Esercizi di calcolo differenziale in più variabili - I parte

Esercizio 1. Calcolare le derivate parziali, il gradiente, il differenziale (se esiste) e la derivata rispetto al vettore indicato nel punto dato, delle seguenti funzioni:

1) $f(x,y) = x^2 + 2xy - xy^2, \quad v = (1,-1), \quad (x_0,y_0) = (1,1).$

2) $f(x,y) = \log\left(x^2 + y^2\right), \quad v = (1,1), \quad (x_0,y_0) = (1,2).$

3) $f(x,y) = \sqrt{y + x^2 - 3}, \quad v = (1,3), \quad (x_0,y_0) = (2,1).$

4) $f(x,y,z) = y\, e^{2x^2} + 3xz^2 + \sin(yz), \quad v = (1,1,0), \quad (x_0,y_0,z_0) = (1,0,1).$

5) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad v = (1,0,1), \quad (x_0,y_0,z_0) = (1,1,1).$

6) $f(x,y,z) = \arctan \dfrac{3xz}{1+y^2}, \quad v = (0,1,1), \quad (x_0,y_0,z_0) = (1,0,0).$

Esercizio 2. Date le seguenti funzioni, esistono nel punto indicato le derivate parziali, la derivata rispetto al vettore indicato e il differenziale?

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4(x-1)\,y^2}{(x-1)^2+y^2} + 8x + 3y & \text{se } (x,y) \neq (1,0) \\ 8 & \text{se } (x,y) = (1,0), \end{cases} \qquad (x_0,y_0) = (1,0), \qquad v = (1,-1).$

2) $f(x,y) = \left|x - y^2\right|, \qquad (x_0,y_0) = (0,0), \qquad v = (2,5).$

3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,(y-2)}{x^2+(y-2)^2} + 3x + 5y + 2 & \text{se } (x,y) \neq (0,2) \\ 7 & \text{se } (x,y) = (0,2), \end{cases} \qquad (x_0,y_0) = (0,2), \qquad v = (2,1).$

4) $f(x,y) = x^2\,|y-1|, \qquad (x_0,y_0) = (0,0), \qquad v = (1,2).$

5) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right) \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} + 18 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 18 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad (x_0,y_0) = (0,0), \qquad v = (1,1).$

6) $f(x,y) = x^2\,|y+2|, \qquad (x_0,y_0) = (0,-2), \qquad v = (2,1).$

Esercizio 3. Calcolare la divergenza dei seguenti campi vettoriali:

1) $F(x,y,z) = \left(2xy^2 + \log\left(1+y^4\right),\ 2yz^2 - y^2z + \sqrt{2+x^2z^2},\ yz^2 + e^{x^2}\right).$

2) $F(x,y,z) = \left(5x^2y + \sin z,\ \ \cos x - 5xy^2,\ \ \log\left(x^2+y^2+z^2\right) + e^{x^2+y^2}\right).$

3) $F(x,y,z) = \left(\dfrac{6x^2}{\sqrt{y^2+z^2}} - 9x^2y,\ 9xy^2 - 4yz,\ 2z^2 + 3x\left(x^2+y^2\right)\right).$

Esercizio 4. Calcolare il rotore dei seguenti campi vettoriali:

1) $F(x,y,z) = \left((3y+11)z - 22y + \sin x^8,\ xz + 18 - \cos y^9,\ 2xy + 11x + \sqrt{1+z^4}\right).$

2) $F(x,y,z) = \left(-\dfrac{6y}{x^2+y^2} - yz,\ \dfrac{6x}{x^2+y^2} + xz,\ z^2 - \log\left(x^2+y^2\right)\right).$

3) $F(x,y,z) = \left(x + z + x^2\log\left(1+z^2\right),\ y + z + z^2\log\left(1+x^2\right),\ z - 9 + y\left(e^{xz} - 1\right)\right).$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

1) Il dominio di f è $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^2$. Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y - y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x - 2xy.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \Big(2x + 2y - y^2, 2x - 2xy\Big).$$

Poiché le derivate parziali esistono e sono continue in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$, per il Teorema del differenziale totale la funzione f è differenziabile in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = (2x + 2y - y^2)\,dx + (2x - 2xy)\,dy.$$

Infine, essendo f differenziabile in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha che la derivata di f in (x_0, y_0) rispetto a v è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = df(x_0,y_0)(v) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot v.$$

Essendo $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e $v = (1, -1)$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot (1,-1) = (3,0) \cdot (1,-1) = 3.$$

