

Esercizi sugli integrali curvilinei

Esercizio 1. Sia $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva parametrica $\gamma(t) = (t^2, t^3 + 1)$.

Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \frac{2x - y}{\sqrt{4 + 9x}} ds$.

Esercizio 2. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva parametrica $\gamma(t) = (1 - t^3, 2t^2, 4t^5)$.

Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \frac{2xy + z}{\sqrt{400(1 - x)^2 + \frac{9}{2}y + 16}} ds$.

Esercizio 3. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(-4y - \frac{2}{x}, \frac{4}{y + 1} + 10x + \frac{5}{y} \right)$$

lungo la curva parametrica $\gamma : [0, \log(11)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (e^{5t}, e^{2t})$.

Esercizio 4. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (6x, 6x + 7y + 7z, 21 - 6x - 7y - 7z)$$

lungo la curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (-3t, t, t + 3)$.

Esercizio 5. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$$

lungo la curva parametrica che parametrizza il bordo del semicerchio di centro l'origine $O(0, 0)$ e raggio 2 nel semipiano $x \geq 0$ inducendo su di esso un verso di percorrenza antiorario.

Esercizio 6. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y, z) = (3z - 3, 2y + 2, 4 - 2x)$ lungo la curva parametrica $\gamma : [0, \log 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (t^2 + 2, e^t, t^3 + 1)$ vale

☐ A 8. ☐ B 5. ☐ C 9. ☐ D 12. ☐ E 0.

Esercizio 7. Si considerino il campo vettoriale $F(x, y) = \left(\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{30}, x^2y\right)$ e l'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -x - 1 \leq y \leq (x + 1)^2\}.$$

L'integrale di linea di F lungo la parte del bordo di Ω appartenente al I e II quadrante, percorsa in senso antiorario, vale

☐ A $\frac{1}{40}$.

☐ B 0 .

☐ C $\frac{1}{20}$.

☐ D $\frac{13}{120}$.

☐ E $\frac{7}{40}$.

Esercizio 8. L'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = (x|4 - x^2 - y^2|, 3 - x^2y)$ lungo il segmento di estremi $O(0, 0)$ e $P(2, 2)$ percorso da O a P vale

☐ A 12 .

☐ B 6 .

☐ C 0 .

☐ D 3 .

☐ E 2 .

Esercizio 9. Siano $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$F(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1, x) & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ (2(x^2 + y^2 - 1), x) & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

L'integrale di linea di F lungo il bordo di Ω percorso in senso antiorario vale

☐ A $2\pi - \frac{32}{3}$.

☐ B $2\pi - \frac{16}{3}$.

☐ C $2\pi - \frac{64}{3}$.

☐ D $2\pi - 20$.

☐ E $2\pi - 24$.

Esercizio 10. Calcolare la lunghezza della cardioide definita dalla curva parametrica $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r[\sin(2t) - 2\sin t], r[2\cos t - \cos(2t)])$, dove $r > 0$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Posto $f(x, y) = \frac{2x - y}{\sqrt{4 + 9x}}$, per definizione si ha che

$$\int_{\gamma} \frac{2x - y}{\sqrt{4 + 9x}} ds = \int_{\gamma} f ds = \int_0^2 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Poiché

$$f(\gamma(t)) = f(t^2, t^3 + 1) = \frac{2t^2 - t^3 - 1}{\sqrt{4 + 9t^2}}, \quad \gamma'(t) = (2t, 3t^2) \implies \|\gamma'(t)\| = t\sqrt{4 + 9t^2},$$

si ha che

$$\int_{\gamma} \frac{2x - y}{\sqrt{4 + 9x}} ds = \int_0^2 (2t^3 - t^4 - t) dt = \left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 = -\frac{2}{5}.$$

