

Esercizi sugli integrali di superficie e di flusso

Esercizio 1. Calcolare

- 1) $\int_{\Sigma} \frac{1}{z^4} d\sigma, \quad \Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 1 \leq z \leq 2 \right\}.$
 - 2) $\int_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} d\sigma, \quad \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \log(x^2 + y^2), \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}.$
 - 3) $\int_{\Sigma} \frac{z - 5}{\sqrt{1 + 9 \sin^2 x + 16 \cos^2 y}} d\sigma, \quad \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5 + 3 \cos x + 4 \sin y, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}.$
 - 4) l'area della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$
 - 5) $\int_{\Sigma} \frac{z - 8xy}{\sqrt{72(x + y)^{10} + 1}} d\sigma, \quad \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x + y)^6, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -x \leq y \leq 0\}.$
 - 6) $\int_{\Sigma} xy(z - 3) d\sigma, \quad \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 + \sqrt{49 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$
-

Esercizio 2. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (-3x, -3y, 2\sqrt{x^2 + y^2} - z)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 9\}$, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z .

Esercizio 3. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}x, \frac{9}{2}y, z + 9\right)$ attraverso la superficie $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 9, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0\right\}$, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Esercizio 4. Calcolare il flusso entrante del campo vettoriale $F(x, y, z) = (4e^x, 2y^3z, -3y^2z^2)$ dal bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 4 - y^2 - z^2\}$.

Esercizio 5. Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{3z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, -\frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \quad y \geq 2\}.$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

1) La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, dove $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e, essendo $1 \leq z = g(x, y) \leq 2$, si ha che $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = \left(x, y, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Posto $f(x, y, z) = \frac{1}{z^4}$, per definizione

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{z^4} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, 1 \right)$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \frac{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2}}{x^2 + y^2}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f\left(x, y, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = (x^2 + y^2)^2,$$

si ha che

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K (x^2 + y^2)^2 \cdot \frac{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2}}{x^2 + y^2} dx dy = \int_K (x^2 + y^2) \sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2} dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine

$$= \int_{K'} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^4} d\rho d\vartheta =$$

dove $K' = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0, 2\pi]$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \rho^3 (1 + \rho^4)^{1/2} d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{6} (1 + \rho^4)^{3/2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{3} \left(2\sqrt{2} - \frac{17}{64}\sqrt{17} \right).$$

2) La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, dove $g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ e $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$.

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, \log(x^2 + y^2)).$$

Posto $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}}$, per definizione

$$\int_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-\frac{2x}{x^2 + y^2}, -\frac{2y}{x^2 + y^2}, 1 \right)$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{\frac{4 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f(x, y, \log(x^2 + y^2)) = \frac{\log(x^2 + y^2)}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}},$$

si ha che

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K \frac{\log(x^2 + y^2)}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} \cdot \sqrt{\frac{4 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \int_K \frac{\log(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine

$$= \int_{K'} \log \rho^2 d\rho d\vartheta =$$

dove $K' = [1, e] \times [0, 2\pi]$

$$= 4\pi \int_1^e \log \rho d\rho =$$

integrando per parti

$$= 4\pi \left(\left[\rho \log \rho \right]_1^e - \int_1^e d\rho \right) = 4\pi.$$

- 3) La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, dove $g(x, y) = 5 + 3 \cos x + 4 \sin y$ e $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 5 + 3 \cos x + 4 \sin y).$$

Posto $f(x, y, z) = \frac{z - 5}{\sqrt{1 + 9 \sin^2 x + 16 \cos^2 y}}$, per definizione

$$\int_{\Sigma} \frac{z - 5}{\sqrt{1 + 9 \sin^2 x + 16 \cos^2 y}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (3 \sin x, -4 \cos y, 1)$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{1 + 9 \sin^2 x + 16 \cos^2 y}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x, y)) = f(x, y, 5 + 3 \cos x + 4 \sin y) = \frac{3 \cos x + 4 \sin y}{\sqrt{1 + 9 \sin^2 x + 16 \cos^2 y}},$$

si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} f d\sigma &= \int_K \frac{3 \cos x + 4 \sin y}{\sqrt{1 + 9 \sin^2 x + 16 \cos^2 y}} \cdot \sqrt{1 + 9 \sin^2 x + 16 \cos^2 y} dx dy = \int_K (3 \cos x + 4 \sin y) dx dy = \\ &= 3 \int_K \cos x dx + 4 \int_K \sin y dy = \frac{3}{2} \pi \int_0^{\pi} \cos x dx + 4 \pi \int_0^{\pi/2} \sin y dy = \\ &= \frac{3}{2} \pi \left[\sin x \right]_0^{\pi} + 4 \pi \left[-\cos y \right]_0^{\pi/2} = 4 \pi. \end{aligned}$$

- 4) La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, dove $g(x, y) = xy$ e $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, xy).$$

L'area di Σ è per definizione

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$.