2) Il dominio di f è $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Per ogni $(x, y) \in \operatorname{dom}(f)$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right).$$

Poiché le derivate parziali esistono e sono continue in tutti i punti di $\operatorname{dom}(f)$, per il Teorema del differenziale totale la funzione f è differenziabile in ogni $(x, y) \in \operatorname{dom}(f)$ con

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy.$$

Infine, essendo f differenziabile in ogni $(x, y) \in \operatorname{dom}(f)$, si ha che la derivata di f in (x_0, y_0) rispetto a v è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = df(x_0,y_0)(v) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot v.$$

Essendo $(x_0, y_0) = (1, 2)$ e $v = (1, 1)$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot (1,1) = (2/5, 4/5) \cdot (1,1) = 6/5.$$

3) Il dominio di f è $\operatorname{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq 3 - x^2\}$. Per ogni $(x,y) \in \operatorname{dom}(f)$ con $y > 3 - x^2$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{y + x^2 - 3}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y + x^2 - 3}}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{y + x^2 - 3}}, \frac{1}{2\sqrt{y + x^2 - 3}}\right).$$

Poiché le derivate parziali esistono e sono continue in tutti i punti $(x,y) \in \operatorname{dom}(f)$ con $y > 3 - x^2$, per il Teorema del differenziale totale la funzione f è differenziabile in ogni $(x,y) \in \operatorname{dom}(f)$ con $y > 3 - x^2$ con

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dy = \frac{x}{\sqrt{y + x^2 - 3}}\, dx + \frac{1}{2\sqrt{y + x^2 - 3}}\, dy.$$

Infine, essendo f differenziabile in ogni $(x,y) \in \operatorname{dom}(f)$ con $y > 3 - x^2$ ed essendo (x_0, y_0) un punto interno a $\operatorname{dom}(f)$, si ha che la derivata di f in (x_0, y_0) rispetto a v è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)(v) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v.$$

Essendo $(x_0, y_0) = (2, 1)$ e $v = (1, 3)$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,1) = \nabla f(2,1) \cdot (1,3) = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \cdot (1,3) = \frac{7}{4}\sqrt{2}.$$

4) Il dominio di f è $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^3$. Per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4xy\, e^{2x^2} + 3z^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{2x^2} + z\cos(yz), \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 6xz + y\cos(yz).$$

Quindi

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \left(4xy\, e^{2x^2} + 3z^2, e^{2x^2} + z\cos(yz), 6xz + y\cos(yz)\right).$$

Poiché le derivate parziali esistono e sono continue in tutti i punti di $\mathbb{R}^3$, per il Teorema del differenziale totale la funzione f è differenziabile in ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ con

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\, dz =$$

$$= \left(4xy\, e^{2x^2} + 3z^2\right) dx + \left(e^{2x^2} + z\cos(yz)\right) dy + (6xz + y\cos(yz))\, dz.$$

Infine, essendo f differenziabile in ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, si ha che la derivata di f in (x_0,y_0,z_0) rispetto a v è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0,z_0)=df(x_0,y_0,z_0)(v)=\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot v.$$

Essendo $(x_0,y_0,z_0)=(1,0,1)$ e $v=(1,1,0)$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0,1)=\nabla f(1,0,1)\cdot(1,1,0)=(3,e^2+1,6)\cdot(1,1,0)=4+e^2.$$

5) Il dominio di f è $\mathrm{dom}\,(f)=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. Per ogni $(x,y,z)\in\mathrm{dom}\,(f)$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)=$$
$$=\left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z).$$

Poiché le derivate parziali esistono e sono continue in tutti i punti di $\mathrm{dom}\,(f)$, per il Teorema del differenziale totale la funzione f è differenziabile in ogni $(x,y,z)\in\mathrm{dom}\,(f)$ con

$$df(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,dy+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dz)=$$
$$=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dx-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dy-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dz.$$

Infine, essendo f differenziabile in ogni $(x,y,z)\in\mathrm{dom}\,(f)$, si ha che la derivata di f in (x_0,y_0,z_0) rispetto a v è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0,z_0)=df(x_0,y_0,z_0)(v)=\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot v.$$

Essendo $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$ e $v=(1,0,1)$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1)=\nabla f(1,1,1)\cdot(1,0,1)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{9},-\frac{\sqrt{3}}{9},-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\cdot(1,0,1)=-\frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

