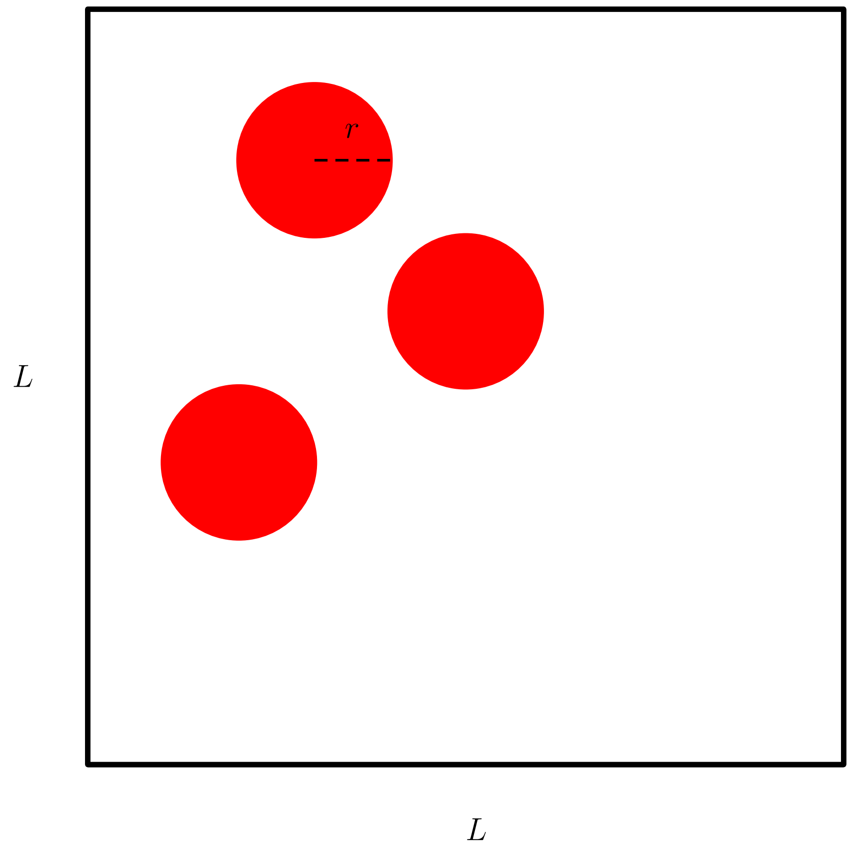
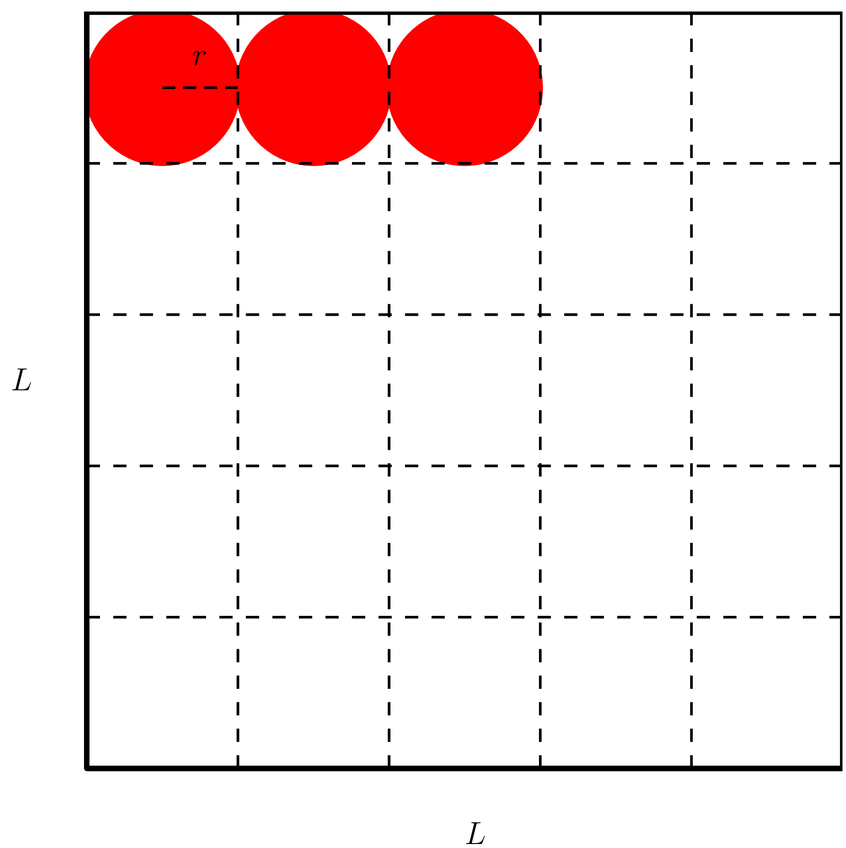
Quanti cerchi in un quadrato?

