Esercizi sulle serie di Fourier

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g(x) = x^2$, per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

Studiare la convergenza quadratica e puntuale della serie di Fourier di f e poi scrivere la serie di Fourier di f.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Studiare la convergenza quadratica e puntuale della serie di Fourier di f e poi scrivere la serie di Fourier di f.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + \pi x & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi x & \text{se } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

e siano a_n, b_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ i coefficienti di Fourier di f. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a π^4.

$\boxed{B}$ converge a 0.

$\boxed{C}$ converge a $\dfrac{14}{45}\pi^4$.

$\boxed{D}$ diverge.

$\boxed{E}$ converge a $\dfrac{7}{5}\pi^4$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [0, 2) \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 5 - x & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$\boxed{A}$ $P_1(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{6}{\pi^2}\cos x - \dfrac{11}{\pi}\sin x.$

$\boxed{B}$ $P_1(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{6}{\pi^2}\cos(\pi x) - \dfrac{11}{\pi}\sin(\pi x).$

$\boxed{C}$ $P_1(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{\pi}\cos(\pi x) - \dfrac{6}{\pi^2}\sin(\pi x).$

$\boxed{D}$ $P_1(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{\pi}\cos x - \dfrac{6}{\pi^2}\sin x.$

$\boxed{E}$ $P_1(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{6}{\pi^2}x.$

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g(x) = 1 + x$ per ogni $x \in [0, 2)$. Il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$\boxed{A}$ $P_1(x) = 2 - \dfrac{2}{\pi}\cos(\pi x).$

$\boxed{B}$ $P_1(x) = 2 - \dfrac{2}{\pi}\cos x.$

$\boxed{C}$ $P_1(x) = 2 - \dfrac{2}{\pi}\sin x.$

$\boxed{D}$ $P_1(x) = 2 - \dfrac{2}{\pi}\sin(\pi x).$

$\boxed{E}$ $P_1(x) = 2 - \dfrac{2}{\pi}x.$

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ \sqrt{\dfrac{x}{\pi}} & \text{se } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

e siano a_n, b_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$ i coefficienti di Fourier di f. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a $\dfrac{2}{9}$.

$\boxed{B}$ converge a $\dfrac{1}{9}$.

$\boxed{C}$ converge a $\dfrac{3}{2}$.

$\boxed{D}$ converge a $\dfrac{3}{4}$.

$\boxed{E}$ converge a $\dfrac{1}{3}$.

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g(x) = |x|$, per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

Studiare la convergenza quadratica e puntuale della serie di Fourier di f e poi scrivere la serie di Fourier di f.

Esercizio 8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ \pi^{3/2}\sqrt{x} & \text{se } 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

e siano a_n, b_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, i coefficienti di Fourier di f. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a $\dfrac{9}{20}\pi^4$.

$\boxed{B}$ converge a $\dfrac{2}{5}\pi^4$.

$\boxed{C}$ converge a $\dfrac{9}{10}\pi^4$.

$\boxed{D}$ diverge.

$\boxed{E}$ converge a $\dfrac{1}{5}\pi^4$.

Esercizio 9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(x+\pi)^2 & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{2}{\pi}(x-\pi)^2 & \text{se } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$\boxed{A}$ $P_1(x) = \dfrac{8}{\pi}\cos x + \dfrac{12}{\pi}\sin x$.

$\boxed{B}$ $P_1(x) = \dfrac{8}{\pi}\cos x$.

$\boxed{C}$ $P_1(x) = \dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{8}{\pi}\cos x.$

$\boxed{D}$ $P_1(x) = \dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{8}{\pi}\cos x + \dfrac{12}{\pi}\sin x.$

$\boxed{E}$ $P_1(x) = \dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{12}{\pi}\sin x.$

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione $g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 3x^2 - \pi x$, e siano a_n, b_n, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, i coefficienti di Fourier di f.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$

$\boxed{A}$ converge a $\dfrac{1}{15}\,\pi^4$.