6) Il dominio di f è $\mathrm{dom}\,(f)=\mathbb{R}^3$. Per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{3z(1+y^2)}{9x^2z^2+(1+y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-\frac{6xyz}{9x^2z^2+(1+y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{3x(1+y^2)}{9x^2z^2+(1+y^2)^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)=$$

$$= \left(\frac{3z(1+y^2)}{9x^2z^2+(1+y^2)^2}, -\frac{6xyz}{9x^2z^2+(1+y^2)^2}, \frac{3x(1+y^2)}{9x^2z^2+(1+y^2)^2} \right).$$

Poiché le derivate parziali esistono e sono continue in tutti i punti di $\mathbb{R}^3$, per il Teorema del differenziale totale la funzione f è differenziabile in ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dz =$$

$$= \frac{3z(1+y^2)}{9x^2z^2+(1+y^2)^2}\,dx - \frac{6xyz}{9x^2z^2+(1+y^2)^2}\,dy + \frac{3x(1+y^2)}{9x^2z^2+(1+y^2)^2}\,dz.$$

Infine, essendo f differenziabile in ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si ha che la derivata di f in (x_0, y_0, z_0) rispetto a v è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0,z_0) = df(x_0,y_0,z_0)(v) = \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot v.$$

Essendo $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ e $v = (0, 1, 1)$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0,0) = \nabla f(1,0,0)\cdot(0,1,1) = (0,0,3)\cdot(0,1,1) = 3.$$

Esercizio 2.

1) Per definizione la derivata parziale rispetto a x della funzione f nel punto $(1, 0)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f\Big((1,0)+te_1\Big)-f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f\Big((1,0)+t(1,0)\Big)-f(1,0)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,0)-f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{8t}{t} = 8,$$

e, sempre per definizione, la derivata parziale rispetto a y della funzione f nel punto $(1, 0)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f\Big((1,0)+te_2\Big)-f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f\Big((1,0)+t(0,1)\Big)-f(1,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(1,t)-f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{3t}{t} = 3.$$

Quindi il gradiente di f in $(1, 0)$ è

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right) = (8,3).$$

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(1,0)$ rispetto al vettore $v=(1,-1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((1,0)+tv\Big)-f(1,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((1,0)+t(1,-1)\Big)-f(1,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,-t)-f(1,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{7t}{t}=7.$$

Per le proprietà del calcolo differenziale, se f fosse differenziabile in $(1,0)$, allora si avrebbe che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)=\nabla f(1,0)\cdot v.$$

Poiché $\nabla f(1,0)\cdot v=(8,3)\cdot(1,-1)=8-3=5$, mentre $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)=7$, possiamo concludere che f non è differenziabile in $(1,0)$.

2) Per definizione la derivata parziale rispetto a x della funzione f nel punto $(0,0)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+te_1\Big)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+t(1,0)\Big)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\quad\nexists,$$

e, sempre per definizione, la derivata parziale rispetto a y della funzione f nel punto $(0,0)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+te_2\Big)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+t(0,1)\Big)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t}=0.$$

Poiché una delle derivate parziali di f in $(0,0)$ non esiste, possiamo concludere che f non è differenziabile in $(0,0)$.

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(0,0)$ rispetto al vettore $v=(2,5)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+tv\Big)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+t(2,5)\Big)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(2t,5t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t||2-5t|}{t}\quad\nexists.$$

3) Per definizione la derivata parziale rispetto a x della funzione f nel punto $(0,2)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,2)+te_1\Big) - f(0,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,2)+t(1,0)\Big) - f(0,2)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,2) - f(0,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{3t+5}{t} \quad \nexists,$$

e, sempre per definizione, la derivata parziale rispetto a y della funzione f nel punto $(0,2)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,2)+te_2\Big) - f(0,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,2)+t(0,1)\Big) - f(0,2)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,2+t) - f(0,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{5t+5}{t} \quad \nexists.$$

Poiché non esistono le derivate parziali di f in $(0,2)$ possiamo concludere che f non è differenziabile in $(0,2)$.