Si ha che

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-y, -x, 1)$$

e quindi

$$\|N(x, y)\| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine

$$= \int_{K'} \rho \sqrt{1 + \rho^2} \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [0, 1] \times [0, \pi/2]$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho (1 + \rho^2)^{1/2} \, d\rho = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{3} (1 + \rho^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (2\sqrt{2} - 1).$$

5) La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $z = (x + y)^6$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, (x + y)^6)$.

Posto $f(x, y, z) = \frac{z - 8xy}{\sqrt{72(x + y)^{10} + 1}}$, si ha che

$$\int_{\Sigma} \frac{z - 8xy}{\sqrt{72(x + y)^{10} + 1}} \, d\sigma = \int_{\Sigma} f \, d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ definito da

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (-6(x + y)^5, -6(x + y)^5, 1).$$

Quindi $\|N(x, y)\| = \sqrt{72(x + y)^{10} + 1}$. Ne segue che

$$\int_{\Sigma} \frac{z - 8xy}{\sqrt{72(x + y)^{10} + 1}} \, d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| \, dx \, dy = \int_K [(x + y)^6 - 8xy] \, dx \, dy =$$

essendo K un insieme y -semplice si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left(\int_{-x}^0 [(x+y)^6 - 8xy] dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{7}(x+y)^7 - 4xy^2 \right]_{-x}^0 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{7}x^7 + 4x^3 \right) dx = \\ &= \left[\frac{1}{56}x^8 + x^4 \right]_0^1 = \frac{57}{56}. \end{aligned}$$

6) La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 3 + \sqrt{49 - x^2 - y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 3 + \sqrt{49 - x^2 - y^2})$.

Posto $f(x, y, z) = xy(z - 3)$, per definizione si ha che

$$\int_{\Sigma} xy(z - 3) d\sigma = \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale a Σ

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Quindi

$$\|N(x, y)\| = \frac{7}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} xy(z-3) d\sigma &= \int_K f(\sigma(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy = \int_K f(x, y, 3 + \sqrt{49 - x^2 - y^2}) \frac{7}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}} dx dy = \\ &= 7 \int_K xy dx dy = \end{aligned}$$

passando in coordinate polari

$$= 7 \int_{K'} \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta d\rho d\vartheta =$$

essendo $K' = [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ si ottiene

$$= 7 \left(\int_0^2 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = 7 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 14.$$

Esercizio 2. La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, 2\sqrt{x^2 + y^2})$.

Il flusso di F attraverso Σ , orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z è

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z , cioè con $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-\frac{2x}{x^2 + y^2}, -\frac{2y}{x^2 + y^2}, 1 \right).$$

Poiché

$$N_{\sigma}(x, y) \cdot \mathbf{k} = \left(-\frac{2x}{x^2 + y^2}, -\frac{2y}{x^2 + y^2}, 1 \right) \cdot (0, 0, 1) = 1 > 0,$$

questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Quindi un vettore che forma un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z è $N(x, y) = -N_{\sigma}(x, y) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$.

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F\left(x, y, 2\sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) = \\ &= (-3x, -3y, 0) \cdot \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) = -6\sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = -6 \int_K \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= -6 \int_{K'} \rho^2 \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K' = [0, 3] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= -12\pi \int_0^3 \rho^2 \, d\rho = -12\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^3 = -108\pi.$$

Esercizio 3. La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 4x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 9$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = \left(x, y, 4x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 9\right).$$

Il flusso di F attraverso Σ , orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z è

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z , cioè con $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) = \left(-8x, \frac{1}{2}y, 1\right).$$

Poiché

$$N_{\sigma}(x, y) \cdot \mathbf{k} = \left(-8x, \frac{1}{2}y, 1\right) \cdot (0, 0, 1) = 1 > 0,$$

questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Quindi $N(x, y) = N_{\sigma}(x, y) = \left(-8x, \frac{1}{2}y, 1\right)$.