Siano $r, L > 0$ tali che $2r < L$. Determinare il numero massimo di cerchi di raggio r, a due a due con parte interna disgiunta, che si possono disegnare nel quadrato di lato L.



SVOLGIMENTO

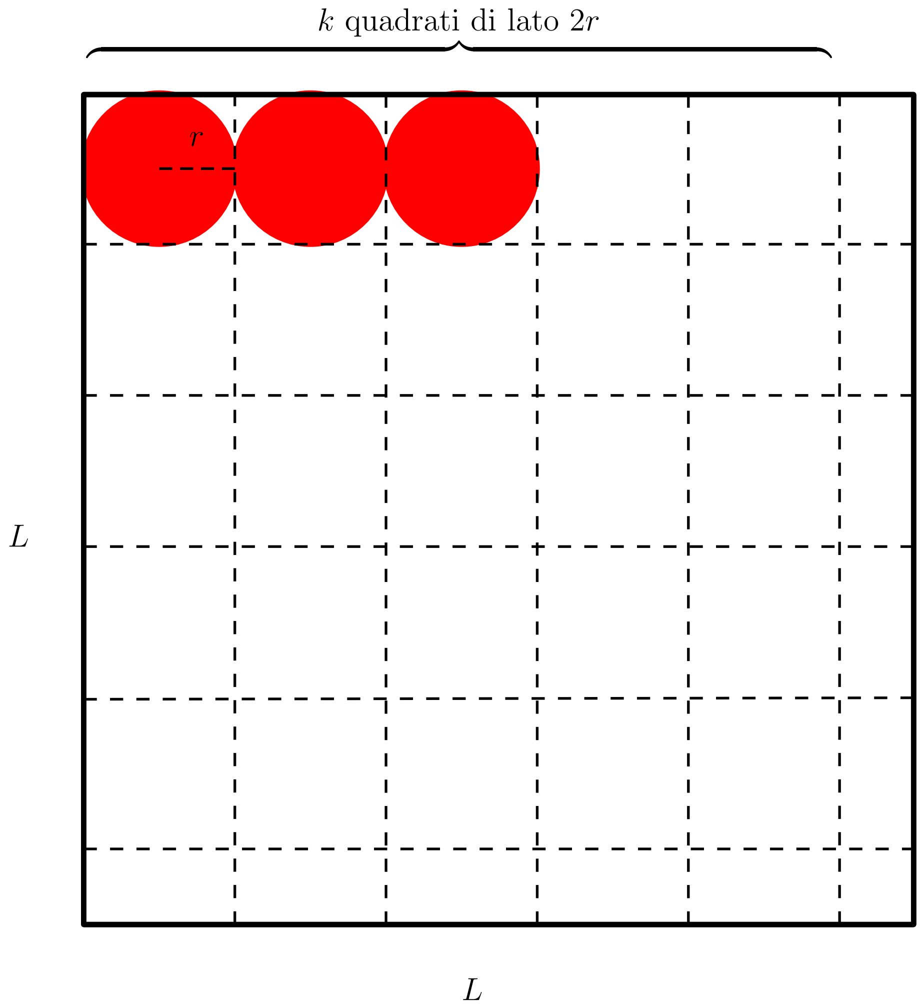


Ogni cerchio di raggio r è inscritto in un quadrato di lato $2r$.
Sia k la parte intera di $L/2r$, cioè

$$k = \left[\frac{L}{2r}\right].$$

Se $L/2r$ è un numero naturale, allora $k = \frac{L}{2r}$ e quindi il numero massimo di cerchi disegnabili è $n = k^2$.