Esercizio 2. Posto $f(x, y, z) = \frac{2xy + z}{\sqrt{400(1 - x)^2 + \frac{9}{2}y + 16}}$, per definizione si ha che

$$\int_{\gamma} \frac{2xy + z}{\sqrt{400(1 - x)^2 + \frac{9}{2}y + 16}} ds = \int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Poiché

$$f(\gamma(t)) = f(1 - t^3, 2t^2, 4t^5) = \frac{4t^2}{\sqrt{400t^6 + 9t^2 + 16}},$$

$$\gamma'(t) = (1 - t^3, 2t^2, 4t^5) \implies \|\gamma'(t)\| = t\sqrt{400t^6 + 9t^2 + 16},$$

si ha che

$$\int_{\gamma} \frac{2xy + z}{\sqrt{400(1 - x)^2 + \frac{9}{2}y + 16}} ds = \int_0^1 4t^3 dt = [t^4]_0^1 = 1.$$

Esercizio 3. Per definizione

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{\log(11)} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(e^{5t}, e^{2t}) \cdot (5e^{5t}, 2e^{2t}) = \left(-4e^{2t} - 2e^{-5t}, \frac{4}{1 + e^{2t}} + 10e^{5t} + 5e^{-2t} \right) \cdot (5e^{5t}, 2e^{2t}) = \frac{8e^2}{1 + e^{2t}},$$

si ottiene

$$= \int_0^{\log(11)} \frac{8e^2}{1 + e^{2t}} dt = [4 \log(1 + e^{2t})]_0^{\log(11)} = 4 \log(61).$$

Esercizio 4. Per definizione

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(-3t, t, t+3) \cdot (-3, 1, 1) = (-18t, 21-4t, 4t) \cdot (-3, 1, 1) = 54t + 21,$$

si ottiene

$$= \int_0^1 (54t + 21) dt = [27t^2 + 21t]_0^1 = 48.$$

Esercizio 5.

La curva γ che parametrizza il bordo del semicerchio

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

inducendo un verso di percorrenza antiorario è regolare a tratti.

Dette γ_1 e γ_2 le curve che parametrizzano rispettivamente la semicirconferenza di centro $O(0, 0)$ e raggio 2 da C a B e il segmento BC , con $B(0, 2)$ e $C(0, -2)$, si ha che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP.$$

Si ha che:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma_1(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t), \\ \gamma_2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma_2(t) &= (0, 2 - 4t). \end{aligned}$$

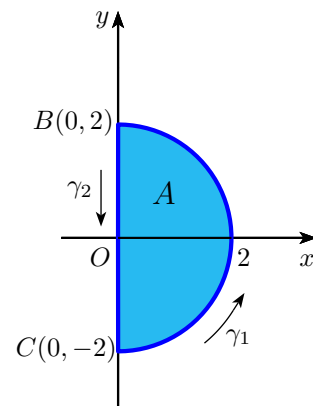
Le curve γ_1 e γ_2 sono regolari. Infatti, sono derivabili con derivata continua $\gamma_1'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \neq (0, 0)$ per ogni $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\gamma_2'(t) = (0, -4)$.

Inoltre per ogni $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si ha

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) &= F(2 \cos t, 2 \sin t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) = \\ &= (4 \cos t \sin t, 4) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) = 8 \cos t - 8 \cos t \sin^2 t, \end{aligned}$$

e per ogni $t \in [0, 1]$ si ha

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F(0, 2 - 4t) \cdot (0, -4) = (0, (2 - 4t)^2) \cdot (0, -4) = -4(2 - 4t)^2.$$



Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dP &= \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^1 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8 \cos t - 8 \cos t \sin^2 t) dt - 4 \int_0^1 (4t - 2)^2 dt = \left[8 \sin t - \frac{8}{3} \sin^3 t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 4 \left[\frac{1}{12} (4t - 2)^3 \right]_0^1 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Per definizione l'integrale di linea di F lungo la curva γ è dato da