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= F\left(x, y, 4x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 9\right) \cdot \left(-8x, \frac{1}{2}y, 1\right) = \\ &= \left(\frac{1}{4}x, \frac{9}{2}y, 4x^2 - \frac{1}{4}y^2\right) \cdot \left(-8x, \frac{1}{2}y, 1\right) = 2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K 2(x^2 + y^2) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= 2 \int_{K'} \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta =$$

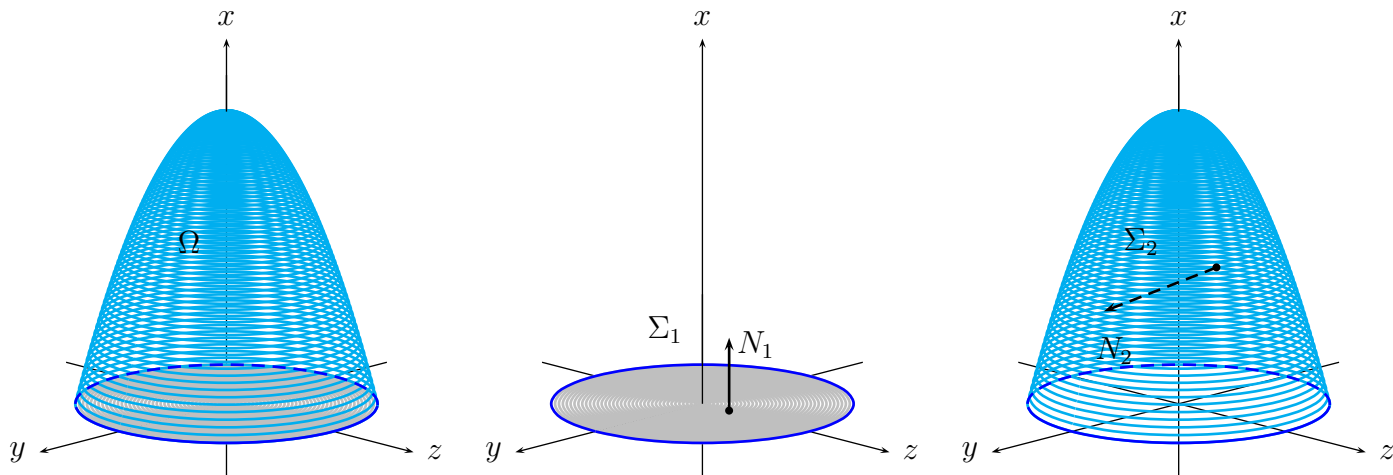
essendo $K' = [0, 2] \times [0, \pi]$ si ottiene

$$= 2\pi \int_0^2 \rho^3 \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 = 8\pi.$$

Esercizio 4. Si ha che $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y^2 + z^2 \leq 4\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 4 - y^2 - z^2, y^2 + z^2 \leq 4\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma.$$

Calcoliamo $\int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma$.

La superficie Σ_1 è il grafico della funzione $g_1 : K_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1(y, z) = 0$, dove

$$K_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Quindi $\Sigma_1 = \sigma_1(K_1)$, dove $\sigma_1 : K_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma_1(y, z) = (g_1(y, z), y, z) = (0, y, z).$$

Il flusso di F attraverso Σ_1 , orientata in modo che il vettore normale a Σ_1 sia entrante in Ω è

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_1} F(\sigma_1(y, z)) \cdot N_1(y, z) \, dy \, dz,$$

dove $N_1(y, z)$ è un vettore normale a Σ_1 entrante in Ω .

Un vettore normale a Σ_1 è

$$N_{\sigma_1}(y, z) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(y, z) \wedge \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(y, z) = \left(1, -\frac{\partial g_1}{\partial y}(y, z), -\frac{\partial g_1}{\partial z}(y, z)\right) = (1, 0, 0).$$

Questo vettore è entrante in Ω . Quindi $N_1(y, z) = N_{\sigma_1}(y, z) = (1, 0, 0)$.

Si ha che

$$F(\sigma_1(y, z)) \cdot N_1(y, z) = F(0, y, z) \cdot (1, 0, 0) = (4, 2y^3z, -3y^2z^2) \cdot (1, 0, 0) = 4.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_1} F(\sigma_1(y, z)) \cdot N_1(y, z) \, dy \, dz = 4 \int_{K_1} dy \, dz = 4m(K_1) = 16\pi.$$

Calcoliamo $\int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma$.