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(0,2)$ rispetto al vettore $v=(2,1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,2) = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,2)+tv\Big) - f(0,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,2)+t(2,1)\Big) - f(0,2)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(2t,2+t) - f(0,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{59}{5}t+5}{t} \quad \nexists.$$

4) Per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x|y-1|.$$

In particolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. Inoltre, per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ con $y\neq 1$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } y>1 \\ -x^2 & \text{se } y<1. \end{cases}$$

In particolare $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Quindi $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(0,0)$ rispetto al vettore $v=(1,2)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,0)+tv\Big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,0)+t(1,2)\Big) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,2t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2|2t-1|}{t} = \lim_{t\to 0} t|2t-1| = 0.$$

Poiché $\nabla f(0,0)\cdot v = (0,0)\cdot(1,2) = 0 = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, la funzione f potrebbe essere differenziabile in $(0,0)$.

In tal caso si avrebbe che

$$df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,dy = 0.$$

Per stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$ abbiamo due possibilità:

1) ricorrere alla definizione, e quindi controllare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0;$$

2) controllare se le derivate parziali di f sono continue in $(0,0)$.

Nel primo caso si ha che il limite è

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y-1|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Osserviamo che per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x,y)\neq(0,0)$, si ha che

$$0 \le \frac{x^2|y-1|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{(x^2+y^2)\,|y-1|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\,|y-1|.$$

Poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\,|y-1| = 0$, per il Secondo teorema del confronto dei limiti (per funzioni reali di più variabili) si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y-1|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Ne segue che f è differenziabile in $(0,0)$.

Osserviamo che le derivate parziali di f sono continue in $(0,0)$. Infatti, per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ con $y\neq 1$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x|y-1|, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } y>1 \\ -x^2 & \text{se } y<1 \end{cases}$$

che sono due funzioni continue in $(0,0)$.

5) Per definizione la derivata parziale rispetto a x della funzione f nel punto $(0,0)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+te_1\Big)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+t(1,0)\Big)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\,\sin\left(1/t^2\right)}{t}=\lim_{t\to 0}t\,\sin\left(1/t^2\right)=0,$$

e, sempre per definizione, la derivata parziale rispetto a y della funzione f nel punto $(0,0)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+te_2\Big)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+t(0,1)\Big)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\,\sin\left(1/t^2\right)}{t}=\lim_{t\to 0}t\,\sin\left(1/t^2\right)=0.$$

Quindi il gradiente di f in $(0,0)$ è

$$\nabla f(0,0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)=(0,0).$$

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(0,0)$ rispetto al vettore $v=(1,1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+tv\Big)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+t(1,1)\Big)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2\,\sin\left(1/2t^2\right)}{t}=\lim_{t\to 0}2t\,\sin\left(1/2t^2\right)=0.$$

Per le proprietà del calcolo differenziale, se f fosse differenziabile in $(0,0)$, allora si avrebbe che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot v.$$

Poiché $\nabla f(0,0)\cdot v=(0,0)\cdot(1,1)=0=\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, la funzione f potrebbe essere differenziabile in $(0,0)$.

In tal caso si avrebbe che

$$df(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,dy=0.$$

Per stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$ abbiamo due possibilità:

1) ricorrere alla definizione, e quindi controllare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0;$$

2) controllare se le derivate parziali di f sono continue in $(0,0)$.

Nel primo caso si ha che il limite è

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\,\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\,\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Poiché $|\sin z| \leq 1$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, si osserva che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$, si ha che

$$0 \leq \left|\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| = \sqrt{x^2+y^2}\,\underbrace{\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1} \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, per il Secondo teorema del confronto dei limiti (per funzioni reali di più variabili) si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| = 0$$

e di conseguenza anche

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\,\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0.$$

Ne segue che f è differenziabile in $(0,0)$.

Si osservi invece che le derivate parziali di f non sono continue in $(0,0)$. Infatti, considerando ad esempio la derivata parziale rispetto a x (analogamente per quella rispetto a y), si ha che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\,\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

e che non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Infatti, se consideriamo i punti del tipo $(x,0)$ con $x \neq 0$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x\,\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{x\to 0}\left(2x\,\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right) \nexists.$$

6) Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x|y + 2|.$$

In particolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, -2) = 0$.

Per definizione la derivata parziale rispetto a y della funzione f nel punto $(0, -2)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, -2) = \lim_{t \to 0} \frac{f\Big((0, -2) + te_2\Big) - f(0, -2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\Big((0, -2) + t(0, 1)\Big) - f(0, -2)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(0, t - 2) - f(0, -2)}{t} = 0.$$

Quindi il gradiente di f in $(0, -2)$ è

$$\nabla f(0, -2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, -2), \frac{\partial f}{\partial y}(0, -2)\right) = (0, 0).$$

Per definizione la derivata della funzione f nel punto $(0, -2)$ rispetto al vettore $v = (2, 1)$ è, se esiste in $\mathbb{R}$, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, -2) = \lim_{t \to 0} \frac{f\Big((0, -2) + tv\Big) - f(0, -2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\Big((0, -2) + t(2, 1)\Big) - f(0, -2)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(2t, t - 2) - f(0, -2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{4t^2\,|t|}{t} = \lim_{t \to 0} 4t|t| = 0.$$

Poiché $\nabla f(0, -2) \cdot v = (0, 0) \cdot (1, 2) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0, -2)$, la funzione f potrebbe essere differenziabile in $(0, -2)$.