Se $L/2r$ non è un numero naturale, allora $k = \left[\frac{L}{2r}\right] < \frac{L}{2r}$ e quindi certamente è possibile disegnare k^2 cerchi, ma potrebbe essere possibile disegnarne altri.
Questo fatto dipende da quanto spazio rimane fra il quadrato di lato $2kr$ e quello di lato L.



Poniamo $d = L - 2kr$. Osserviamo che $0 < d < 2r$. Si ha che:

1) se $d < \sqrt{2}r$, allora non è possibile disegnare altri cerchi;

2) se $\sqrt{2}r \leq d < \sqrt{3}r$, allora è possibile disegnare solo un altro cerchio;

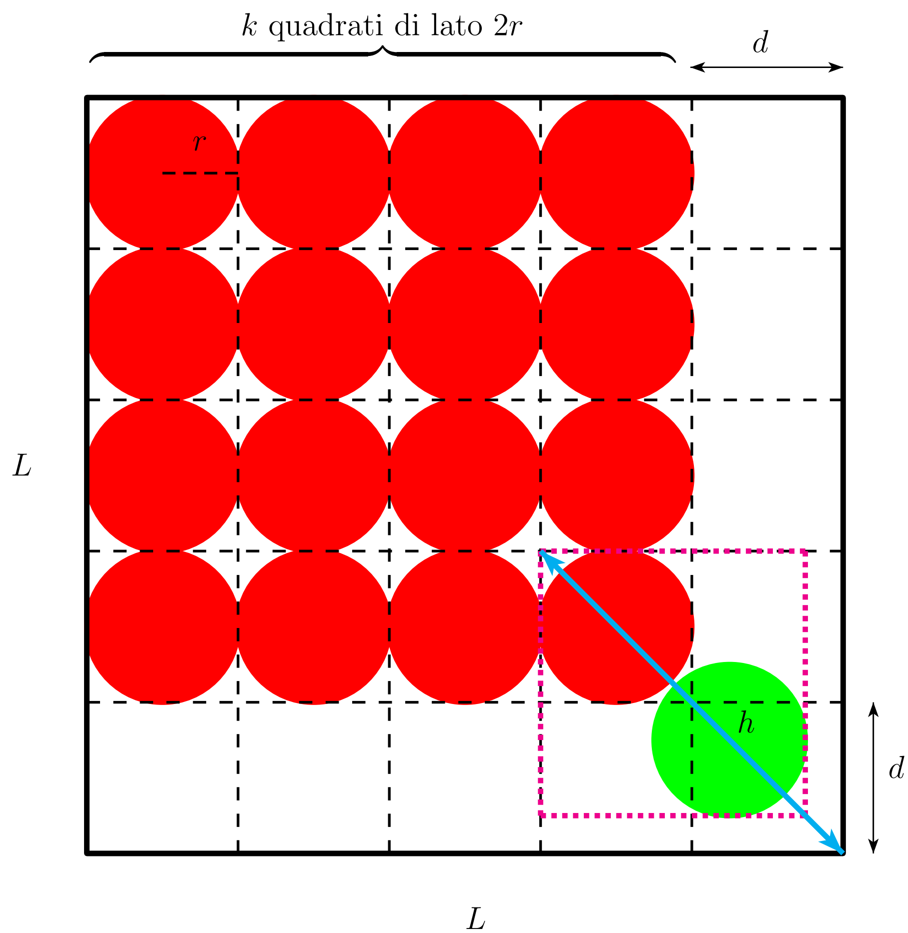
3) se $d \geq \sqrt{3}r$, allora è possibile disegnare altri $2k - 1$ cerchi.

