Esercizi sulle serie numeriche: parte II

Esercizio 1. Determinare il carattere delle seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3 + 3n + 1}.$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^3}.$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}.$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n+1)^2}.$

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti serie numeriche, stabilire se:

$\boxed{A}$ converge ma non assolutamente.

$\boxed{B}$ converge assolutamente.

$\boxed{C}$ è indeterminata.

$\boxed{D}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ diverge negativamente.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right].$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right].$

3) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^4 - n^6 \sin \dfrac{2}{n^2}}{(n+1)\log^2(n+1)}.$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^5 \left[1 - \frac{9}{2n^2} - \cos\left(\frac{3}{n}\right)\right]^2.$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)! - (-1)^n n^2}{n^{2n}+3}$.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4 + (-1)^n 3n \sin\left(\frac{5}{n}\right)}{7+\sqrt{n}}$.

Esercizio 3. Stabilire, se possibile, il carattere delle serie indicate, nelle ipotesi date:

1) (a_n) successione tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ converge. Studiare $\sum (-1)^n a_n^2$.

2) (a_n) successione tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ converge. Studiare $\sum (-1)^n \sin a_n$.

3) (a_n) successione tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ diverge. Studiare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{S_n}$, dove $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Esercizio 4. Per ciascuna delle seguenti serie numeriche, stabilire se:

$\boxed{A}$ converge ma non assolutamente.

$\boxed{B}$ converge assolutamente.

$\boxed{C}$ è indeterminata.

$\boxed{D}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ diverge negativamente.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{5\cos(n!)}{8n^2+7} - (-1)^n \frac{n\log n}{7n^2+8}\right]$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{\log n}{5n-6} + \frac{7\sin^2(n!)}{6n^2-5}\right]$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{5n}{n^3+7} - \frac{n}{\sqrt{7n^5+2}}\right]$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

1) Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3+3n+1}$. È a termini di segno variabile non alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^3+3n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^3+3n+1}.$$

Essendo $|\sin n| \leq 1$ per ogni $n \geq 1$, si ha che per ogni $n \geq 1$

$$\frac{|\sin n|}{n^3+3n+1} \leq \frac{1}{n^3+3n+1}.$$

Poiché $\frac{1}{n^3+3n+1} \sim \frac{1}{n^3}$ per $n \to +\infty$ ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n+1}$ converge. Per il Criterio del confronto anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^3+3n+1}$ converge. Quindi la serie data converge assolutamente e per il Criterio della convergenza assoluta converge.

2) Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^3}$. È a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\log n}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}.$$

Poiché $\log n = o(n^p)$ per $n \to +\infty$, per ogni $p > 0$, si ha che

$$\frac{\log n}{n^3} = o\left(\frac{n^p}{n^3}\right) = o\left(\frac{1}{n^{3-p}}\right), \qquad n \to +\infty, \quad \forall p > 0.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}}$ converge se e solo se $3-p > 1$, cioè se $0 < p < 2$. Quindi considerato un qualunque $0 < p < 2$, per per il Criterio del confronto asintotico la serie data assolutamente e per il Criterio della convergenza assoluta converge.

3) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n}$. È a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{\log n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}.$$

Poiché $\log n \geq 1$ per ogni $n \geq 3$, si ha che

$$\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geq 3.$$

Poiché la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, per il Criterio del confronto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ diverge e quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Essendo una serie a termini di segno alterno, controlliamo se sono soddisfatte le ipotesi del Criterio di Leibniz. Posto $b_n = \dfrac{\log n}{n}$, dobbiamo controllare se:

i) $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$;

ii) (b_n) è una successione decrescente.

Osserviamo che *i)* è soddisfatta perché per $\log n = o(n)$ per $n \to +\infty$. Per controllare che valga ii), consideriamo la funzione associata a (b_n), cioè la funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ definita su $[1, +\infty)$. Si ha che f è derivabile con $f'(x) = \dfrac{1 - \log x}{x^2} \leq 0$ per ogni $x \geq 3$. Quindi f è decrescente su $[3, +\infty)$. Ne segue che (b_n) è decrescente per ogni $n \geq 3$. Per il Criterio di Leibniz la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ converge.

4) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(2n+1)^2}$. È a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n}{(2n+1)^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)^2}.$$

Poiché

$$\frac{n}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n}, \qquad n \to +\infty.$$

e la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, per il Criterio del confronto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)^2}$ diverge e quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Essendo una serie a termini di segno alterno, controlliamo se sono soddisfatte le ipotesi del Criterio di Leibniz. Posto $b_n = \dfrac{n}{(2n+1)^2}$, dobbiamo controllare se:

i) $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$;

ii) (b_n) è una successione decrescente.

Osserviamo che *i*) è soddisfatta perché per quanto detto precedentemente $b_n \sim \frac{1}{4n}$ per $n \to +\infty$. Per controllare che valga ii), consideriamo la funzione associata a (b_n), cioè la funzione $f(x) = \dfrac{x}{(2x+1)^2}$ definita su $[1, +\infty)$. Si ha che f è derivabile con $f'(x) = \dfrac{1-2x}{(2x+1)^3} \le 0$ per ogni $x \ge 1$. Quindi f è decrescente su $[1, +\infty)$. Ne segue che (b_n) è decrescente per ogni $n \ge 1$. Per il Criterio di Leibniz la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, b_n$ converge.

Esercizio 2.

1) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right]$. Si ha che

$$n \text{ pari} \quad \Longrightarrow \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \ge 0,$$

$$n \text{ dispari} \quad \Longrightarrow \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \le 0.$$

Quindi la serie è a termini di segno alterno e si può scrivere come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right].$$

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right]$. Si ha che

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad n \to +\infty$$

ed essendo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergente, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right]$ diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Consideriamo la serie scritta come

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right].$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge per il Criterio di Leibniz, mentre la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge positivamente. Quindi per l'algebra delle serie, la serie data diverge positivamente. La risposta corretta è $\boxed{D}$.

Osservazione

a) In questo caso non si può applicare il Criterio di Leibniz alla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}\right]$.

Infatti, posto $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{(-1)^n}{n}$, si ha che:

1) $\displaystyle\lim_n b_n=\lim_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}\right)=0;$
2) la successione (b_n) non è decrescente. Infatti,

$$b_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{(-1)^{2n}}{2n}=\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{2n}=\frac{\sqrt{2n}+1}{2n},$$

$$b_{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2n+1},$$

$$b_{2n+2}=\frac{\sqrt{2n+2}+1}{2n+2}.$$

Ne segue che $b_{2n+1}<b_{2n}$ ma $b_{2n+2}>b_{2n+1}$.

b) Abbiamo osservato che $b_n\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ per $n\to+\infty$. La successione $\frac{1}{\sqrt{n}}$ è decrescente mentre (b_n) non lo è. Questo fatto non è sorprendente, perché la monotonia è una proprietà globale, e non puntuale come la nozione di limite, da cui scende quella di equivalenza.

c) Abbiamo osservato che $b_n\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ per $n\to+\infty$. Di conseguenza si ha che $(-1)^n b_n\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ per $n\to+\infty$. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mentre la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ non converge. Questo fatto non costituisce una contraddizione, infatti il Criterio del confronto asintotico si applica SOLO alle serie a termini positivi.

2) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]$. Poiché $\dfrac{1}{n}\geq\dfrac{1}{n^2}$ per ogi $n\geq 1$, questa serie è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]$. Si ha che

$$\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\sim\frac{1}{n},\qquad n\to+\infty$$

ed essendo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergente, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]$ diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right].$$

Le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ convergono entrambe. Quindi per l'algebra delle serie, anche la serie data converge. La risposta corretta è $\boxed{A}$.

<u>Osservazione</u>

a) In questo caso non si può applicare il Criterio di Leibniz alla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]$.

Infatti, posto $b_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, si ha che:

1) $\displaystyle\lim_n b_n=\lim_n\left(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=0$;
2) la successione (b_n) non è decrescente. Infatti,

$$b_{2n}=\frac{1}{2n}+\frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{(2n)^2}=\frac{2n+1}{(2n)^2},$$

$$b_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}+\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{2n}{(2n+1)^2},$$

$$b_{2n+2}=\frac{2n+3}{(2n+2)^2}.$$

Ne segue che $b_{2n+1}<b_{2n}$ ma $b_{2n+2}>b_{2n+1}$.

b) Abbiamo osservato che $b_n\sim\frac{1}{n}$ per $n\to+\infty$. La successione $\frac{1}{n}$ è decrescente mentre (b_n) non lo è. Questo fatto non è sorprendente, perché la monotonia è una proprietà globale, e non puntuale come la nozione di limite, da cui scende quella di equivalenza.

c) Abbiamo osservato che $b_n \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$. Di conseguenza si ha che $(-1)^n b_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$ per $n \to +\infty$. È errato dire che poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ è convergente, allora per il criterio del confronto asintotico anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ è convergente. Infatti, il Criterio del confronto asintotico si applica SOLO alle serie a termini positivi.

3) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^4 - n^6 \sin \frac{2}{n^2}}{(n+1)\log^2(n+1)}$.

Utilizzando lo sviluppo di Maclaurin della funzione $\sin x$ si ha che

$$2n^4 - n^6 \sin \frac{2}{n^2} = 2n^4 - n^6 \left[\frac{2}{n^2} - \frac{4}{3n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right] = 2n^4 - 2n^4 + \frac{4}{3} + o(1) = \frac{4}{3} + o(1), \qquad n \to +\infty.$$

Quindi

$$\frac{2n^4 - n^6 \sin \frac{2}{n^2}}{(n+1)\log^2(n+1)} \sim \frac{4}{3(n+1)\log^2(n+1)}, \qquad n \to +\infty.$$

Quindi definitivamente si ha che

$$\frac{2n^4 - n^6 \sin \frac{2}{n^2}}{(n+1)\log^2(n+1)} \geq 0.$$

Ne segue che la serie è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, ovvero la convergenza della serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n^4 - n^6 \sin \frac{2}{n^2}}{(n+1)\log^2(n+1)}.$$

Poiché

$$\frac{2n^4 - n^6 \sin \frac{2}{n^2}}{(n+1)\log^2(n+1)} \sim \frac{4}{3(n+1)\log^2(n+1)}, \qquad n \to +\infty,$$

consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}$ definita su $[3, +\infty)$. Questa funzione è positiva e decrescente. Valutiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} f(x)\, dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\, dx.$$

Posto $t = \log(x+1)$, da cui $dt = \frac{1}{x+1}\, dx$, si ha che

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_3^{c} \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_{\log 4}^{\log(c+1)} \frac{1}{t^2}\, dt = \int_{\log 4}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$$

che converge. Quindi, per il Criterio di Maclaurin la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{3(n+1)\log^2(n+1)}$ converge. Per il Criterio del confronto asintotico la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n^4 - n^6 \sin\frac{2}{n^2}}{(n+1)\log^2(n+1)}$ converge e di conseguenza la serie data converge assolutamente. La risposta corretta è $\boxed{\mathrm{B}}$.

4) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n^5 \left[1 - \frac{9}{2n^2} - \cos\left(\frac{3}{n}\right)\right]^2$.

È a termini di segno alterno. Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n\, n^5 \left[1 - \frac{9}{2n^2} - \cos\left(\frac{3}{n}\right)\right]^2\right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \left[1 - \frac{9}{2n^2} - \cos\left(\frac{3}{n}\right)\right]^2.$$

Poiché $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ per $x \to 0$, si ha che

$$n^5 \left[1 - \frac{9}{2n^2} - \cos\left(\frac{3}{n}\right)\right]^2 = \frac{(27)^2}{64\,n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \to +\infty$$

e quindi

$$n^5 \left[1 - \frac{9}{2n^2} - \cos\left(\frac{3}{n}\right)\right]^2 \sim \frac{(27)^2}{64\,n^3}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge assolutamente. La risposta corretta è $\boxed{B}$.

5) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, \frac{(2n)! - (-1)^n\, n^2}{n^{2n} + 3}$.

Poiché $n^2 = o((2n)!)$ per $n \to +\infty$, la serie è a termini di segno alterno. Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n\, \frac{(2n)! - (-1)^n\, n^2}{n^{2n} + 3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! - (-1)^n\, n^2}{n^{2n} + 3}.$$

Per quanto detto precedentemente si ha che

$$\frac{(2n)! - (-1)^n\, n^2}{n^{2n} + 3} \sim \frac{(2n)!}{n^{2n}}, \quad n \to +\infty.$$

Posto $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$, si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!}{(n+1)^2\,(n+1)^{2n}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}.$$

Quindi

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} = \frac{4}{e^2} < 1.$$

Per il Criterio del rapporto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Di conseguenza per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge assolutamente. La risposta corretta è $\boxed{B}$.

6) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4+(-1)^n\,3n\,\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{7+\sqrt{n}}$.