In tal caso si avrebbe che

$$df(0, -2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, -2)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0, -2)\, dy = 0.$$

Per stabilire se f è differenziabile in $(0, -2)$ abbiamo due possibilità:

1) ricorrere alla definizione, e quindi controllare se

$$\lim_{(x,y) \to (0,-2)} \frac{f(x, y) - f(0, -2) - df(0, -2)[(x, y) - (0, -2)]}{\|(x, y) - (0, -2)\|} = 0;$$

2) controllare se le derivate parziali di f sono continue in $(0, -2)$.

Nel primo caso si ha che il limite è

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{f(x,y) - f(0,-2) - df(0,-2)[(x,y)-(0,-2)]}{\|(x,y)-(0,-2)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x^2|y+2|}{\sqrt{x^2+(y+2)^2}}.$$

Poiché per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, risulta che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $(x,y) \neq (0,-2)$

$$0 \leq \frac{x^2|y+2|}{\sqrt{x^2+(y+2)^2}} = |x| \frac{|x||y+2|}{\sqrt{x^2+(y+2)^2}} \leq |x| \frac{x^2+(y+2)^2}{\sqrt{x^2+(y+2)^2}} \leq |x| \sqrt{x^2+(y+2)^2}.$$

Poiché $\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \sqrt{x^2+(y+2)^2} = 0$, per il Secondo teorema del confronto dei limiti (per funzioni reali di più variabili) si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x^2|y+2|}{\sqrt{x^2+(y+2)^2}} = 0.$$

Ne segue che f è differenziabile in $(0,0)$.

Osserviamo che le derivate parziali di f in $(0,-2)$ sono continue. Infatti, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x|y+2|$$

che è una funzione continua in $(0,-2)$, e per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } y > -2 \\ 0 & \text{se } y = -2 \\ -x^2 & \text{se } y < -2 \end{cases}$$

che è anch'essa continua in $(0,-2)$ essendo

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,-2).$$

Esercizio 3. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $x_0 \in \Omega$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale, $F = (f_1, \dots, f_n)$. Supponiamo che per ogni $i = 1, \dots, n$ esista la derivata parziale di f_i rispetto a x_i in x_0. Si chiama **divergenza di F in x_0** il numero reale

$$\mathrm{div}F(x_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_0).$$

Se per ogni $i = 1, \dots, n$ esiste la derivata parziale di f_i rispetto a x_i in ogni $x \in \Omega$, allora è definita la funzione **divergenza di F**, $\mathrm{div}F : \Omega \to \mathbb{R}$, che associa ad ogni $x \in \Omega$ il numero reale $\mathrm{div}F(x)$.

1) Nel caso del campo vettoriale

$$F(x,y,z)=\left(2xy^2+\log\left(1+y^4\right),\ 2yz^2-y^2z+\sqrt{2+x^2z^2},\ yz^2+e^{x^2}\right)$$

si ha che $\operatorname{dom}(F)=\mathbb{R}^3$, $F=(f_1,f_2,f_3)$ e tutte le tre componenti di F sono derivabili rispetto alle rispettive variabili in ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Si ha che

$$\begin{aligned}\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad \operatorname{div}F(x,y,z)&=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)=\\&=2y^2+2z^2-2yz+2yz=\\&=2y^2+2z^2.\end{aligned}$$

2) Nel caso del campo vettoriale

$$F(x,y,z)=\left(5x^2y+\sin z,\ \cos x-5xy^2,\ \log\left(x^2+y^2+z^2\right)+e^{x^2+y^2}\right)$$

si ha che $\operatorname{dom}(F)=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, $F=(f_1,f_2,f_3)$ e tutte le tre componenti di F sono derivabili rispetto alle rispettive variabili in ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. Si ha che

$$\begin{aligned}\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}:\quad \operatorname{div}F(x,y,z)&=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)=\\&=10xy-10xy+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}=\\&=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}.\end{aligned}$$