$\boxed{B}$ converge a $\dfrac{49}{15}\,\pi^4$.

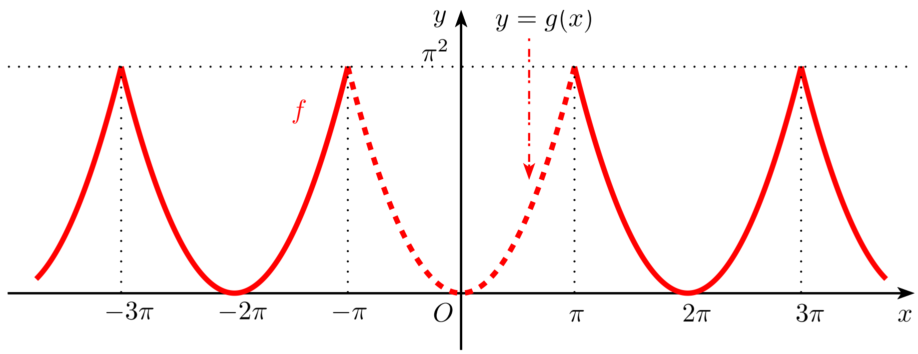
$\boxed{C}$ converge a $\dfrac{14}{15}\,\pi^4$.

$\boxed{D}$ converge a $\dfrac{34}{15}\,\pi^4$.

$\boxed{E}$ converge a π^4.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. La funzione f è periodica di periodo 2π ed è di classe C^1 su $[-\pi, \pi]$. Di conseguenza è integrabile in $[-\pi, \pi]$. Per il Teorema di convergenza quadratica la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f. Inoltre per il Teorema di convergenza puntuale la serie di Fourier di f converge puntualmente a f su $\mathbb{R}$.



Scriviamo ora la serie di Fourier di f. Essendo f periodica di periodo 2π e pari, la serie di Fourier di f è della forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

e per ogni $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx =$$

integrando per parti

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x^2\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx\right) =$$

integrando per parti

$$= -\frac{4}{n\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{4}{n^2\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Poiché la serie di Fourier di f converge puntualmente a f su $\mathbb{R}$, si ha che

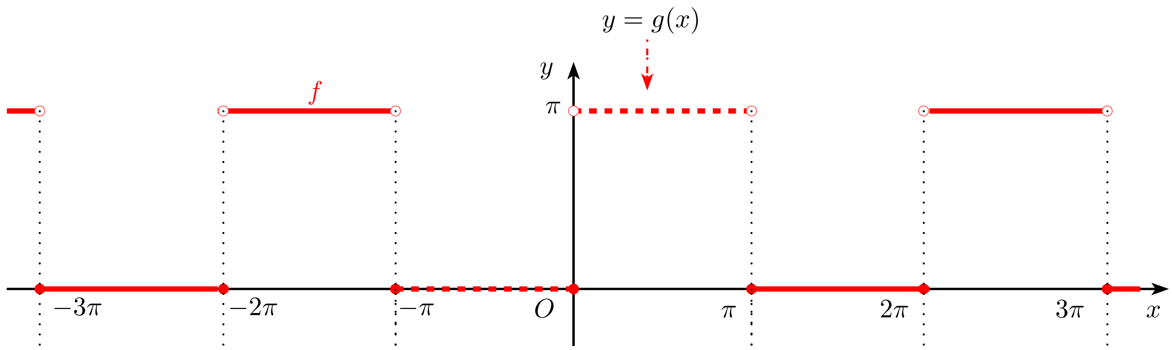
$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

In particolare

$$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12},$$

$$x = \pi \quad \Longrightarrow \quad \pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esercizio 2. La funzione f è periodica di periodo 2π. Inoltre f è continua in $\mathbb{R}$ esclusi i punti $x = k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, in cui ha una discontinuità di tipo salto.



Studiamo inizialmente la convergenza della serie di Fourier di f.

Poiché f è continua a tratti in $[-\pi, \pi]$, si ha che la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f su $\mathbb{R}$.

