdot (-1, 2t) = \left(-\frac{1}{2}(t^4 + t^5) - \frac{1}{30}, t^2(1 + t)^2 \right) \cdot (-1, 2t) = \\ &= \frac{1}{2}(t^4 + t^5) + \frac{1}{30} + 2t^3(1 + t)^2 = \frac{5}{2}t^5 + \frac{9}{2}t^4 + 2t^3 + \frac{1}{30} \end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_{-1}^0 \left(\frac{5}{2}t^5 + \frac{9}{2}t^4 + 2t^3 + \frac{1}{30} \right) dt = \left[\frac{5}{12}t^6 + \frac{9}{10}t^5 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{30}t \right]_{-1}^0 = -\frac{5}{12} + \frac{9}{10} - \frac{1}{2} + \frac{1}{30} = \frac{1}{60}.$$

Quindi

$$\int_{\Gamma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \frac{19}{120} + \frac{1}{60} = \frac{7}{40}.$$

La risposta corretta è ☒ E .

Quiz 3. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 \log \left(1 + \frac{5}{n} \right)}{4n^3 + 1}$

- ☒ A diverge negativamente.
- ☐ B è indeterminata.
- ☐ C diverge positivamente.
- ☐ D converge ma non assolutamente.

E converge assolutamente.

SVOLGIMENTO

La serie è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n^2 \log \left(1 + \frac{5}{n} \right)}{4n^3 + 1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \log \left(1 + \frac{5}{n} \right)}{4n^3 + 1}.$$

Poiché $\log(1+x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$, si ha che

$$\frac{n^2 \log \left(1 + \frac{5}{n} \right)}{4n^3 + 1} \sim \frac{5}{4n^2}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge assolutamente. La risposta corretta è **E**.

Quiz 4. Siano $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 , $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ la calotta regolare $\sigma(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 + 3)$ e $\tau: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ la calotta regolare $\tau(x, y) = (x, y, \sqrt{17 - x^2 - y^2})$.

Il flusso del rotore di F attraverso il sostegno di σ , orientato in modo che il versore normale al sostegno di σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , è uguale a

A 0.

B $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, \sqrt{17 - x^2 - y^2}) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, -1 \right) dx dy.$

C $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, x^2 + y^2 + 3) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy.$

D $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, x^2 + y^2 + 3) \cdot (2x, 2y, -1) dx dy.$

E $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, \sqrt{17 - x^2 - y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, 1 \right) dx dy.$

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Stokes il flusso del rotore di F attraverso il sostegno di σ , orientato in modo che il versore normale al sostegno di σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , è uguale a

$$\int_{\sigma} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma = \int_{\partial\sigma} F \cdot dP$$

dove $\partial\sigma$ è orientato positivamente rispetto al vettore normale al sostegno di σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Denotiamo con $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ e con $S = \tau(K)$ il sostegno di τ . Si ha che

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = x^2 + y^2 + 3, x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = \sqrt{17 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Quindi

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = 4, x^2 + y^2 = 1\} = \partial S.$$

Il vettore normale a Σ individuato dalla calotta σ definito da $N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) = (-2x, -2y, 1)$ forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , come il vettore normale a S individuato dalla calotta τ definito da

$N_{\tau}(x, y) = \frac{\partial\tau}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\tau}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$. Per le proprietà degli integrali di linea si ha che

$$\int_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\partial\tau} F \cdot dP$$

e per il Teorema di Stokes

$$\int_{\partial\tau} F \cdot dP = \int_{\tau} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma.$$

Quindi

$$\int_{\sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F \left(x, y, \sqrt{17 - x^2 - y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, 1 \right) dx \, dy.$$

La risposta corretta è ☐ E .

Quiz 5. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{x} \leq y \leq x, \, x \leq 1\}$. L'integrale $\int_{\Omega} (6xy + 5y^3) \, dx \, dy$ vale

☐ A 1.

☐ B $-\frac{5}{12}$.

☐ C 5.

☐ D $-\frac{5}{6}$.

☐ E $\frac{5}{2}$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{x} \leq y \leq x, \, x \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \, -\sqrt{x} \leq y \leq x\}.$$

Ne segue che Ω è un insieme y -semplice. Procedendo con il metodo di integrazione per gli insiemi y -semplici si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (6xy + 5y^3) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^x (6xy + 5y^3) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[3xy^2 + \frac{5}{4}y^4 \right]_{-\sqrt{x}}^x dx = \\ &= \int_0^1 \left(3x^3 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{17}{4}x^2 \right) dx = \left[\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5 - \frac{17}{12}x^3 \right]_0^1 = -\frac{5}{12}. \end{aligned}$$

La risposta corretta è ☐ B .

Quiz 6. Nell'ambito della teoria dei campi vettoriali nello spazio tridimensionale, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ A Tutti i campi conservativi sono radiali.

☐ B Esistono campi radiali di classe C^1 che non sono irrotazionali.

☐ C Tutti i campi irrotazionali sono conservativi.

☐ D Nessuna delle altre è corretta.

☐ E Esistono campi conservativi che hanno un dominio che non è semplicemente connesso.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è ☐ E . Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}, 2z \right)$ è definito su $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$ che non è semplicemente connesso, ma è conservativo perché $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, dove $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2) + z^2$.

La risposta ☐ A è errata. Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ è conservativo perché $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, dove $f(x, y, z) = xyz$, ma non è radiale perché non è della forma $F(x, y, z) = \varphi(\|(x, y, z)\|)(x, y, z)$ con $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

La risposta ☐ B è errata. Infatti, se F è un campo radiale di classe C^1 , allora F è continuo e anche conservativo, e di conseguenza è irrotazionale.