3) Nel caso del campo vettoriale

$$F(x,y,z)=\left(\frac{6x^2}{\sqrt{y^2+z^2}}-9x^2y,\ 9xy^2-4yz,\ 2z^2+3x\left(x^2+y^2\right)\right)$$

si ha che $\operatorname{dom}(F)=\mathbb{R}^3\setminus\{(x,0,0):\ x\in\mathbb{R}\}$, $F=(f_1,f_2,f_3)$ e tutte le tre componenti di F sono derivabili rispetto alle rispettive variabili in ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(x,0,0):\ x\in\mathbb{R}\}$. Si ha che

$$\begin{aligned}\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(x,0,0):\ x\in\mathbb{R}\}:\quad \operatorname{div}F(x,y,z)&=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)=\\&=\frac{12x}{\sqrt{y^2+z^2}}-18xy+18xy-4z+4z=\\&=\frac{12x}{\sqrt{y^2+z^2}}.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale, $F = (f_1, f_2, f_3)$. Se le tre componenti di F ammettono tutte le derivate parziali in ogni $(x, y, z) \in \Omega$, allora è definito il campo vettoriale **rotore di** F, $\text{rot}F : \Omega \to \mathbb{R}^3$, che associa ad ogni $(x, y, z) \in \Omega$ il vettore $\text{rot}F(x, y, z)$ definito formalmente da

$$\text{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z) \end{vmatrix},$$

dove $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ sono i versori fondamentali di $\mathbb{R}^3$.

1) Nel caso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \Big((3y+11)z - 22y + \sin x^8,\ xz + 18 - \cos y^9,\ 2xy + 11x + \sqrt{1+z^4}\Big)$$

si ha che $\text{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3$, $F = (f_1, f_2, f_3)$ e tutte le tre componenti di F ammettono tutte le derivate parziali in ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si ha che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \text{rot}F(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (3y+11)z - 22y + \sin x^8 & xz + 18 - \cos y^9 & 2xy + 11x + \sqrt{1+z^4} \end{vmatrix} = \\ &= \Big(2x - x,\ 3y + 11 - (2y+11),\ z - (3z - 22)\Big) = \\ &= \Big(x,\ y,\ 22 - 2z\Big). \end{aligned}$$

2) Nel caso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{6y}{x^2+y^2} - yz,\ \frac{6x}{x^2+y^2} + xz,\ z^2 - \log\left(x^2+y^2\right)\right)$$

si ha che $\text{dom}\,(F) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = 0\}$, $F = (f_1, f_2, f_3)$ e tutte le tre componenti di F ammettono tutte le derivate parziali in ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = 0\}$. Si ha che per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2+y^2=0\}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F(x,y,z) \;&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\dfrac{6y}{x^2+y^2} - yz & \dfrac{6x}{x^2+y^2} + xz & z^2 - \log\left(x^2+y^2\right) \end{vmatrix} = \\
&= \left(-\frac{2y}{x^2+y^2} - x,\; \frac{2x}{x^2+y^2} - y,\; \frac{6y^2-6x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + z + \frac{6x^2-6y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + z \right) = \\
&= \left(-\frac{2y}{x^2+y^2} - x,\; \frac{2x}{x^2+y^2} - y,\; 2z \right).
\end{aligned}$$

3) Nel caso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(x+z+x^2\log\left(1+z^2\right),\; y+z+z^2\log\left(1+x^2\right),\; z-9+y\left(e^{xz}-1\right) \right)$$

si ha che $\operatorname{dom}(F) = \mathbb{R}^3$, $F = (f_1, f_2, f_3)$ e tutte le tre componenti di F ammettono tutte le derivate parziali in ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Si ha che per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F(x,y,z) \;&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+z+x^2\log\left(1+z^2\right) & y+z+z^2\log\left(1+x^2\right) & z-9+y\left(e^{xz}-1\right) \end{vmatrix} = \\
&= \left(e^{xz} - 1 - 1 - 2z\log\left(1+x^2\right),\; 1 + \frac{2x^2 z}{1+z^2} - yz\,e^{xz},\; \frac{2xz^2}{1+x^2} \right) = \\
&= \left(e^{xz} - 2 - 2z\log\left(1+x^2\right),\; 1 + \frac{2x^2 z}{1+z^2} - yz\,e^{xz},\; \frac{2xz^2}{1+x^2} \right).
\end{aligned}$$