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{\log 2} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

essendo

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(t^2 + 2, e^t, t^3 + 1) \cdot (2t, e^t, 3t^2) = (3t^3, 2e^t + 2, -2t^2) \cdot (2t, e^t, 3t^2) = 2e^{2t} + 2e^t,$$

si ottiene

$$= \int_0^{\log 2} (2e^{2t} + 2e^t) dt = \left[e^{2t} + 2e^t \right]_0^{\log 2} = 5.$$

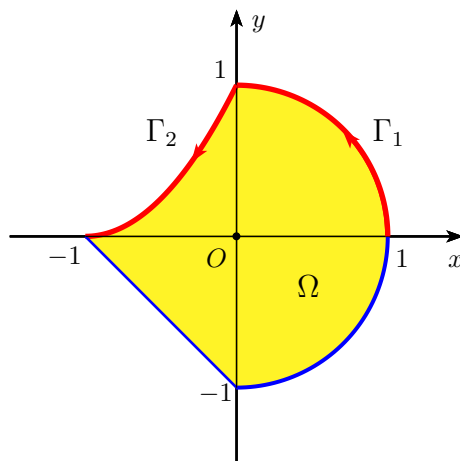
La risposta corretta è B.

Esercizio 7. Si osserva che la parte di $\partial\Omega$ compresa nel I e II quadrante è l'unione delle curve Γ_1 e Γ_2 ,

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, y = (x + 1)^2\},$$

orientate in modo che il bordo di Ω sia complessivamente orientato in senso antiorario.



Quindi, posto $\Gamma = \partial\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, si ha che

$$\int_{\Gamma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP.$$

Una parametrizzazione di Γ_1 in senso antiorario è $\gamma_1 : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$.

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) &= F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \left(\frac{1}{2} \cos t \sin^2 t - \frac{1}{30}, \cos^2 t \sin t \right) \cdot (-\sin t, \cos t) = \\ &= \frac{1}{30} \sin t + \cos^3 t \sin t - \frac{1}{2} \cos t \sin^3 t \end{aligned}$$

si ottiene

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{30} \sin t + \cos^3 t \sin t - \frac{1}{2} \cos t \sin^3 t \right) dt = \left[-\frac{1}{30} \cos t - \frac{1}{4} \cos^4 t - \frac{1}{8} \sin^4 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{19}{120}.$$

Una parametrizzazione di Γ_2 in senso antiorario è $\gamma_2 : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma_2(t) = (-1 - t, t^2)$.

Quindi

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-1}^0 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt =$$

essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(-1 - t, t^2) \cdot (-1, 2t) = \left(-\frac{1}{2}(t^4 + t^5) - \frac{1}{30}, t^2(1 + t)^2 \right) \cdot (-1, 2t) = \\ &= \frac{1}{2}(t^4 + t^5) + \frac{1}{30} + 2t^3(1 + t)^2 = \frac{5}{2}t^5 + \frac{9}{2}t^4 + 2t^3 + \frac{1}{30} \end{aligned}$$

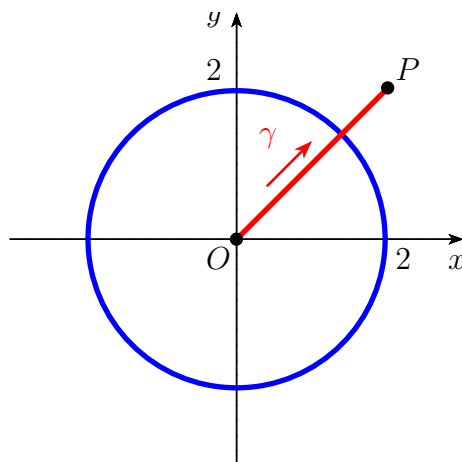
si ottiene

$$= \int_{-1}^0 \left(\frac{5}{2}t^5 + \frac{9}{2}t^4 + 2t^3 + \frac{1}{30} \right) dt = \left[\frac{5}{12}t^6 + \frac{9}{10}t^5 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{30}t \right]_{-1}^0 = -\frac{5}{12} + \frac{9}{10} - \frac{1}{2} + \frac{1}{30} = \frac{1}{60}.$$

Quindi

$$\int_{\Gamma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \frac{19}{120} + \frac{1}{60} = \frac{7}{40}.$$

La risposta corretta è E.