La risposta ☐ C è errata. Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 1 \right)$ è irrotazionale ma non è conservativo perché la circuitazione di F lungo la curva parametrica chiusa $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ è

$$\oint_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \neq 0.$$

La risposta ☐ D è errata perché ☐ E è corretta.

Quiz 7. Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 + 3xy + 4, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$. L'integrale

$$\int_{\Sigma} \frac{z - 2x^2 - 4}{\sqrt{25x^2 + 24xy + 9y^2 + 1}} d\sigma \quad \text{vale}$$

- ☐ A 4.
☐ B 8.
☐ C 0.
☐ D 6.
☐ E 12.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 2x^2 + 3xy + 4)$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z - 2x^2 - 4}{\sqrt{25x^2 + 24xy + 9y^2 + 1}}$, si ha che

$$\int_{\Sigma} \frac{z - 2x^2 - 4}{\sqrt{25x^2 + 24xy + 9y^2 + 1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ dato da

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-4x - 3y, -3x, 1).$$

Quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{(4x + 3y)^2 + 9x^2 + 1} = \sqrt{25x^2 + 24xy + 9x^2 + 1}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{z - 2x^2 - 4}{\sqrt{25x^2 + 24xy + 9y^2 + 1}} d\sigma &= \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy = \\ &= \int_K f(x, y, 2x^2 + 3xy + 4) \sqrt{25x^2 + 24xy + 9x^2 + 1} dx dy = 3 \int_K xy dx dy = \end{aligned}$$

passando in coordinate polari

$$= 3 \int_{K'} \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta d\rho d\vartheta =$$

essendo $K' = [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ si ottiene

$$= 3 \left(\int_0^2 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = 3 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$

La risposta corretta è ☒ D.

Quiz 8. La funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 3) e^{2-y^2} + 5$

- ☐ A ha tre punti stazionari: uno di massimo locale e due di sella.
☐ B ha due punti stazionari: uno di minimo locale e uno di sella.
☐ C ha tre punti stazionari: uno di minimo locale e due di sella.
☐ D ha solo un punto stazionario che è di minimo locale.
☐ E ha solo un punto stazionario che è di massimo locale.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x e^{2-y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y (4 - x^2 - y^2) e^{2-y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x e^{2-y^2} = 0 \\ 2y (4 - x^2 - y^2) e^{2-y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \quad x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 e^{2-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 (4 - x^2 - 11y^2 + 2x^2y^2 + 2y^4) e^{2-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -4xy e^{2-y^2}.$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2e^2 & 0 \\ 0 & 8e^2 \end{pmatrix}, \quad H_f(0, 2) = H_f(0, -2) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -16e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di minimo locale mentre i punti $(0, 2)$ e $(0, -2)$ sono di sella per f . La risposta corretta è C.

Quiz 1. Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3y^2 + 4xy + 5, x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \leq 0\}$. L'integrale

$$\int_{\Sigma} \frac{z - 3y^2 - 5}{\sqrt{16x^2 + 48xy + 52y^2 + 1}} d\sigma \quad \text{vale}$$

- ☐ A 0.
- ☐ B -81.
- ☐ C $-\frac{81}{2}$.
- ☐ D -54.
- ☐ E -108.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 3y^2 + 4xy + 5$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 3y^2 + 4xy + 5)$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z - 3y^2 - 5}{\sqrt{16x^2 + 48xy + 52y^2 + 1}}$, si ha che

$$\int_{\Sigma} \frac{z - 3y^2 - 5}{\sqrt{16x^2 + 48xy + 52y^2 + 1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ dato da

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-4y, -4x - 6y, 1).$$

Quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{16y^2 + (4x + 6y)^2 + 1} = \sqrt{16x^2 + 48xy + 52y^2 + 1}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{z - 3y^2 - 5}{\sqrt{16x^2 + 48xy + 52y^2 + 1}} d\sigma &= \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy = \\ &= \int_K f(x, y, 3y^2 + 4xy + 5) \sqrt{16x^2 + 48xy + 52y^2 + 1} dx dy = 4 \int_K xy dx dy = \end{aligned}$$

passando in coordinate polari

$$= 4 \int_{K'} \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta d\rho d\vartheta =$$

essendo $K' = [0, 3] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]$ si ottiene

$$= 4 \left(\int_0^3 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = 4 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^3 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{81}{2}.$$

La risposta corretta è ☒ C.

Quiz 2. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n n^2}{(n^2 + 1) \log(n + 1)}$

- ☐ A converge ma non assolutamente.
- ☐ B diverge positivamente.
- ☐ C converge assolutamente.
- ☐ D diverge negativamente.
- ☐ E è indeterminata.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n n^2}{(n^2 + 1) \log(n + 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n + n^2}{(n^2 + 1) \log(n + 1)}.$$

Quindi la serie è a termini positivi. Dunque converge o diverge positivamente. Si ha che

$$\frac{2(-1)^n + n^2}{(n^2 + 1) \log(n + 1)} \sim \frac{1}{\log(n + 1)}, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \frac{1}{\log(n + 1)} \geq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Poiché la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, per i criteri del confronto e del confronto asintotico la serie data diverge. La risposta corretta è **[B]**.

Quiz 3. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n 5^n + 4^n}{n^2 6^n + 7^n} (x + 1)^n$ è

[A] $\frac{5}{6}$.

[B] $\frac{6}{5}$.

[C] $\frac{5}{7}$.

[D] $\frac{7}{5}$.

[E] $\frac{1}{5}$.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = -1$. Posto $t = x + 1$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n 5^n + 4^n}{n^2 6^n + 7^n} (x + 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n 5^n + 4^n}{n^2 6^n + 7^n} t^n.$$

Poiché $4^n = o(n 5^n)$, $n^2 6^n = o(7^n)$, per $n \rightarrow +\infty$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{n 5^n + 4^n}{n^2 6^n + 7^n} \right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n 5^n + 4^n}{n^2 6^n + 7^n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n 5^n + o(n 5^n)}{7^n + o(7^n)}} = \frac{5}{7}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{7}{5}$. La risposta corretta è **[D]**.