Studiamo ora la convergenza puntuale della serie di Fourier di f. Essendo f derivabile in $\mathbb{R}$ esclusi i punti $x_k = k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ha che la serie di Fourier di f calcolata in x converge a $f(x)$, per ogni $x \neq x_k$.

Consideriamo ora $x_k = k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Si ha che

$$f(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2m \\ \pi & \text{se } k = 2m+1, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z},$$

$$f(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} f(x) = \begin{cases} \pi & \text{se } k = 2m \\ 0 & \text{se } k = 2m+1, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z},$$

$$f'(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} \frac{f(x) - f(x_k^-)}{x - x_k} = 0, \quad f'(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} \frac{f(x) - f(x_k^+)}{x - x_k} = 0.$$

Quindi la serie di Fourier di f converge in $x_k = k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, a $\frac{1}{2}[f(x_k^-) + f(x_k^+)] = \frac{\pi}{2}$. Pertanto la serie di Fourier di f converge puntualmente alla funzione $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq k\pi \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Scriviamo ora la serie di Fourier di f. La serie di Fourier di f è

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \pi\, dx = \frac{\pi}{2},$$

e per ogni $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \cos(nx)\, dx = \left[\frac{1}{n} \sin(nx)\right]_0^{\pi} = 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin(nx)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{n} \cos(nx)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ \frac{2}{n} & \text{se } n = 2k+1, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin[(2n+1)x].$$

Poiché la serie di Fourier di f converge puntualmente alla funzione S su $\mathbb{R}$, si ha che

$$\frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin[(2n+1)x] = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq k\pi \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 3. La funzione g è continua a tratti in $[-\pi, \pi)$ e quindi lo è anche f. Di conseguenza f è integrabile in $[-\pi, \pi)$. Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\pi}^{0} \left(x^2 + \pi x\right)^2\, dx + \int_{0}^{\pi} \pi^2 x^2\, dx = \int_{-\pi}^{0} \left(x^4 + 2\pi x^3 + \pi^2 x^2\right)\, dx + \pi^2 \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}\pi x^4 + \frac{1}{3}\pi^2 x^3\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{3}\pi^5 = \frac{11}{30}\pi^5,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (x^2 + \pi x)\, dx + \int_{0}^{\pi} \pi x\, dx\right) = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\pi x^2\right]_{-\pi}^{0} + \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{6}\pi^2.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx - 2a_0^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{11}{30}\pi^5\right) - 2\left(\frac{1}{6}\pi^2\right)^2 = \frac{14}{45}\,\pi^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Esercizio 4. La funzione f è periodica di periodo 2 e continua a tratti in $[0, 2)$, quindi integrabile in $[0, 2)$. Il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = a_0 + a_1 \cos(\pi x) + b_1 \sin(\pi x),$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)\, dx, \qquad a_1 = \int_0^2 f(x) \cos(\pi x)\, dx, \qquad b_1 = \int_0^2 f(x) \sin(\pi x)\, dx.$$

Si ha che

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)\, dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (2x - 3)\, dx + \int_1^2 (5 - x)\, dx\right) = \frac{1}{2} \left(\left[x^2 - 3x\right]_0^1 + \left[5x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2\right) = \frac{3}{4},$$

$$a_1 = \int_0^2 f(x) \cos(\pi x)\, dx = \int_0^1 (2x - 3) \cos(\pi x)\, dx + \int_1^2 (5 - x) \cos(\pi x)\, dx =$$

integrando per parti

$$= \left[\frac{1}{\pi}(2x-3)\sin(\pi x)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx + \left[\frac{1}{\pi}(5-x)\sin(\pi x)\right]_1^2 + \frac{1}{\pi}\int_1^2 \sin(\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_1^2 = -\frac{6}{\pi^2},$$

$$b_1 = \int_0^2 f(x)\sin(\pi x)\,dx = \int_0^1 (2x-3)\sin(\pi x)\,dx + \int_1^2 (5-x)\sin(\pi x)\,dx =$$

integrando per parti

$$= \left[-\frac{1}{\pi}(2x-3)\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)\,dx + \left[-\frac{1}{\pi}(5-x)\cos(\pi x)\right]_1^2 - \frac{1}{\pi}\int_1^2 \cos(\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^1 - \frac{7}{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_1^2 = -\frac{11}{\pi}.$$

Quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2}\cos(\pi x) - \frac{11}{\pi}\sin(\pi x).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Esercizio 5. La funzione f è periodica di periodo 2 e continua a tratti in $[0,2)$, quindi integrabile in $[0,2)$. Il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = a_0 + a_1\cos(\pi x) + b_1\sin(\pi x),$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx, \qquad a_1 = \int_0^2 f(x)\cos(\pi x)\,dx, \qquad b_1 = \int_0^2 f(x)\sin(\pi x)\,dx.$$

Si ha che

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (1+x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1+x)^2\right]_0^2 = 2,$$

$$a_1 = \int_0^2 f(x)\cos(\pi x)\,dx = \int_0^2 (1+x)\cos(\pi x)\,dx =$$

integrando per parti

$$= \left[\frac{1}{\pi}(1+x)\sin(\pi x)\right]_0^2 - \frac{1}{\pi}\int_0^2 \sin(\pi x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^2 = 0,$$

$$b_1 = \int_0^2 f(x)\sin(\pi x)\,dx = \int_0^2 (1+x)\sin(\pi x)\,dx =$$

integrando per parti

$$= \left[-\frac{1}{\pi}(1+x)\cos(\pi x) \right]_0^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^2 \cos(\pi x)\, dx = -\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x) \right]_0^2 = -\frac{2}{\pi}.$$

Quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = 2 - \frac{2}{\pi}\sin(\pi x).$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.

Esercizio 6. La funzione g è continua a tratti in $[-\pi, \pi)$ e quindi lo è anche f. Di conseguenza f è integrabile in $[-\pi, \pi)$. Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\pi}^{0} 1\, dx + \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\, dx = \pi + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi,$$

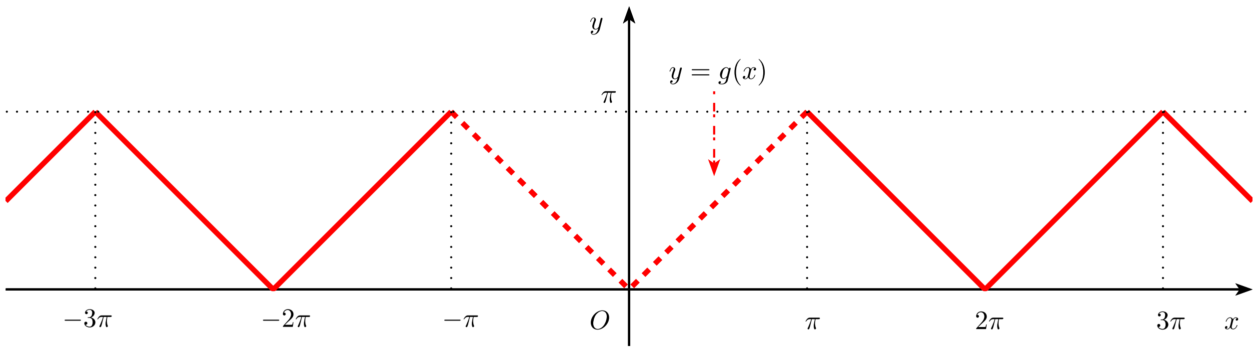
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\, dx + \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{x}{\pi}}\, dx \right) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{5}{6}.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx - 2a_0^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2}\pi \right) - 2\left(\frac{5}{6} \right)^2 = \frac{1}{9}.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{B}}$.

Esercizio 7. La funzione f è periodica di periodo 2π ed è continua su $\mathbb{R}$, quindi integrabile in $[-\pi, \pi]$. Per il Teorema di convergenza quadratica la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f.