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4+(-1)^n\,3n\,\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{7+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{4}{7+\sqrt{n}} + \frac{3n\,\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{7+\sqrt{n}}\right].$$

Consideriamo le serie dei singoli addendi, ossia le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{7+\sqrt{n}}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n\,\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{7+\sqrt{n}}$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{7+\sqrt{n}}$ è a termini di segno alterno e non converge assolutamente perché

$$\frac{4}{7+\sqrt{n}} \sim \frac{4}{n^{1/2}}, \quad n \to +\infty$$

e perché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge.

Però questa serie converge per il Criterio di Leibniz, perché posto $b_n = \dfrac{4}{7+\sqrt{n}}$ si ha che $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ ed essendo $\sqrt{n}$ crescente risulta che (b_n) è decrescente.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n\,\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{7+\sqrt{n}}$ è a termini positivi perché $0 \le \sin\left(\frac{5}{n}\right) \le 1$ per $n \to +\infty$. Quindi converge o diverge positivamente.

Poiché $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, si ha che

$$\frac{3n\,\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{7+\sqrt{n}} \sim \frac{15}{n^{1/2}}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n \sin\left(\frac{5}{n}\right)}{7+\sqrt{n}}$ diverge positivamente.

In conclusione, per l'algebra delle serie la serie data diverge positivamente. La risposta corretta è $\boxed{D}$.

Esercizio 3.

1) Consideriamo la successione (a_n) tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ converge. Studiamo la serie $\sum(-1)^n a_n^2$.

   È una serie a termini di segno alterno. Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie
$$\sum \left|(-1)^n a_n^2\right| = \sum a_n^2.$$
   Poiché per ipotesi $\sum a_n$ converge, per la condizione necessaria si ha che $\lim_n a_n = 0$.

   Ne segue che $a_n^2 = o(a_n)$ per $n \to +\infty$. Per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum a_n^2$ converge, e di conseguenza la serie data converge assolutamente.

   In alternativa, poiché $\lim_n a_n = 0$, allora definitivamente $0 < a_n \leq 1$ e di conseguenza definitivamente $a_n^2 \leq a_n$. Per il Criterio del confronto la serie $\sum a_n^2$ converge, e di conseguenza la serie data converge assolutamente.

2) Consideriamo la successione (a_n) tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ converge. Studiamo la serie $\sum(-1)^n \sin a_n$.

   Poiché per ipotesi $\sum a_n$ converge, per la condizione necessaria si ha che $\lim_n a_n = 0$. Quindi definitivamente $0 < a_n < \pi$ e di conseguenza definitivamente $\sin a_n > 0$. Ne segue che la serie è a termini di segno alterno. Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie
$$\sum \left|(-1)^n \sin a_n\right| = \sum \sin a_n.$$
   Poiché $\lim_n a_n = 0$, si ha che $\sin a_n \sim a_n$ per $n \to +\infty$. Per il Criterio del confronto asintotico la serie $\sum \sin a_n$ converge, e di conseguenza la serie data converge assolutamente.

   In alternativa, essendo $\sin a_n \leq a_n$ per ogni n, per il Criterio del confronto la serie $\sum \sin a_n$ converge, e di conseguenza la serie data converge assolutamente.

3) Consideriamo la successione (a_n) tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ diverge. Studiamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{S_n}$, dove $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Poiché S_n è la somma parziale n-esima della serie di a_n, si ha che $S_n > 0$ per ogni $n \geq 1$, la successione (S_n) è crescente e, poiché $\sum a_n$ diverge, si ha che $\lim_n S_n = +\infty$.

Quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{S_n}$ è a termini di segno alterno.

Poiché $\lim_n S_n = +\infty$, si ha che $\lim_n \dfrac{1}{S_n} = 0$, ed essendo (S_n) crescente e positiva si ha che $\left(\frac{1}{S_n}\right)$ è decrescente. Per il Criterio di Leibniz la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{S_n}$ converge.

Nelle ipotesi considerate non è possibile concludere che la serie converge anche assolutamente. In effetti, si può fare un esempio in cui la serie non converge assolutamente. Infatti, considerato $a_n = 1$ per ogni $n \geq 1$, si ha che la serie $\sum a_n$ diverge. Inoltre

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$$

che converge ma non assolutamente.

Esercizio 4.

1) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{5\cos(n!)}{8n^2+7} - (-1)^n \frac{n\log n}{7n^2+8}\right]$.

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{5\cos(n!)}{8n^2+7} - (-1)^n \frac{n\log n}{7n^2+8}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{5\cos(n!)}{8n^2+7} - \frac{n\log n}{7n^2+8}\right].$$

Consideriamo le serie dei singoli addendi, ossia le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5\cos(n!)}{8n^2+7}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\log n}{7n^2+8}$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5\cos(n!)}{8n^2+7}$ è a termini di segno variabile. Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{5\cos(n!)}{8n^2+7}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5|\cos(n!)|}{8n^2+7}.$$

Poiché $|\cos x| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\frac{5|\cos(n!)|}{8n^2+7} \leq \frac{5}{8n^2+7}, \quad \forall n \geq 1.$$

Inoltre

$$\frac{5}{8n^2+7} \sim \frac{5}{8n^2}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per i criteri del confronto asintotico e del confronto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5\cos(n!)}{8n^2+7}$ converge assolutamente, e quindi converge.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log n}{7n^2+8}$ è a termini positivi, quindi converge o diverge positivamente.

Poiché $\log n \geq 1$ per ogni $n \geq 3$, si ha che

$$\frac{n \log n}{7n^2+8} \geq \frac{n}{7n^2+8}, \quad \forall n \geq 3.$$

Inoltre

$$\frac{n}{7n^2+8} \sim \frac{1}{7n}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, per i criteri del confronto asintotico e del confronto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log n}{7n^2+8}$ diverge positivamente. Ne segue che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n \log n}{7n^2+8}\right)$ diverge negativamente.

In conclusione, per l'algebra delle serie la serie data diverge negativamente. La risposta corretta è $\boxed{E}$.

2) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\log n}{5n-6} + \frac{7\sin^2(n!)}{6n^2-5}\right]$. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\log n}{5n-6} + \frac{7\sin^2(n!)}{6n^2-5}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{\log n}{5n-6} + (-1)^n \frac{7\sin^2(n!)}{6n^2-5}\right].$$

Consideriamo le serie dei singoli addendi, ossia le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{5n-6}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7\sin^2(n!)}{6n^2-5}$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{5n-6}$ è a termini di segno alterno. Non converge assolutamente perché

$$\frac{\log n}{5n-6} \geq \frac{1}{5n-6}, \quad \forall n \geq 3,$$

e perché la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Si osserva però che questa serie converge per il Criterio di Leibniz, Infatti, posto $b_n = \dfrac{\log n}{5n-6}$, si ha che $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e che la successione (b_n) è decrescente, essendo decrescente la funzione associata $f(x) = \dfrac{\log x}{5x-6}$ definita su $[1, +\infty)$ che ha derivata $f'(x) = \dfrac{5x(1-\log x)-6}{x(5x-6)^2} \leq 0$ per ogni $x \geq 1$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7\sin^2(n!)}{6n^2-5}$ è a termini di segno alterno e converge assolutamente perché

$$\frac{7\sin^2(n!)}{6n^2-5} \leq \frac{7}{6n^2-5}, \quad \forall n \geq 1, \qquad\qquad \frac{7}{6n^2-5} \sim \frac{7}{6n^2}, \quad n \to +\infty$$

e perché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

In conclusione, per l'algebra delle serie la serie data converge ma non assolutamente. La risposta corretta è $\boxed{A}$.

3) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{5n}{n^3+7} - \frac{n}{\sqrt{7n^5+2}}\right]$. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{5n}{n^3+7} - \frac{n}{\sqrt{7n^5+2}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{5n}{n^3+7} - (-1)^n \frac{n}{\sqrt{7n^5+2}}\right].$$

Consideriamo le serie dei singoli addendi, ossia le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n}{n^3+7}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{7n^5+2}}$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n}{n^3+7}$ è a termini di segno alterno e converge assolutamente perché

$$\frac{5n}{n^3+7} \sim \frac{5}{n^2}, \quad n \to +\infty$$

e perché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{7n^5+2}}$ è a termini di segno alterno e converge assolutamente perché

$$\frac{n}{\sqrt{7n^5+2}} \sim \frac{1}{\sqrt{7}\, n^{3/2}}, \quad n \to +\infty$$

e perché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

In conclusione, per l'algebra delle serie la serie data converge assolutamente. La risposta corretta è $\boxed{B}$.