Quiz 4. Nell'ambito della teoria dei campi vettoriali nello spazio tridimensionale, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

[A] Tutti i campi conservativi hanno un dominio che è semplicemente connesso.

[B] Tutti i campi irrotazionali sono conservativi.

[C] Esistono campi radiali di classe C^1 che non sono irrotazionali.

[D] Esistono campi conservativi che non sono radiali.

[E] Nessuna delle altre è corretta.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è **[D]**. Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ è conservativo perché $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, dove $f(x, y, z) = xyz$, ma non è radiale perché non è della forma $F(x, y, z) = \varphi(\|(x, y, z)\|)(x, y, z)$ con $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

La risposta **[A]** è errata. Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}, 2z \right)$ è definito su $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$ che non è semplicemente connesso, ma è conservativo perché $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, dove $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2) + z^2$.

La risposta **[B]** è errata. Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 1 \right)$ è irrotazionale ma non è conservativo perché la circuitazione di F lungo la curva parametrica chiusa $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ è

$$\oint_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0.$$

La risposta **C** è errata. Infatti, se F è un campo radiale di classe C^1 , allora F è continuo e anche conservativo, e di conseguenza è irrotazionale.

La risposta **E** è errata perché **D** è corretta.

Quiz 5. Siano $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 , $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$, $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ la calotta regolare $\sigma(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ e $\tau : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ la calotta regolare $\tau(x, y) = (x, y, -\sqrt{3 - x^2 - y^2})$.

Il flusso del rotore di F attraverso il sostegno di σ , orientato in modo che il versore normale al sostegno di σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , è uguale a

A $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, -1) \, dx \, dy.$

B $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, -\sqrt{3 - x^2 - y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, -1 \right) \, dx \, dy.$

C $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, 1 - x^2 - y^2) \cdot (-2x, -2y, 1) \, dx \, dy.$

D $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, -\sqrt{3 - x^2 - y^2}) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, 1 \right) \, dx \, dy.$

E 0.

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Stokes il flusso del rotore di F attraverso il sostegno di σ , orientato in modo che il versore normale al sostegno di σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , è uguale a

$$\int_{\sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\sigma} F \cdot dP$$

dove $\partial\sigma$ è orientato positivamente rispetto al vettore normale al sostegno di σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Denotiamo con $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ e con $S = \tau(K)$ il sostegno di τ . Si ha che

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 2\}, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -\sqrt{3 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Quindi

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1, x^2 + y^2 = 2\} = \partial S.$$

Il vettore normale a Σ individuato dalla calotta σ definito da $N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) = (2x, 2y, 1)$ forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , come il vettore normale a S individuato dalla calotta τ definito da $N_{\tau}(x, y) = \frac{\partial\tau}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\tau}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$. Per le proprietà degli integrali di linea si ha che

$$\int_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\partial\tau} F \cdot dP$$

e per il Teorema di Stokes

$$\int_{\partial\tau} F \cdot dP = \int_{\tau} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma.$$

Quindi

$$\int_{\sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(x, y, -\sqrt{3 - x^2 - y^2}) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, 1 \right) \, dx \, dy.$$

La risposta corretta è **D**.

Quiz 6. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{y} \leq x \leq y, y \leq 1\}$. L'integrale $\int_{\Omega} (8xy + 3x^3) \, dx \, dy$ vale

A $\frac{167}{30}.$

B $-\frac{13}{30}.$

☐ $\frac{167}{60}$.

☐ $-\frac{13}{15}$.

☐ 1.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{y} \leq x \leq y, y \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq y\}.$$

Ne segue che Ω è un insieme x -semplice. Procedendo con il metodo di integrazione per gli insiemi x -semplici si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (8xy + 3x^3) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^y (8xy + 3x^3) dx \right) dy = \int_0^1 \left[4x^2y + \frac{3}{4}x^4 \right]_{-\sqrt{y}}^y dy = \\ &= \int_0^1 \left(4y^3 + \frac{3}{4}y^4 - \frac{19}{4}y^2 \right) dy = \left[y^4 + \frac{3}{20}y^5 - \frac{19}{12}y^3 \right]_0^1 = -\frac{13}{30}. \end{aligned}$$

La risposta corretta è ☐ B.

Quiz 7. Siano $F(x, y) = \left(xy^2, \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{20} \right)$ e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y - 1 \leq x \leq (y - 1)^2\}$.

L'integrale di linea di F lungo la parte del bordo di Ω appartenente al I e IV quadrante, percorsa in senso antiorario, vale

☐ 0.

☐ $\frac{1}{20}$.

☐ $\frac{5}{24}$.

☐ $\frac{1}{40}$.

☐ $\frac{13}{120}$.

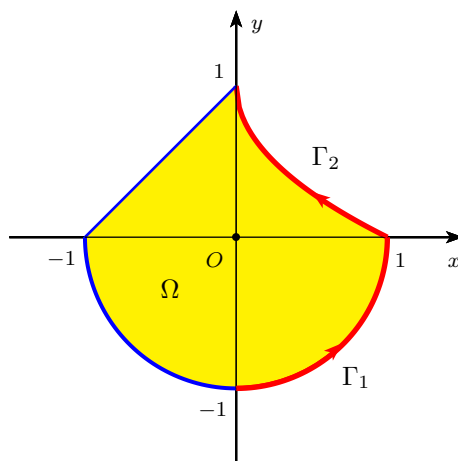
SVOLGIMENTO

Si osserva che la parte di $\partial\Omega$ compresa nel I e IV quadrante è l'unione delle curve Γ_1 e Γ_2 ,

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \leq 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x = (y - 1)^2\},$$

orientate in modo che il bordo di Ω sia complessivamente orientato in senso antiorario.