Esercizio 8.

Si ha che

$$F(x, y) = (x |4 - x^2 - y^2|, 3 - x^2 y) = \begin{cases} F_1(x, y) = (x(4 - x^2 - y^2), 3 - x^2 y) & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \\ F_2(x, y) = (x(x^2 + y^2 - 4), 3 - x^2 y) & \text{se } x^2 + y^2 > 4. \end{cases}$$

Il segmento OP non è tutto contenuto nel cerchio $\mathcal{C}$ di centro O e raggio 2.

La curva parametrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (2t, 2t)$ è una parametrizzazione del segmento OP da O a P .

Si ha che $\gamma(t) \in \mathcal{C}$ se e solo se $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ne segue che

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

essendo $\gamma'(t) = (2, 2)$ per ogni $t \in [0, 1]$,

$$\forall t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] : \quad F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (2t(4 - 8t^2), 3 - 8t^3) \cdot (2, 2) = 16t - 48t^3 + 6,$$

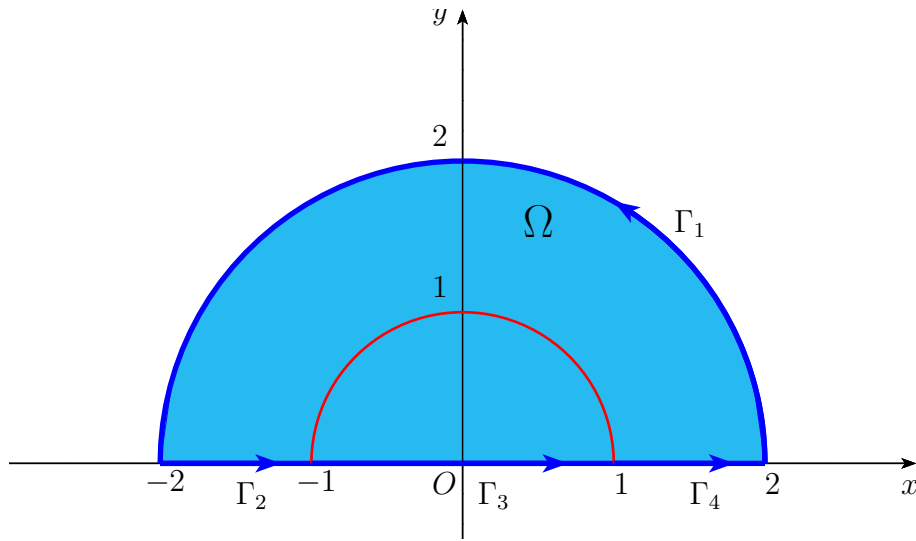
$$\forall t \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] : \quad F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (2t(8t^2 - 4), 3 - 8t^3) \cdot (2, 2) = 16t^3 - 16t + 6,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (16t - 48t^3 + 6) dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (16t^3 - 16t + 6) dt = \\ &= \left[8t^2 - 12t^4 + 6t\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[4t^4 - 8t^2 + 6t\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = 6. \end{aligned}$$

La risposta corretta è B.

Esercizio 9. Si osserva che $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (vedi figura).



Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP + \int_{\Gamma_3} F \cdot dP + \int_{\Gamma_4} F \cdot dP.$$

Si ha che

$$\Gamma_1 = \text{im}(\gamma_1), \quad \gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t),$$

$$\Gamma_2 = \text{im}(\gamma_2), \quad \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (-2 + t, 0),$$

$$\Gamma_3 = \text{im}(\gamma_3), \quad \gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (-1 + 2t, 0),$$

$$\Gamma_4 = \text{im}(\gamma_4), \quad \gamma_4 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_4(t) = (1 + t, 0).$$

Ne segue che

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_0^\pi F(2 \cos t, 2 \sin t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt = \int_0^\pi (6, 2 \cos t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt =$$

$$= \int_0^\pi (-12 \sin t + 4 \cos^2 t) dt = \left[12 \cos t + 2(t + \sin t \cos t) \right]_0^\pi = 2\pi - 24,$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 F(-2 + t, 0) \cdot (1, 0) dt = \int_0^1 (2[(t-2)^2 - 1], t-2) \cdot (1, 0) dt =$$

$$= 2 \int_0^1 [(t-2)^2 - 1] dt = 2 \left[\frac{1}{3}(t-2)^3 - t \right]_0^1 = \frac{8}{3},$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dP = \int_0^1 F(-1 + 2t, 0) \cdot (2, 0) dt = \int_0^1 ((2t-1)^2 - 1, 2t-1) \cdot (2, 0) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 [(2t-1)^2 - 1] dt = 2 \left[\frac{1}{6}(2t-1)^3 - t \right]_0^1 = -\frac{4}{3}, \\
\int_{\Gamma_2} F \cdot dP &= \int_0^1 F(1+t, 0) \cdot (1, 0) dt = \int_0^1 (2[1+t]^2 - 1, 1+t) \cdot (1, 0) dt = \\
&= 2 \int_0^1 [(1+t)^2 - 1] dt = 2 \left[\frac{1}{3}(1+t)^3 - t \right]_0^1 = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Quindi

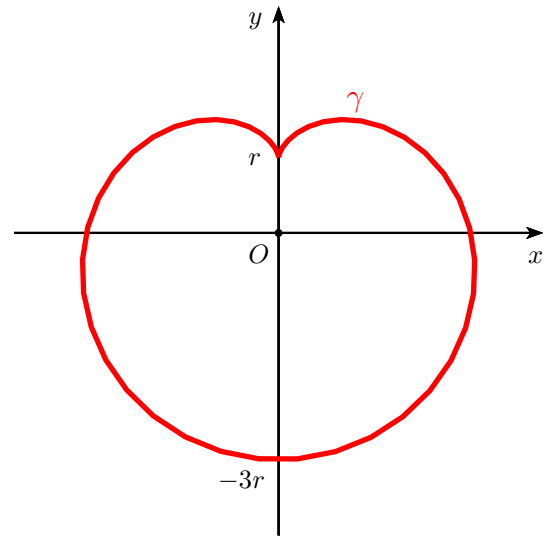
$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP + \int_{\Gamma_3} F \cdot dP + \int_{\Gamma_4} F \cdot dP = 2\pi - 20.$$

La risposta corretta è D.

Esercizio 10.

Per definizione la lunghezza della cardioide, ovvero della curva γ che la definisce, è

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} 1 ds = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt.$$



Poiché per ogni $t \in [0, 2\pi]$

$$\gamma'(t) = (r[2 \cos(2t) - 2 \cos t], r[-2 \sin t + 2 \sin(2t)]),$$

da cui segue che

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{r^2[2 \cos(2t) - 2 \cos t]^2 + r^2[-2 \sin t + 2 \sin(2t)]^2} = 2\sqrt{2}r \sqrt{1 - \cos t},$$

si ha che

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = 2\sqrt{2}r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt =$$

essendo (per la formula di bisezione) $\sqrt{1 - 2 \cos t} = \sqrt{2} \left| \sin \frac{t}{2} \right|$, si ottiene

$$= 4r \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt =$$

posto $z = t/2$, da cui $dt = 2 dz$, ed essendo $\sin z \geq 0$ per ogni $z \in [0, \pi]$, si giunge a

$$= 8r \int_0^\pi \sin z \, dz = 8r \left[-\cos z \right]_0^\pi = 16r.$$