La superficie Σ_2 è il grafico della funzione $g_2 : K_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2(y, z) = 4 - y^2 - z^2$, dove

$$K_2 = K_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Quindi $\Sigma_2 = \sigma_2(K_2)$, dove $\sigma_2 : K_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma_2(y, z) = (g_2(y, z), y, z) = (4 - y^2 - z^2, y, z).$$

Il flusso di F attraverso Σ_2 , orientata in modo che il vettore normale a Σ_2 sia entrante in Ω è

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_2} F(\sigma_2(y, z)) \cdot N_2(y, z) \, dy \, dz,$$

dove $N_2(y, z)$ è un vettore normale a Σ_2 entrante in Ω .

Un vettore normale a Σ_2 è

$$N_{\sigma_2}(y, z) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(y, z) \wedge \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(y, z) = \left(1, -\frac{\partial g_2}{\partial y}(y, z), -\frac{\partial g_2}{\partial z}(y, z)\right) = (1, 2y, 2z).$$

Questo vettore è uscente da Ω . Quindi un vettore normale entrante è

$$N_2(y, z) = -N_{\sigma_2}(y, z) = (-1, -2y, -2z).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma_2(y, z)) \cdot N_2(y, z) &= F(4 - y^2 - z^2, y, z) \cdot (-1, -2y, -2z) = \\ &= \left(4e^{4-y^2-z^2}, 2y^3z, -3y^2z^2\right) \cdot (-1, -2y, -2z) = 6y^2z^3 - 4y^4z - 4e^{4-y^2-z^2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma &= \int_{K_2} F(\sigma_2(y, z)) \cdot N_2(y, z) \, dy \, dz = \int_{K_2} (6y^2 z^3 - 4y^4 z - 4e^{4-y^2-z^2}) \, dy \, dz = \\ &= \underbrace{\int_{K_2} (6y^2 z^3 - 4y^4 z) \, dy \, dz}_{=0} - 4 \int_{K_2} e^{4-y^2-z^2} \, dy \, dz = \end{aligned}$$

osservando che il primo integrale è nullo perché la funzione integranda è dispari rispetto a z e K_2 è simmetrico rispetto all'asse y , si ottiene

$$= -4 \int_{K_2} e^{4-y^2-z^2} \, dy \, dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine nel piano yz si ha

$$= -4 \int_{K'_2} \rho e^{4-\rho^2} \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K'_2 = [0, 2] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= -4\pi \int_0^2 \rho e^{4-\rho^2} \, d\rho = -8\pi \left[-\frac{1}{2} e^{4-\rho^2} \right]_0^2 = 4\pi (1 - e^4).$$

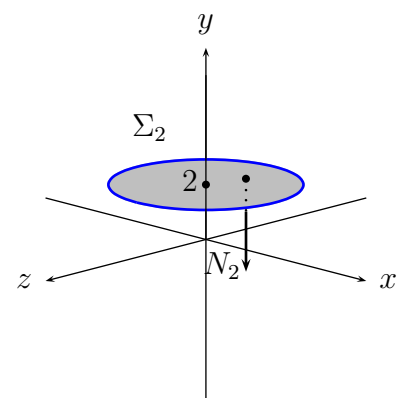
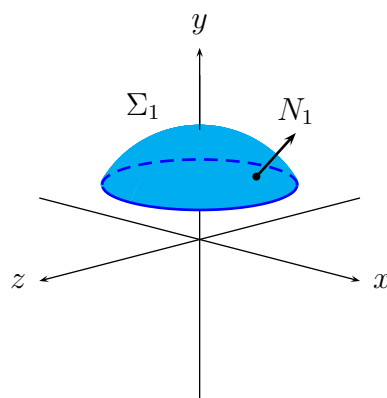
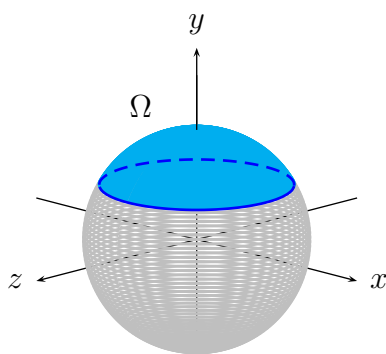
In conclusione

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma = 16\pi + 4\pi (1 - e^4) = 20\pi - 4\pi e^4.$$

Esercizio 5. Si ha che $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 16, \, y \geq 2\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2, \, x^2 + z^2 \leq 12\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma.$$

Calcoliamo $\int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma$.