Quindi, posto $\Gamma = \partial\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, si ha che

$$\int_{\Gamma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP.$$

Una parametrizzazione di Γ_1 in senso antiorario è $\gamma_1 : [-\frac{\pi}{2}, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$.

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) &= F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \left(\cos t \sin^2 t, \frac{1}{2} \cos^2 t \sin t + \frac{1}{20} \right) \cdot (-\sin t, \cos t) = \\ &= \frac{1}{20} \cos t + \frac{1}{2} \cos^3 t \sin t - \cos t \sin^3 t \end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{1}{20} \cos t + \frac{1}{2} \cos^3 t \sin t - \cos t \sin^3 t \right) dt = \left[\frac{1}{20} \sin t - \frac{1}{8} \cos^4 t - \frac{1}{4} \sin^4 t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{7}{40}.$$

Una parametrizzazione di Γ_2 in senso antiorario è $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma_2(t) = ((t-1)^2, t)$. Quindi

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F((t-1)^2, t) \cdot (2t, 1) = \left(t^2(t-1)^2, \frac{1}{2}t(t-1)^4 + \frac{1}{20} \right) \cdot (2t, 1) = \\ &= 2t^2(t-1)^3 + \frac{1}{2}t(t-1)^4 + \frac{1}{20} = \frac{5}{2}t^5 - 8t^4 + 9t^3 - 4t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{20} \end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{2}t^5 - 8t^4 + 9t^3 - 4t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{20} \right) dt = \left[\frac{5}{12}t^6 - \frac{8}{5}t^5 + \frac{9}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{20}t \right]_0^1 = \frac{5}{12} - \frac{8}{5} + \frac{9}{4} - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{30}.$$

Quindi

$$\int_{\Gamma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \frac{7}{40} + \frac{1}{30} = \frac{5}{24}.$$

La risposta corretta è ☐ C ☒.

Quiz 8. La funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 8) e^{5-x^2} - 2$

☐ A ha due punti stazionari: uno di minimo locale e uno di sella.

☐ B ha solo un punto stazionario che è di minimo locale.

☐ C ha tre punti stazionari: uno di massimo locale e due di sella.

☐ D ha solo un punto stazionario che è di massimo locale.

☐ E ha tre punti stazionari: uno di minimo locale e due di sella.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(9 - x^2 - y^2) e^{5-x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x e^{5-x^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x(9 - x^2 - y^2) e^{5-x^2} = 0 \\ 2x e^{5-x^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, & x^2 + y^2 = 9 \\ x = 0. \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(-3, 0)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2(9 - y^2 - 21x^2 + 2x^2y^2 + 2x^4) e^{5-x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2e^{5-x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -4xy e^{5-x^2}.$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 18e^5 & 0 \\ 0 & 2e^5 \end{pmatrix}, \quad H_f(3, 0) = H_f(-3, 0) = \begin{pmatrix} -36e^{-4} & 0 \\ 0 & 2e^{-4} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di minimo locale mentre i punti $(3, 0)$ e $(-3, 0)$ sono di sella per f . La risposta corretta è ☐ E ☒.

Versione: V3

Quiz 1. Nell'ambito della teoria dei campi vettoriali nello spazio tridimensionale, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☐ A Tutti i campi conservativi sono radiali.
- ☐ B Nessuna delle altre è corretta.
- ☐ C Esistono campi radiali di classe C^1 che non sono irrotazionali.
- ☐ D Tutti i campi irrotazionali sono conservativi.
- ☐ E Esistono campi conservativi che hanno un dominio che non è semplicemente connesso.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è ☐ E. Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}, 2z \right)$ è definito su $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$ che non è semplicemente connesso, ma è conservativo perché $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, dove $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2) + z^2$.

La risposta ☐ A è errata. Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ è conservativo perché $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, dove $f(x, y, z) = xyz$, ma non è radiale perché non è della forma $F(x, y, z) = \varphi(\|(x, y, z)\|)(x, y, z)$ con $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

La risposta ☐ C è errata. Infatti, se F è un campo radiale di classe C^1 , allora F è continuo e anche conservativo, e di conseguenza è irrotazionale.

La risposta ☐ D è errata. Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 1 \right)$ è irrotazionale ma non è conservativo perché la circuitazione di F lungo la curva parametrica chiusa $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ è

$$\oint_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0.$$

La risposta ☐ B è errata perché ☐ E è corretta.

Quiz 2. La funzione $f(x, y) = (3 - x^2 - y^2) e^{6-y^2} + 7$

- ☐ A ha solo un punto stazionario che è di minimo locale.
- ☐ B ha solo un punto stazionario che è di massimo locale.
- ☐ C ha tre punti stazionari: uno di massimo locale e due di sella.
- ☐ D ha tre punti stazionari: uno di minimo locale e due di sella.
- ☐ E ha due punti stazionari: uno di massimo locale e uno di sella.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x e^{6-y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y(4 - x^2 - y^2) e^{6-y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x e^{6-y^2} = 0 \\ 2y(4 - x^2 - y^2) e^{6-y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \quad x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 e^{6-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2(4 - x^2 - 11y^2 + 2x^2y^2 + 2y^4) e^{6-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4xy e^{6-y^2}.$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2e^6 & 0 \\ 0 & -8e^6 \end{pmatrix}, \quad H_f(0, 2) = H_f(0, -2) = \begin{pmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & 16e^2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di massimo locale mentre i punti $(0, 2)$ e $(0, -2)$ sono di sella per f . La risposta corretta è

☐ C.