Infatti, il cerchio verde in basso a destra si può disegnare se la diagonale del quadrato di lato $2r + d$, ovvero h, è maggiore o uguale a quella del quadrato che inscrive il quadrato rosso e quello verde, ovvero $4r + 2(\sqrt{2} - 1)r$. Essendo $h = \sqrt{2}(d + 2r)$, si ottiene

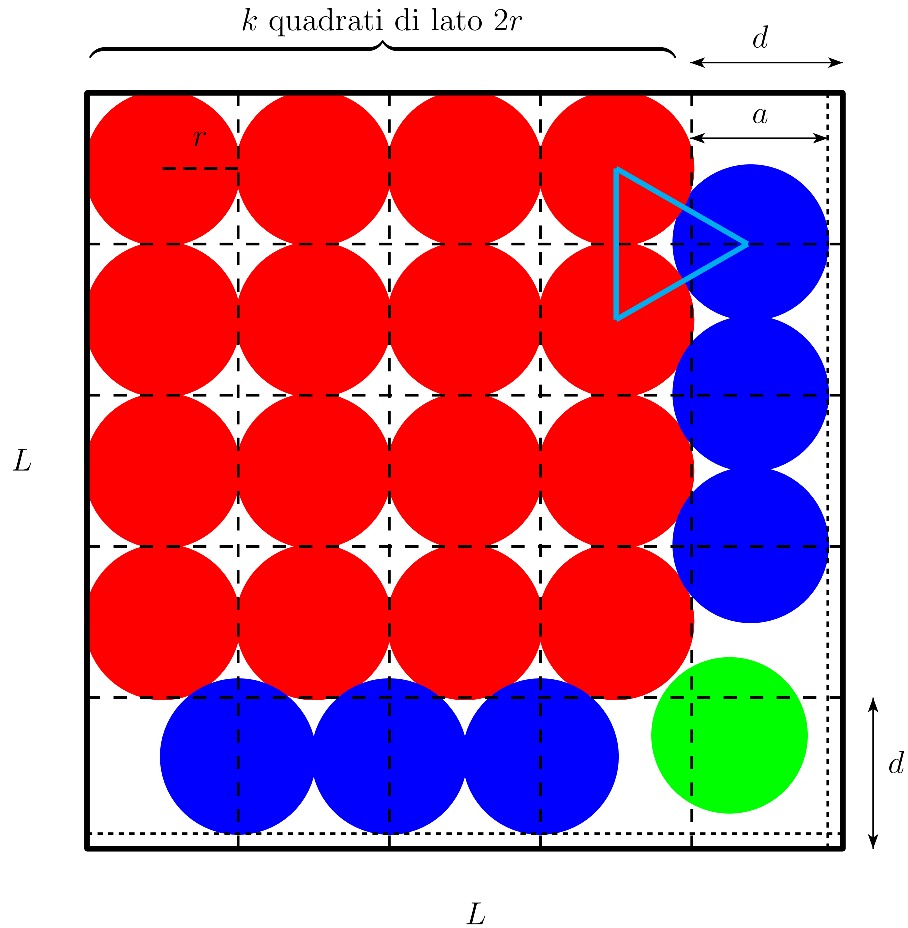
$$\sqrt{2}(d + 2r) \geq 4r + 2(\sqrt{2} - 1)r$$