Osserviamo che

$$\Sigma_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}, \quad x^2 + z^2 \leq 12 \right\}.$$

La superficie Σ_1 è il grafico della funzione $g_1 : K_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1(x, z) = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$, dove

$$K_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 12\}.$$

Quindi $\Sigma_1 = \sigma_1(K_1)$, dove $\sigma_1 : K_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma_1(y, z) = (x, g_1(x, z), z) = \left(x, \sqrt{16 - x^2 - z^2}, z \right).$$

Il flusso di F attraverso Σ_1 , orientata in modo che il vettore normale a Σ_1 sia uscente da Ω è

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_1} F(\sigma_1(x, z)) \cdot N_1(x, z) \, dx \, dz,$$

dove $N_1(x, z)$ è un vettore normale a Σ_1 uscente da Ω .

Un vettore normale a Σ_1 è

$$N_{\sigma_1}(x, z) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, z) \wedge \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(x, z) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, z), -1, \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, z) \right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - z^2}}, -1, -\frac{z}{\sqrt{16 - x^2 - z^2}} \right).$$

Questo vettore è entrante in Ω . Quindi un vettore uscente da Ω è

$$N_1(x, z) = -N_{\sigma_1}(x, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - z^2}}, 1, \frac{z}{\sqrt{16 - x^2 - z^2}} \right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma_1(x, z)) \cdot N_1(x, z) &= F\left(x, \sqrt{16 - x^2 - z^2}, z\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - z^2}}, 1, \frac{z}{\sqrt{16 - x^2 - z^2}}\right) = \\ &= \left(-\frac{3}{4}z, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}x\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - z^2}}, 1, \frac{z}{\sqrt{16 - x^2 - z^2}}\right) = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_1} F(\sigma_1(x, z)) \cdot N_1(x, z) \, dx \, dz = -\frac{3}{4} \int_{K_1} dx \, dz = -9\pi.$$

Calcoliamo $\int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma$.

La superficie Σ_2 è il grafico della funzione $g_2 : K_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2(x, z) = 2$, dove

$$K_2 = K_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 12\}.$$

Quindi $\Sigma_2 = \sigma_2(K_2)$, dove $\sigma_2 : K_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma_2(x, z) = (x, g_2(x, z), z) = (x, 2, z).$$

Il flusso di F attraverso Σ_2 , orientata in modo che il vettore normale a Σ_2 sia uscente da Ω è

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_2} F(\sigma_2(x, z)) \cdot N_2(x, z) \, dx \, dz,$$

dove $N_2(x, z)$ è un vettore normale a Σ_2 uscente da Ω .

Un vettore normale a Σ_2 è

$$N_{\sigma_2}(x, z) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x, z) \wedge \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(x, z) = \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}(x, z), -1, \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, z) \right) = (0, -1, 0).$$

Questo vettore è uscente da Ω . Quindi $N_2(x, z) = N_{\sigma_2}(x, z) = (0, -1, 0)$.

Si ha che

$$\begin{aligned} F(\sigma_2(x, z)) \cdot N_2(x, z) &= F(x, 2, z) \cdot (0, -1, 0) = \\ &= \left(-\frac{3z}{\sqrt{x^2 + z^2 + 4}}, -\frac{3}{\sqrt{x^2 + z^2 + 4}}, \frac{3x}{\sqrt{x^2 + z^2 + 4}} \right) \cdot (0, -1, 0) = \frac{3}{\sqrt{x^2 + z^2 + 4}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_2} F(\sigma_2(x, z)) \cdot N_2(x, z) \, dx \, dz = \int_{K_2} \frac{3}{\sqrt{x^2 + z^2 + 4}} \, dx \, dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine nel piano xz si ha

$$= 3 \int_{K'_2} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 4}} \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K'_2 = [0, \sqrt{12}] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 6\pi \int_0^{\sqrt{12}} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 4}} \, d\rho = 6\pi \left[\sqrt{\rho^2 + 4} \right]_0^{\sqrt{12}} = 12\pi.$$

In conclusione

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma = -9\pi + 12\pi = 3\pi.$$