Quiz 3. Siano $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 , $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ la calotta regolare $\sigma(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 + 3)$ e $\tau : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ la calotta regolare $\tau(x, y) = (x, y, \sqrt{17 - x^2 - y^2})$.

Il flusso del rotore di F attraverso il sostegno di τ , orientato in modo che il versore normale al sostegno di τ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , è uguale a

☐ 0.

☐ $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, x^2 + y^2 + 3) \cdot (2x, 2y, -1) \, dx \, dy$.

☐ $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, \sqrt{17 - x^2 - y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, -1 \right) \, dx \, dy$.

☐ $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, \sqrt{17 - x^2 - y^2}) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, 1 \right) \, dx \, dy$.

☐ $\int_K \operatorname{rot} F(x, y, x^2 + y^2 + 3) \cdot (-2x, -2y, 1) \, dx \, dy$.

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Stokes il flusso del rotore di F attraverso il sostegno di τ , orientato in modo che il versore normale al sostegno di τ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , è uguale a

$$\int_{\tau} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\tau} F \cdot dP$$

dove $\partial\tau$ è orientato positivamente rispetto al vettore normale al sostegno di τ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Denotiamo con $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ e con $S = \tau(K)$ il sostegno di τ . Si ha che

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 + 3, x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{17 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Quindi

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4, x^2 + y^2 = 1\} = \partial S.$$

Il vettore normale a Σ individuato dalla calotta σ definito da $N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) = (-2x, -2y, 1)$ forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , come il vettore normale a S individuato dalla calotta τ definito da

$N_{\tau}(x, y) = \frac{\partial\tau}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\tau}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{17 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$. Per le proprietà degli integrali di linea si ha che

$$\int_{\partial\tau} F \cdot dP = \int_{\partial\sigma} F \cdot dP$$

e per il Teorema di Stokes

$$\int_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma.$$

Quindi

$$\int_{\tau} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F(x, y, x^2 + y^2 + 3) \cdot (-2x, -2y, 1) \, dx \, dy.$$

La risposta corretta è ☒ E.

Quiz 4. Siano $F(x, y) = \left(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{30}, x^2y \right)$ e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x - 1 \leq y \leq (x - 1)^2\}$.

L'integrale di linea di F lungo la parte del bordo di Ω appartenente al I e II quadrante, percorsa in senso antiorario, vale

☐ 0.

☐ $-\frac{1}{20}$.

☐ $-\frac{13}{120}$.

☐ $-\frac{1}{40}$.

☐ $-\frac{7}{40}$.

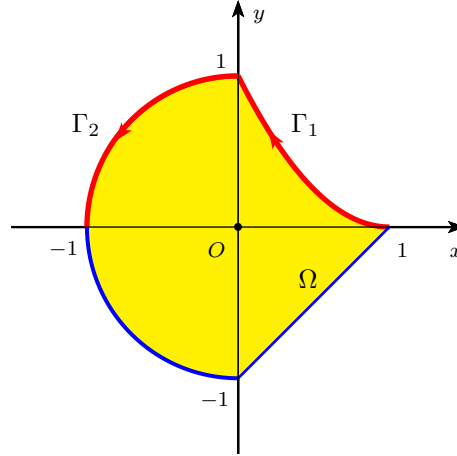
SVOLGIMENTO

Si osserva che la parte di $\partial\Omega$ compresa nel I e II quadrante è l'unione delle curve Γ_1 e Γ_2 ,

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = (x-1)^2\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \leq 0, y \geq 0\},$$

orientate in modo che il bordo di Ω sia complessivamente orientato in senso antiorario.



Quindi, posto $\Gamma = \partial\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, si ha che

$$\int_{\Gamma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP.$$

Una parametrizzazione di Γ_1 in senso antiorario è $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma_1(t) = (1-t, t^2)$. Quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) &= F(1-t, t^2) \cdot (-1, 2t) = \left(\frac{1}{2}(t^4 - t^5) + \frac{1}{30}, t^2(1-t)^2 \right) \cdot (-1, 2t) = \\ &= -\frac{1}{2}(t^4 - t^5) - \frac{1}{30} + 2t^3(1-t)^2 = \frac{5}{2}t^5 - \frac{9}{2}t^4 + 2t^3 - \frac{1}{30} \end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{2}t^5 - \frac{9}{2}t^4 + 2t^3 - \frac{1}{30} \right) dt = \left[\frac{5}{12}t^6 - \frac{9}{10}t^5 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{30}t \right]_0^1 = \frac{5}{12} - \frac{9}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = -\frac{1}{60}.$$

Una parametrizzazione di Γ_2 in senso antiorario è $\gamma_2 : [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$.

Quindi

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \left(\frac{1}{2} \cos t \sin^2 t + \frac{1}{30}, \cos^2 t \sin t \right) \cdot (-\sin t, \cos t) = \\ &= \cos^3 t \sin t - \frac{1}{2} \cos t \sin^3 t - \frac{1}{30} \sin t \end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\cos^3 t \sin t - \frac{1}{2} \cos t \sin^3 t - \frac{1}{30} \sin t \right) dt = \left[-\frac{1}{4} \cos^4 t - \frac{1}{8} \sin^4 t + \frac{1}{30} \cos t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{19}{120}.$$

Quindi

$$\int_{\Gamma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = -\frac{1}{60} - \frac{19}{120} = -\frac{7}{40}.$$

La risposta corretta è E.

Quiz 5. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq \sqrt{x}, x \leq 1\}$. L'integrale $\int_{\Omega} (6xy - 5y^3) dx dy$ vale

☐ A -1 .

☐ B $\frac{1}{12}$.

☐ C -2 .

☐ D $-\frac{5}{2}$.

