Esercizi sulle serie numeriche: parte I

Esercizio 1. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,(3-\pi)^n$

$\boxed{A}$ converge a $\dfrac{1}{4-\pi}$.

$\boxed{B}$ converge a $\dfrac{1}{\pi}$.

$\boxed{C}$ converge a $\dfrac{\pi^2-6\pi+9}{4-\pi}$.

$\boxed{D}$ è indeterminata

$\boxed{E}$ converge a $\dfrac{4\pi-3}{4-\pi}$.

Esercizio 2. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$\boxed{A}$ converge a $-\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

$\boxed{B}$ converge a $\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

$\boxed{C}$ converge a $-\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$.

$\boxed{D}$ converge a $\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$.

$\boxed{E}$ è indeterminata.

Esercizio 3. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}-3\arctan 2\right)^n$

$\boxed{A}$ diverge negativamente.

$\boxed{B}$ converge ad un numero maggiore di zero.

$\boxed{C}$ converge ad un numero minore di zero.

$\boxed{D}$ diverge positivamente.

$\boxed{E}$ è indeterminata.

Esercizio 4. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n}$

$\boxed{A}$ converge a $\dfrac{5}{5-\pi}$.

$\boxed{B}$ converge a $\dfrac{25}{25-\pi^2}$.

$\boxed{C}$ converge a $\dfrac{\pi^4}{25(25-\pi^2)}$.

$\boxed{D}$ converge a $\dfrac{\pi^2}{5(5-\pi)}$.

$\boxed{E}$ diverge positivamente.

Esercizio 5. Stabilire se le seguenti serie convergono e in caso affermativo determinarne la somma:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\arctan(n+1)-\arctan n]$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2(n+1)}\right]$.

Esercizio 6. Determinare il carattere delle seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+\log n}{n^3+7n+4}$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{3}{n}+\log n}{5n+2}$.

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\log n}$.

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$.

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1-\cos\frac{1}{n^2}}$.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-e^{1/\sqrt[3]{n}}\right)^3$.

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n^2}}{(n!)^n}$.

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n\,(n!)^2}$.

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\,\log\left(1+\frac{5}{n}\right)}{4n^3+1}$.

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+\log n}{n^5+3^n}$.

11) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} n^2\,\sin\left(\frac{2n+1}{n^4}\right)$.

Esercizio 7. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha\,\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Esercizio 8. Siano $p, q \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^q\,\sin(n\pi)+7n^p}{2n^3+5}$

$\boxed{A}$ converge se e solo se $p+q<2$.

$\boxed{B}$ converge se e solo se $q<2$, per ogni $p \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ converge se e solo se $p<2$ e $q<2$.

$\boxed{D}$ converge se e solo se $p<2$, per ogni $q \in \mathbb{R}$.

$\boxed{E}$ non converge per ogni $p, q \in \mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,(3-\pi)^n$ è geometrica. Infatti

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,(3-\pi)^n=\sum_{n=2}^{\infty}(\pi-3)^n.$$

La ragione è $a=\pi-3$. Quindi $|a|=\pi-3<1$. Sappiamo che la serie geometrica di ragione a con $|a|<1$ converge e la somma di questa serie con l'indice che parte da **ZERO** è

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a}.$$

Quindi la serie data converge e poiché l'indice n parte da **DUE** si ha che la somma di questa serie è

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\pi-3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\pi-3)^n-\left[(\pi-3)^0+(\pi-3)^1\right]=$$

$$=\frac{1}{1-(\pi-3)}-[1+\pi-3]=\frac{1}{4-\pi}+2-\pi=\frac{\pi^2-6\pi+9}{4-\pi}.$$

La risposta corretta è $\boxed{C}$.

Esercizio 2. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

e quindi si tratta di una serie geometrica di ragione $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Essendo $|a|<1$ questa serie converge e inoltre si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a}.$$

Ne segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n-1=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}-1=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{A}}$.

Esercizio 3. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}-3\arctan 2\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(3\arctan 2-\frac{\pi}{4}\right)^n$$

e quindi si tratta di una serie geometrica di ragione $a=3\arctan 2-\frac{\pi}{4}$. Poiché la funzione arctan è strettamente crescente, si ha che $\arctan 2>\arctan 1=\frac{\pi}{4}$ e quindi

$$a=3\arctan 2-\frac{\pi}{4}>3\arctan 1-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}>1.$$

Poiché la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty}a^n$ diverge positivamente se $a>1$, la serie data diverge positivamente. La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Esercizio 4.

Si ha che

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\pi^2}{25}\right)^n.$$

Quindi è una serie geometrica di ragione $a=\pi^2/25$. Poiché $|a|<1$, questa serie converge. In particolare, se $|a|<1$, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a}.$$

Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\pi^2}{25}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi^2}{25}\right)^n-\left[\left(\frac{\pi^2}{25}\right)^0+\left(\frac{\pi^2}{25}\right)^1\right]=\frac{1}{1-\frac{\pi^2}{25}}-\left(1+\frac{\pi^2}{25}\right)=\frac{\pi^4}{25(25-\pi^2)}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Esercizio 5.

1) Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty}[\arctan(n+1)-\arctan n]$.

Poniamo $a_n=\arctan(n+1)-\arctan n$. Poiché la funzione arcotangente è crescente, si ha che $\arctan(n+1)>\arctan n$ e quindi la serie è a termini positivi, e di conseguenza converge o diverge positivamente.

Poiché $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ per $x > 0$, e $\arctan x \sim x$ per $x \to 0$, si ha che

$$a_n = \arctan(n+1) - \arctan n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il Criterio del confronto asintotico anche la serie data converge.

Calcoliamo la somma della serie. Osserviamo che la serie data è telescopica. La somma parziale n-esima della serie è

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} [\arctan(k+1) - \arctan k] = \\
&= \arctan 2 - \arctan 1 + \arctan 3 - \arctan 2 + \arctan 4 - \arctan 3 + \cdots + \\
&\quad + \arctan(n+1) - \arctan n = \\
&= \arctan(n+1) - \arctan 1 = \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Ne segue che la somma della serie è

$$S = \lim_n S_n = \lim_n \left[\arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4}.$$

Pertanto si ha $\sum_{n=1}^{\infty} [\arctan(n+1) - \arctan n] = \frac{\pi}{4}$.

2) Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. È a termini positivi, quindi converge o diverge positivamente. Poiché

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}, \quad n \to +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge.

Calcoliamo la somma della serie. Osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} = \frac{(A+B)n + 2A}{n(n+1)(n+2)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$
Ne segue che la serie data è telescopica. La somma parziale della serie è
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]. \end{aligned}$$
Ne segue che la somma della serie è
$$S = \lim_n S_n = \lim_n \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{4}.$$
Pertanto si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

3) Si ha che
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+1)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n\,2^n} - \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}\right].$$
Poiché $n\,2^n \leq (n+1)\,2^{n+1}$ per ogni $n \geq 1$, la serie è a termini positivi, quindi converge o diverge positivamente. Inoltre si ha che
$$\forall n \geq 1: \quad \frac{1}{n\,2^n} - \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n}.$$
Poiché la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, per il Criterio del confronto la serie data converge.

Osserviamo che la serie è telescopica. La somma parziale n-esima della serie è
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k\,2^k} - \frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{n\,2^n} - \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}.$$
Ne segue che
$$\lim_n S_n = \lim_n \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}\right] = \frac{1}{2}.$$
Quindi la serie converge a $S = \dfrac{1}{2}$.

Esercizio 6.

1) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+\log n}{n^3+7n+4}$. È a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente.

Si ha che $\dfrac{5+\log n}{n^3+7n+4} \sim \dfrac{\log n}{n^3}$, per $n \to +\infty$.

Poiché $\log n = o(n^p)$ per $n \to +\infty$, per ogni $p > 0$, si ha che

$$\frac{\log n}{n^3} = o\left(\frac{n^p}{n^3}\right) = o\left(\frac{1}{n^{3-p}}\right), \qquad n \to +\infty, \quad \forall p > 0.$$

Quindi

$$\frac{5+\log n}{n^3+7n+4} = o\left(\frac{1}{n^{3-p}}\right), \qquad n \to +\infty, \quad \forall p > 0.$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}}$ converge se e solo se $3-p > 1$, cioè se $0 < p < 2$. Quindi considerato un qualunque $0 < p < 2$, per per il Criterio del confronto asintotico anche la serie data converge.

2) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{n}+\log n}{5n+2}$. È a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente.

Si ha che $\dfrac{\frac{3}{n}+\log n}{5n+2} \sim \dfrac{\log n}{5n}$, per $n \to +\infty$.

Poiché $\log n \geq 1$ per $n \geq 3$, si ha che $\dfrac{\log n}{5n} \geq \dfrac{1}{5n}$ per ogni $n \geq 3$. Poiché la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ diverge e quindi per il Criterio del confronto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{5n}$ diverge, e di conseguenza per il Criterio del confronto asintotico la serie data diverge.

3) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$. È a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente.

Poiché $\log n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, si ha che $\frac{1}{\log n} \to 0$ per $n \to +\infty$ e quindi $\frac{1}{\log n} = o(1)$ per $n \to +\infty$. Di conseguenza

$$\frac{1}{n^2 \log n} = \frac{1}{n^2}\, o(1) = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge.

4) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$. È a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente.

Posto $a_n = \dfrac{1}{n \log n}$, si osserva che la successione (a_n) è decrescente perché la successione $n \log n$ è crescente. Quindi considerata la funzione f associata ad a_n, ovvero la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x \log x}$ definita su $[2, +\infty)$, si ha che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 2$ e inoltre f è decrescente su $[2, +\infty)$. Per il Criterio di Maclaurin la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge se e solo se l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.

