# Approfondimenti

# Serie numeriche

**(1.1) Osservazione** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono due serie assolutamente convergenti, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge assolutamente e si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|.$$

Infatti, denotate con $S_n$, $\sigma_n$, $\tau_n$ le somme parziali delle serie di $|a_n|$, $|b_n|$ e $|a_n + b_n|$ rispettivamente, per la disuguaglianza triangolare del valore assoluto si ha che $\tau_n \leq S_n + \sigma_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Essendo $|a_n + b_n| \geq 0$, per il Teorema (2.6) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n|$ converge o diverge positivamente e quindi esiste $\lim_n \tau_n$. Per il Primo teorema del confronto sui limiti si ha che

$$\lim_n \tau_n \leq \lim_n (S_n + \sigma_n) \in \mathbb{R}$$

e quindi $\lim_n \tau_n \in \mathbb{R}$, da cui segue che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n|$ converge. Inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n| = \lim_n \tau_n \leq \lim_n (S_n + \sigma_n) = \lim_n S_n + \lim_n \sigma_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|.$$

**(1.2) Osservazione** Dall'osservazione precedente segue che, se $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ non converge assolutamente, allora almeno una delle due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ non converge assolutamente.

**(1.3) Corollario** *Siano* $n_0 \in \mathbb{N}$ *e* $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ *una serie a termini di segno alterno. Supponiamo che*

*i)* $\lim_n b_n = 0$;

*ii) la successione* $(b_n)$ *sia decrescente;*

*iii)* $b_{n_0} > b_{n_0+1}$.

*Allora valgono i seguenti fatti:*

*a) se* $n_0$ *è pari, allora la serie* $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ *converge ad un numero positivo;*

*b) se* $n_0$ *è dispari, allora la serie* $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ *converge ad un numero negativo.*

**Dimostrazione.** Per il Criterio di Leibniz la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge e, denotata con $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} (-1)^k b_k$ la somma parziale $n$-esima della serie e con $S$ la somma della serie, si ha che $|S - S_n| \leq b_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. In particolare per $n = n_0$ risulta

$$S_{n_0} - b_{n_0+1} \leq S \leq S_{n_0} + b_{n_0+1}. \tag{1.4}$$

Se $n_0$ è pari, allora $S_{n_0} = (-1)^{n_0} b_{n_0} = b_{n_0}$ ed essendo $b_{n_0} > b_{n_0+1}$ da (1.4) segue che

$$S \geq S_{n_0} - b_{n_0+1} = b_{n_0} - b_{n_0+1} > 0.$$

Se $n_0$ è dispari, allora $S_{n_0} = (-1)^{n_0} b_{n_0} = -b_{n_0}$ ed essendo $b_{n_0} > b_{n_0+1}$ da (1.4) segue che

$$S \leq S_{n_0} + b_{n_0+1} = -b_{n_0} + b_{n_0+1} < 0.$$

■

**(1.5) Osservazione** L'ipotesi $b_{n_0} > b_{n_0+1}$ è chiaramente soddisfatta se $(b_n)$ è strettamente decrescente.

Le sole ipotesi del Criterio di Leibniz però non bastano. Infatti, se $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge a 0. Oppure se si considera la successione

$(b_n)$ definita da $b_{2n} = b_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, evidentemente $(b_n)$ soddisfa le ipotesi del Criterio di Leibniz ma $b_0 = b_1$ e si ha che

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, b_k = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi $\lim_n S_n = 0$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, b_n$ converge a 0.