☐ E $\frac{1}{6}$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq \sqrt{x}, x \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Ne segue che Ω è un insieme y -semplice. Procedendo con il metodo di integrazione per gli insiemi y -semplici si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (6xy - 5y^3) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{-x}^{\sqrt{x}} (6xy - 5y^3) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[3xy^2 - \frac{5}{4}y^4 \right]_{-x}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{4}x^4 - 3x^3 + \frac{7}{4}x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{7}{12}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

La risposta corretta è ☒ B.

Quiz 6. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 4^n + 5^n}{n 2^n + 3^n} (x - 2)^n$ è

☐ A $\frac{3}{5}$.

☐ B $\frac{3}{4}$.

☐ C $\frac{4}{3}$.

☐ D $\frac{5}{3}$.

☐ E $\frac{13}{5}$.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 2$. Posto $t = x - 2$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 4^n + 5^n}{n 2^n + 3^n} (x - 2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 4^n + 5^n}{n 2^n + 3^n} t^n.$$

Poiché $n 2^n = o(3^n)$, $n^2 4^n = o(5^n)$, per $n \rightarrow +\infty$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{n^2 4^n + 5^n}{n 2^n + 3^n} \right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n^2 4^n + 5^n}{n 2^n + 3^n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{5^n + o(5^n)}{3^n + o(3^n)}} = \frac{5}{3}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{3}{5}$. La risposta corretta è ☐ A.

Quiz 7. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4 \log(n+1)}{n+1+\log(n+1)}$

☐ A è indeterminata.

☐ B diverge positivamente.

☐ C diverge negativamente.

☐ D converge ma non assolutamente.

☐ E converge assolutamente.

SVOLGIMENTO

La serie è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{4 \log(n+1)}{n+1+\log(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \log(n+1)}{n+1+\log(n+1)}.$$

Poiché $\log(1+n) \geq 1$ per ogni $n \geq 2$ e $\log(n+1) = o(n+1)$ per $n \rightarrow +\infty$, si ha che

$$\frac{4 \log(n+1)}{n+1+\log(n+1)} \geq \frac{4}{n+1+\log(n+1)}, \quad \forall n \geq 2, \quad \frac{4}{n+1+\log(n+1)} \sim \frac{4}{n}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, per i criteri del confronto asintotico e del confronto la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \frac{4 \log(n+1)}{n+1+\log(n+1)}$, si ha che $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e inoltre (b_n) è decrescente.

Infatti, detta $f(x) = \frac{4 \log(x+1)}{x+1+\log(x+1)}$ la funzione associata a (b_n) , definita per ogni $x \geq 1$, si ha che f è derivabile con $f'(x) = 4 \frac{1 - \log(x+1)}{[x+1+\log(x+1)]^2} < 0$ per ogni $x \geq 2$. Per il Criterio di Leibniz la serie data converge.

La risposta corretta è D.

Quiz 8. Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 - 5xy + 6, x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \leq 0\}$. L'integrale $\int_{\Sigma} \frac{z - 2x^2 - 6}{\sqrt{41x^2 - 40xy + 25y^2 + 1}} d\sigma$ vale

A $-\frac{40}{3}$.

B -10 .

C 0 .

D $-\frac{20}{3}$.

E -20 .

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = 2x^2 - 5xy + 6$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 2x^2 - 5xy + 6)$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z - 2x^2 - 6}{\sqrt{41x^2 - 40xy + 25y^2 + 1}}$, si ha che

$$\int_{\Sigma} \frac{z - 2x^2 - 6}{\sqrt{41x^2 - 40xy + 25y^2 + 1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ dato da

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-4x + 5y, 5x, 1).$$

Quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{(-4x + 5y)^2 + 25x^2 + 1} = \sqrt{41x^2 - 40xy + 25y^2 + 1}.$$

Ne segue che

$$\int_{\Sigma} \frac{z - 2x^2 - 6}{\sqrt{41x^2 - 40xy + 25y^2 + 1}} d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy =$$

$$= \int_K f(x, y, 2x^2 - 5xy + 6) \sqrt{41x^2 - 40xy + 25y^2 + 1} dx dy = -5 \int_K xy dx dy =$$

passando in coordinate polari

$$= -5 \int_{K'} \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta d\rho d\vartheta =$$

essendo $K' = [0, 2] \times [\pi, \frac{3}{2}\pi]$ si ottiene

$$= -5 \left(\int_0^2 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = -5 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = -10.$$

La risposta corretta è B.

Quiz 1. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 6^n + 7^n}{n 5^n + 4^n} (x+2)^n$ è

- ☐ A $\frac{19}{7}$.
- ☐ B $\frac{7}{5}$.
- ☐ C $\frac{5}{7}$.
- ☐ D $\frac{5}{6}$.
- ☐ E $\frac{6}{5}$.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = -2$. Posto $t = x + 2$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 6^n + 7^n}{n 5^n + 4^n} (x+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 6^n + 7^n}{n 5^n + 4^n} t^n.$$

Poiché $4^n = o(n 5^n)$, $n^2 6^n = o(7^n)$, per $n \rightarrow +\infty$, si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{n^2 6^n + 7^n}{n 5^n + 4^n} \right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n^2 6^n + 7^n}{n 5^n + 4^n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{7^n + o(7^n)}{n 5^n + o(n 5^n)}} = \frac{7}{5}.$$

Per il Teorema della radice il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{5}{7}$. La risposta corretta è ☒ C.

Quiz 2. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 - (-1)^n n^3}{(n^3 + 1) \log(n+2)}$

- ☐ A è indeterminata.
- ☐ B converge ma non assolutamente.
- ☐ C diverge positivamente.
- ☐ D diverge negativamente.
- ☐ E converge assolutamente.