Posto $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x}\, dx$, si ha che

$$\int_2^{+\infty} f(x)\, dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\, dx = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$$

che diverge. Per il Criterio di Maclaurin la serie data diverge.

5) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - \cos \frac{1}{n^2}}$. È a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente.

Poiché $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$, si ha che

$$\sqrt{1 - \cos \frac{1}{n^2}} = \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \left[1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]^{1/2} =$$

essendo $[f + o(f)]^p = f^p + o(f^p)$ si ottiene

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{n^2}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge.

6) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{1/\sqrt[3]{n}}\right)^3$.

Poniamo $a_n = \left(1 - e^{1/\sqrt[3]{n}}\right)^3$. Poiché $e^x \geq 1$ per ogni $x \geq 0$, si ha che $a_n \leq 0$ per ogni $n \geq 1$. Quindi la serie è a termini negativi. Quindi converge o diverge negativamente.

Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/\sqrt[3]{n}} - 1\right)^3$ che è a termini positivi.

Poiché $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$, si ha che

$$\left(e^{1/\sqrt[3]{n}} - 1\right)^3 = \left[1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) - 1\right]^3 = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right]^3 =$$

essendo $[f + o(f)]^p = f^p + o(f^p)$ si ottiene

$$= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, per il Criterio del confronto asintotico la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/\sqrt[3]{n}} - 1\right)^3$ diverge positivamente e quindi la serie data diverge negativamente.

7) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n^2}}{(n!)^n}$. È a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente.

Poniamo $a_n = \dfrac{4^{n^2}}{(n!)^n}$. Si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{4^{n^2}}{(n!)^n}} = \lim_n \frac{4^n}{n!} = 0 < 1.$$

Per il Criterio della radice la serie data converge.

8) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n\,(n!)^2}$. È a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente.

Poniamo $a_n = \dfrac{(2n)!}{3^n\,(n!)^2}$. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[2(n+1)]!}{[3^{n+1}\,(n+1)!]^2} \cdot \frac{3^n\,(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{3 \cdot 3^n\,[(n+1)!]^2} \cdot \frac{3^n\,(n!)^2}{(2n)!} =$$

essendo $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)\,(2n)!$, $\quad (n+1)! = (n+1)\,n!$, $\quad$ si ottiene

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)\,(2n)!}{3 \cdot 3^n\,(n+1)^2\,(n!)^2} \cdot \frac{3^n\,(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2(2n+1)}{3(n+1)}.$$

Quindi

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{2(2n+1)}{3(n+1)} = \frac{4}{3} > 1.$$

Per il Criterio del rapporto la serie data diverge.

9) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \log\left(1+\frac{5}{n}\right)}{4n^3+1}$. È a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente.

Essendo $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$, si ha che

$$\log\left(1+\frac{5}{n}\right) \sim \frac{5}{n}, \quad n \to +\infty$$

e di conseguenza

$$\frac{n^2 \log\left(1+\frac{5}{n}\right)}{4n^3+1} \sim \frac{5}{4n^2}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge.

10) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \log n}{n^5 + 3^n}$. È a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente.

Si ha che

$$\frac{2^n + \log n}{n^5 + 3^n} \sim \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n \to +\infty,$$

Poiché la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge.

11) Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{2n+1}{n^4}\right)$. Si ha che

$$\forall n \geq 3: \quad 0 \leq \frac{2n+1}{n^4} \leq \frac{7}{81} < \frac{\pi}{2}.$$

Quindi $\sin\left(\frac{2n+1}{n^4}\right) \geq 0$ per ogni $n \geq 3$ e di conseguenza la serie è a termini positivi. Quindi converge o diverge positivamente.

Essendo $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, si ha che

$$n^2 \sin\left(\frac{2n+1}{n^4}\right) \sim \frac{2}{n}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, per il Criterio del confronto asintotico la serie data diverge.

Esercizio 7.

La serie data è a termini positivi, quindi converge o diverge positivamente.

Essendo $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$, si ha che

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}, \quad n \to +\infty$$

e di conseguenza

$$n^\alpha \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n^{\alpha-1} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}, \quad n \to +\infty.$$

Poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ converge se $1-\alpha > 1$, ovvero se $\alpha < 0$, e diverge se $1-\alpha \leq 1$, ovvero se $\alpha \geq 0$, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge solo se $\alpha < 0$.

Esercizio 8.

Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\sin(n\pi) = 0$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^q \sin(n\pi) + 7n^p}{2n^3+5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^p}{2n^3+5}$$

e quindi è a termini positivi.

Poiché

$$\frac{7n^p}{2n^3+5} \sim \frac{7}{2}\,\frac{1}{n^{3-p}}, \quad n \to +\infty$$

e poiché la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}}$ converge se e solo se $3-p > 1$, ovvero per $p < 2$, per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge se e solo se $p < 2$, per ogni $q \in \mathbb{R}$.

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.