Inoltre f è derivabile in ogni $x \neq k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, e ammette derivate laterali distinte in ogni $k\pi$. Infatti, posto $x_k = k\pi$, si ha che

$$k \text{ pari} \implies D^- f(x_k) = \lim_{x \to x_k^-} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} = -1, \quad D^+ f(x_k) = \lim_{x \to x_k^+} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} = 1;$$

$$k \text{ dispari} \implies D^- f(x_k) = \lim_{x \to x_k^-} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} = 1, \; D^+ f(x_k) = \lim_{x \to x_k^+} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} = -1.$$

Ne segue che in ogni $x \in \mathbb{R}$ sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di convergenza puntuale della serie di Fourier, ed essendo f continua su $\mathbb{R}$, si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f in x converge a $f(x)$.

Scriviamo ora la serie di Fourier di f. Essendo f periodica di periodo 2π e pari, la serie di Fourier di f è della forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2}$$

e per ogni $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx =$$

integrando per parti

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} x \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx \right) = -\frac{2}{n\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} [\cos(n\pi) - 1] =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2m, \\ -\frac{4}{(2m+1)^2\pi} & \text{se } n = 2m+1, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x].$$

Poiché la serie di Fourier di f converge puntualmente a f su $\mathbb{R}$ possiamo concludere che

$$\forall x \in \mathbb{R}: \qquad f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x].$$

In particolare in $x = 0$ si ha che la somma della serie di Fourier è

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esercizio 8. La funzione g è continua in $[-\pi, \pi]$. Quindi la funzione f, che è periodica di periodo 2π, è anch'essa continua in $[-\pi, \pi]$, e quindi è integrabile in $[-\pi, \pi]$.

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{0} x^4 \, dx + \int_{0}^{\pi} \pi^3 x \, dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-\pi}^{0} + \pi^3 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\pi} = \frac{7}{10}\pi^5,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} x^2 \, dx + \int_{0}^{\pi} \pi^{3/2} \sqrt{x} \, dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{0} + \pi^{3/2} \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{0}^{\pi} \right) = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - 2a_0^2 = \frac{7}{10}\pi^4 - \frac{1}{2}\pi^4 = \frac{1}{5}\pi^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{E}}$.

Esercizio 9. La funzione f è periodica di periodo 2π e continua in $[-\pi,\pi]$, quindi integrabile in $[-\pi,\pi]$. Inoltre, essendo g pari, anche f è pari e quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = a_0 + a_1 \cos x,$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx.$$

Per la “parità” di f si ha che

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{2}{\pi}(x-\pi)^2\,dx = \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{3}(x-\pi)^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{2}{\pi}(x-\pi)^2\,\cos x\,dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\,\cos x\,dx =$$

integrando per parti

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\left[(x-\pi)^2\sin x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin x\,dx\right) =$$

integrando nuovamente per parti

$$= -\frac{8}{\pi^2}\left(\left[-(x-\pi)\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right) = -\frac{8}{\pi^2}\left(-\pi + \left[\sin x\right]_0^{\pi}\right) = \frac{8}{\pi}.$$

Quindi il polinomio trigonometrico di grado 1 associato a f è

$$P_1(x) = \frac{2}{3}\pi + \frac{8}{\pi}\cos x.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{C}}$.

Esercizio 10.

Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx - 2a_0^2.$$

Si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(3x^2-\pi x\right)^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(9x^4 - 6\pi x^3 + \pi^2x^2\right)\,dx = \left[\frac{9}{5}x^5 - \frac{3}{2}\pi x^4 + \frac{1}{3}\pi^2x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{64}{15}\pi^5,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(3x^2 - \pi x\right)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[x^3 - \frac{1}{2}\pi x^2\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi^2.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx - 2a_0^2 = \frac{64}{15}\pi^4 - 2\pi^4 = \frac{34}{15}\,\pi^4.$$

La risposta corretta è $\boxed{\text{D}}$.