SVOLGIMENTO

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 - (-1)^n n^3}{(n^3 + 1) \log(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n - n^3}{(n^3 + 1) \log(n+2)}.$$

Quindi la serie è a termini negativi. Dunque converge o diverge negativamente. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 3(-1)^n}{(n^3 + 1) \log(n+2)}$$

che è a termini positivi. Si ha che

$$\frac{n^3 - 3(-1)^n}{(n^3 + 1) \log(n+2)} \sim \frac{1}{\log(n+2)}, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \frac{1}{\log(n+2)} \geq \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge, per i criteri del confronto e del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 3(-1)^n}{(n^3 + 1) \log(n+2)}$ diverge positivamente. Ne segue che la serie data diverge negativamente. La risposta corretta è ☒ D.

Quiz 3. Siano $F(x, y) = \left(xy^2, \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{20} \right)$ e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -y - 1 \leq x \leq (y+1)^2\}$. L'integrale di linea di F lungo la parte del bordo di Ω appartenente al I e IV quadrante, percorsa in senso antiorario, vale

$$\boxed{A} - \frac{1}{20}.$$

$$\boxed{B} 0.$$

$$\boxed{C} - \frac{13}{120}.$$

$$\boxed{D} - \frac{1}{40}.$$

$$\boxed{E} - \frac{5}{24}.$$

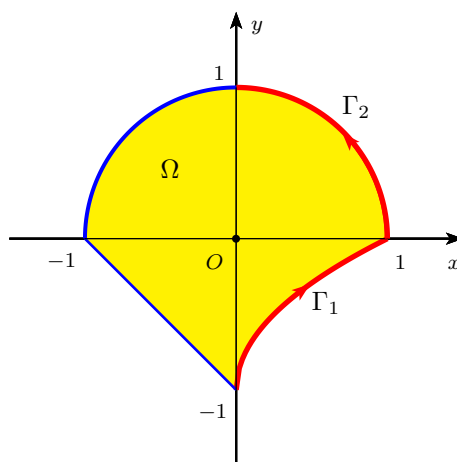
SVOLGIMENTO

Si osserva che la parte di $\partial\Omega$ compresa nel I e IV quadrante è l'unione delle curve Γ_1 e Γ_2 ,

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 0, x = (y+1)^2\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

orientate in modo che il bordo di Ω sia complessivamente orientato in senso antiorario.



Quindi, posto $\Gamma = \partial\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, si ha che

$$\int_{\Gamma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP.$$

Una parametrizzazione di Γ_1 in senso antiorario è $\gamma_1 : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma_1(t) = ((t+1)^2, t)$. Quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-1}^0 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) &= F((t+1)^2, t) \cdot (2(t+1), 1) = \left(t^2(t+1)^2, \frac{1}{2}t(t+1)^4 - \frac{1}{20} \right) \cdot (2(t+1), 1) = \\ &= 2t^2(t+1)^3 + \frac{1}{2}t(t+1)^4 - \frac{1}{20} = \frac{5}{2}t^5 + 8t^4 + 9t^3 + 4t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{20} \end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_{-1}^0 \left(\frac{5}{2}t^5 + 8t^4 + 9t^3 + 4t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{20} \right) dt = \left[\frac{5}{12}t^6 + \frac{8}{5}t^5 + \frac{9}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{20}t \right]_{-1}^0 = -\frac{5}{12} + \frac{8}{5} - \frac{9}{4} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = -\frac{1}{30}.$$

Una parametrizzazione di Γ_2 in senso antiorario è $\gamma_2 : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$.

Quindi

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \left(\cos t \sin^2 t, \frac{1}{2} \cos^2 t \sin t - \frac{1}{20} \right) \cdot (-\sin t, \cos t) = \\ &= \frac{1}{2} \cos^3 t \sin t - \cos t \sin^3 t - \frac{1}{20} \cos t \end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos^3 t \sin t - \cos t \sin^3 t - \frac{1}{20} \cos t \right) dt = \left[-\frac{1}{8} \cos^4 t - \frac{1}{4} \sin^4 t - \frac{1}{20} \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{7}{40}.$$

Quindi

$$\int_{\Gamma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = -\frac{1}{30} - \frac{7}{40} = -\frac{5}{24}.$$

La risposta corretta è E.

Quiz 4. Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3y^2 - 8xy + 7, x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0\}$. L'integrale

$$\int_{\Sigma} \frac{z - 3y^2 - 7}{\sqrt{64x^2 - 96xy + 100y^2 + 1}} d\sigma \quad \text{vale}$$

A 81.

B 0.

C 162.

D 108.

E 216.

SVOLGIMENTO

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 3y^2 - 8xy + 7$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 3y^2 - 8xy + 7)$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z - 3y^2 - 7}{\sqrt{64x^2 - 96xy + 100y^2 + 1}}$, si ha che

$$\int_{\Sigma} \frac{z - 3y^2 - 7}{\sqrt{64x^2 - 96xy + 100y^2 + 1}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ dato da

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (8y, 8x - 6y, 1).$$

Quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{64y^2 + (8x - 6y)^2 + 1} = \sqrt{64x^2 - 96xy + 100y^2 + 1}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{z - 3y^2 - 7}{\sqrt{64x^2 - 96xy + 100y^2 + 1}} d\sigma &= \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy = \\ &= \int_K f(x, y, 3y^2 - 8xy + 7) \sqrt{64x^2 - 96xy + 100y^2 + 1} dx dy = -8 \int_K xy dx dy = \end{aligned}$$

passando in coordinate polari

$$= -8 \int_{K'} \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta d\rho d\vartheta =$$

essendo $K' = [0, 3] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$ si ottiene

$$= -8 \left(\int_0^3 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = -8 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^3 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 81.$$

La risposta corretta è A.