da cui

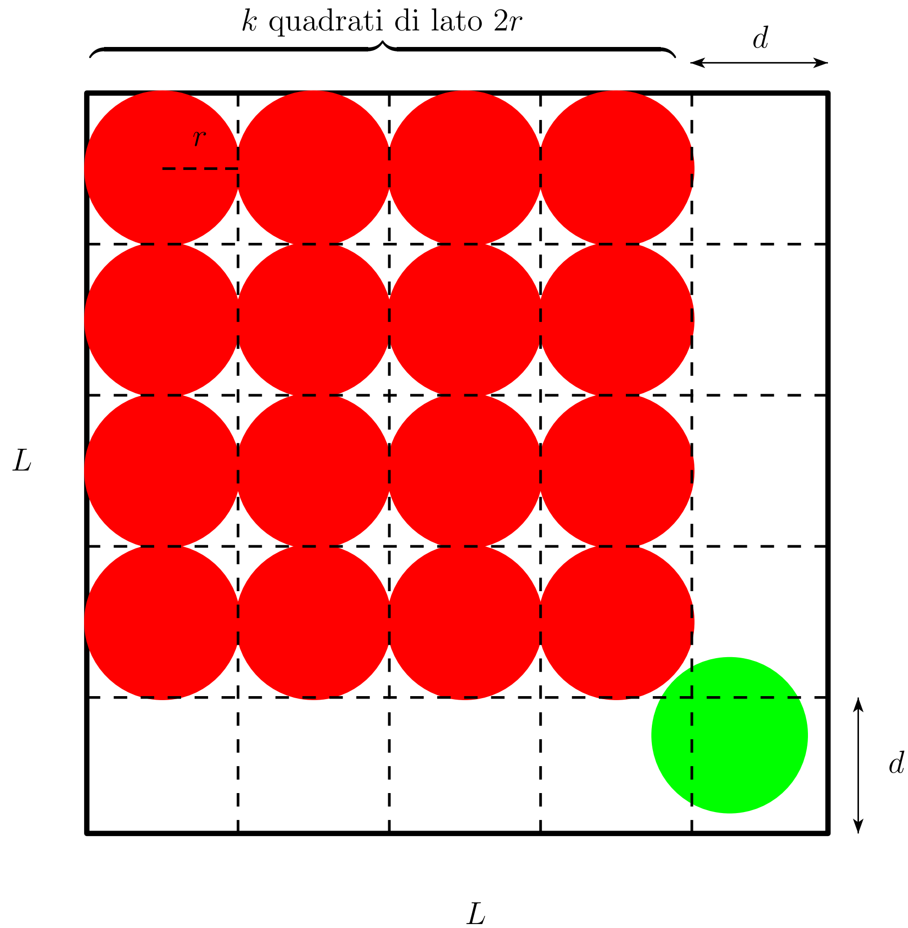
$$d \geq \sqrt{2}r.$$



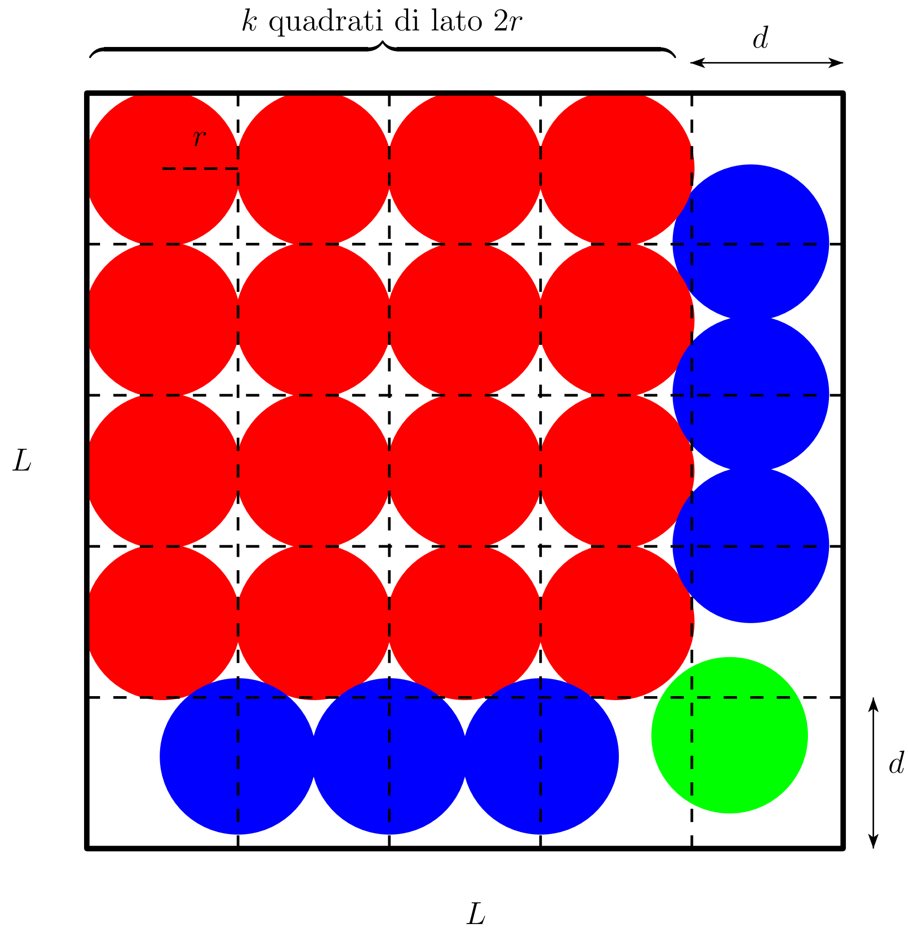
Invece i cerchi blu di figura si possono disegnare se sono almeno tangenti agli altri due cerchi rossi vicini. Ne segue che la distanza del centro di ciascun cerchio blu dall'asse radicale che passa per i centri dei due cerchi rossi vicini deve essere almeno $\sqrt{3}r$. Di conseguenza deve essere $\sqrt{3}r + r = a + r$, e quindi $a = \sqrt{3}r$. Pertanto deve essere $d \geq a$ e quindi $d \geq \sqrt{3}r$. Se $d < \sqrt{3}r$ questi cerchi blu non si possono disegnare.



Infine, proviamo che nel secondo e terzo caso non si possono disegnare altri cerchi. Infatti, se $\sqrt{2}r \leq d < \sqrt{3}r$, allora la parte di piano fra 4 cerchi "rossi" tangenti ha area $(4-\pi)r^2$ che è minore di πr^2 che è l'area di ciascun cerchio, e quindi non si può disegnare nessun cerchio di quel tipo in questa parte del quadrato. Inoltre le altre parti del quadrato non coperte dai cerchi rossi e verde sono contenute in rettangoli o quadrati in cui un lato è $d < \sqrt{3}r$ e quindi non possono contenere cerchi di raggio r.