Quiz 5. La funzione $f(x, y) = (8 - x^2 - y^2) e^{3-x^2} - 4$

A ha tre punti stazionari: uno di massimo locale e due di sella.

B ha tre punti stazionari: uno di minimo locale e due di sella.

C ha solo un punto stazionario che è di massimo locale.

☐ **D** ha solo un punto stazionario che è di minimo locale.

☐ **E** ha due punti stazionari: uno di massimo locale e uno di sella.

SVOLGIMENTO

La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x(9 - x^2 - y^2)e^{3-x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2xe^{3-x^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x(9 - x^2 - y^2)e^{3-x^2} = 0 \\ 2xe^{3-x^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, & x^2 + y^2 = 9 \\ x = 0. \end{cases}$$

I punti stazionari di f sono $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(-3, 0)$.

Scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2(9 - y^2 - 21x^2 + 2x^2y^2 + 2x^4)e^{3-x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2e^{3-x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4xye^{3-x^2}.$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -18e^3 & 0 \\ 0 & -2e^3 \end{pmatrix}, \quad H_f(3, 0) = H_f(-3, 0) = \begin{pmatrix} 36e^{-6} & 0 \\ 0 & -2e^{-6} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(0, 0)$ è un punto di massimo locale mentre i punti $(3, 0)$ e $(-3, 0)$ sono di sella per f . La risposta corretta è

☐ **A**.

Quiz 6. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y \leq x \leq \sqrt{y}, y \leq 1\}$. L'integrale $\int_{\Omega} (8xy - 3x^3) dx dy$ vale

☐ **A** $\frac{7}{30}$.

☐ **B** $-\frac{113}{60}$.

☐ **C** 1.

☐ **D** $-\frac{113}{30}$.

☐ **E** $\frac{7}{15}$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y \leq x \leq \sqrt{y}, y \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

Ne segue che Ω è un insieme x -semplice. Procedendo con il metodo di integrazione per gli insiemi x -semplici si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (8xy - 3x^3) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-y}^{\sqrt{y}} (8xy - 3x^3) dx \right) dy = \int_0^1 \left[4x^2y - \frac{3}{4}x^4 \right]_{-y}^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3}{4}y^4 - 4y^3 + \frac{13}{4}y^2 \right) dy = \left[\frac{3}{20}y^5 - y^4 + \frac{13}{12}y^3 \right]_0^1 = \frac{7}{30}. \end{aligned}$$

La risposta corretta è ☐ **A**.

Quiz 7. Nell'ambito della teoria dei campi vettoriali nello spazio tridimensionale, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ **A** Nessuna delle altre è corretta.

☐ **B** Tutti i campi irrotazionali sono conservativi.

☐ **C** Tutti i campi conservativi hanno un dominio che è semplicemente connesso.

☐ **D** Esistono campi radiali di classe C^1 che non sono irrotazionali.

E Esistono campi conservativi che non sono radiali.

SVOLGIMENTO

La risposta corretta è **E**. Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ è conservativo perché $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, dove $f(x, y, z) = xyz$, ma non è radiale perché non è della forma $F(x, y, z) = \varphi(\|(x, y, z)\|)(x, y, z)$ con $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

La risposta **B** è errata. Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 1\right)$ è irrotazionale ma non è conservativo perché la circuitazione di F lungo la curva parametrica chiusa $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ è

$$\oint_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0.$$

La risposta **C** è errata. Infatti, il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, 2z\right)$ è definito su $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$ che non è semplicemente connesso, ma è conservativo perché $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, dove $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2) + z^2$.

La risposta **D** è errata. Infatti, se F è un campo radiale di classe C^1 , allora F è continuo e anche conservativo, e di conseguenza è irrotazionale.

La risposta **A** è errata perché **E** è corretta.

Quiz 8. Siano $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 , $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 2\}$, $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ la calotta regolare $\sigma(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ e $\tau: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ la calotta regolare $\tau(x, y) = (x, y, -\sqrt{3 - x^2 - y^2})$.

Il flusso del rotore di F attraverso il sostegno di τ , orientato in modo che il versore normale al sostegno di τ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , è uguale a

A 0.

B $\int_K \text{rot} F(x, y, 1 - x^2 - y^2) \cdot (-2x, -2y, -1) dx dy$.

C $\int_K \text{rot} F(x, y, -\sqrt{3 - x^2 - y^2}) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, -1\right) dx dy$.

D $\int_K \text{rot} F(x, y, -\sqrt{3 - x^2 - y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, 1\right) dx dy$.

E $\int_K \text{rot} F(x, y, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy$.

SVOLGIMENTO

Per il Teorema di Stokes il flusso del rotore di F attraverso il sostegno di τ , orientato in modo che il versore normale al sostegno di τ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , è uguale a

$$\int_{\tau} \text{rot} F \cdot n d\sigma = \int_{\partial\tau} F \cdot dP$$

dove $\partial\tau$ è orientato positivamente rispetto al vettore normale al sostegno di τ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Denotiamo con $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ e con $S = \tau(K)$ il sostegno di τ . Si ha che

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 2\}, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = -\sqrt{3 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Quindi

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = -1, x^2 + y^2 = 2\} = \partial S.$$

Il vettore normale a Σ individuato dalla calotta σ definito da $N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) = (2x, 2y, 1)$ forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , come il vettore normale a S individuato dalla calotta τ definito da $N_{\tau}(x, y) = \frac{\partial\tau}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\tau}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, 1\right)$. Per le proprietà degli integrali di linea si ha che

$$\int_{\partial\tau} F \cdot dP = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP$$

e per il Teorema di Stokes

$$\int_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma.$$

Quindi

$$\int_{\tau} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{rot} F (x, y, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx \, dy.$$

La risposta corretta è E.