Infine, se $d \geq \sqrt{3}r$, allora le parti del quadrato non coperte dai cerchi blu sono contenute in rettangoli o quadrati in cui un lato è $d < 2r$ e quindi non possono contenere cerchi di raggio r.



In conclusione, ricordando che $k = \left[\frac{L}{2r}\right]$, il numero massimo n di cerchi disegnabili è:

i) $n = k^2$, se $L - 2kr < \sqrt{2}r$;

ii) $n = k^2 + 1$, se $\sqrt{2}r \leq L - 2kr < \sqrt{3}r$;

iii) $n = k^2 + 2k - 1$, se $L - 2kr \geq \sqrt{3}r$.

Osservazione

Per determiare la soluzione del probema non si può ragionare in termini di "aree" occupate dai cerchi. Infatti, essendo l'area del quadrato L^2 e quella di ciascun cerchio πr^2, da un punto di vista ipotetico il numero massimo di cerchi disegnabili nel quadrato sarebbe

$$n_i = \left[\frac{L^2}{\pi r^2}\right],$$

dove $[\cdot]$ indica la parte intera del numero.

Se $r = L/2$, allora $n_i = \left[\frac{4}{\pi}\right] = 1$, che è corretto.

Se $r = L/4$, allora $n_i = \left[\frac{16}{\pi}\right] = 5$, che non è corretto, come è evidente dalla figura.