Approfondimenti

Gradiente, rotore, divergenza

In questa sezione vogliamo sottolineare alcuni aspetti riguardanti gli operatori di **gradiente**, **rotore** e **divergenza**.

Gradiente. Si indica talvolta con il simbolo ∇. È un operatore che trasforma una funzione reale di $n \geq 1$ variabili in un campo vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Infatti, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, allora il gradiente di f è il campo vettoriale $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definito da

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Rotore. Si indica talvolta con il simbolo rot. È un operatore che trasforma un campo vettoriale di $\mathbb{R}^3$ in un campo vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Infatti, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ è campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, f_3)$, allora il rotore di F è il campo vettoriale $\mathrm{rot}F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\mathrm{rot}F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

Divergenza. Si indica talvolta con il simbolo div. È un operatore che trasforma un campo vettoriale di $\mathbb{R}^n$ in una funzione di $n \geq 1$ variabili. Infatti, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, \cdots, f_n)$, allora la divergenza di F è la funzione $\mathrm{div}F : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Quindi se f indica una funzione e F un campo vettoriale, ha senso calcolare

$$\mathrm{rot}\nabla f, \qquad \mathrm{div}\nabla f, \qquad \mathrm{div}\,\mathrm{rot}F, \qquad \nabla\,\mathrm{div}F.$$

Non ha senso calcolare

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{div}F, \qquad \nabla\,\mathrm{rot}F.$$

Infine, si osserva che se f e F sono di classe C^2, allora

$$\mathrm{rot}\nabla f = 0, \qquad \mathrm{div}\,\mathrm{rot}F = 0.$$

L'operatore div∇ è detto **Laplaciano** (o **operatore di Laplace**) e si indica con il simbolo Δ. Quindi se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è di classe C^2,

$$\Delta f = \mathrm{div}\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Significato fisico del rotore (Tratto dal testo *A. Bacciotti, CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE II. Seconda parte: Vettori, funzioni reali di più variabili reali, serie, Celid*).

Il termine *rotore* rimanda inevitabilmente alla rotazione. In effetti, dato il campo vettoriale F di $\mathbb{R}^3$, si osserva che il vettore rot$F$ è in qualche modo legato alla rotazione. Per renderci conto di ciò, consideriamo un caso molto semplice di un corpo rigido. Ogni movimento del corpo rigido si può immaginare come una combinazione di un moto traslatorio e di un moto rotatorio intorno al baricentro. Supponiamo per semplicità che in ogni punto $P(x, y, z)$ del corpo rigido la velocità $\vec{v}(P)$ dipenda solo dalla posizione del punto P e che la velocità angolare $\vec{\omega}$ sia costante. Allora

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PO} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \wedge (x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega_2 z - \omega_3 y)\vec{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\vec{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\vec{k}.$$

Ne segue che

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\vec{\omega}.$$

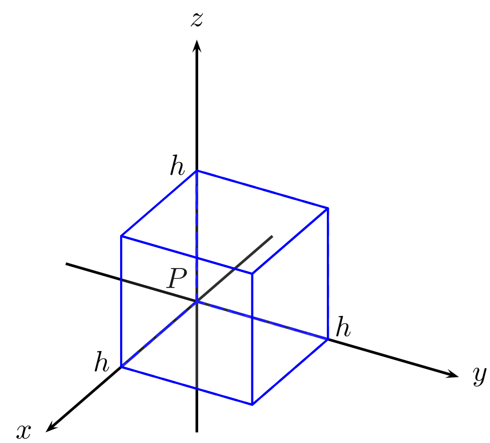
Quindi il rotore del campo di velocità è multiplo del vettore velocità angolare, che è chiaramente legato alla rotazione. In particolare in questo semplice esempio si ha che

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{0}.$$

Per questo motivo si dice che un campo è *irrotazionale* quando il suo rotore è nullo. Questa terminologia si utilizza anche nei casi più generali. Quando si considera ad esempio il moto di un fluido, $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ indica assenza di vorticosità.

Significato fisico della divergenza (Tratto dal testo *A. Bacciotti, CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE II. Seconda parte: Vettori, funzioni reali di più variabili reali, serie, Celid*).

Consideriamo un fluido e supponiamo che in ogni punto la velocità dipenda solo dalla posizione del punto. Studiamo il moto del fluido attraverso un cubo di lato h con spigoli paralleli agli assi cartesiani e con un vertice in un punto P. Vogliamo calcolare la variazione di flusso del fluido nel cubo nell'unità di tempo.



Supponiamo per semplicità che la densità del fluido sia 1. Il flusso del fluido attraverso una superficie Σ è proporzionale alla densità del fluido, all'area di Σ e al prodotto scalare fra il campo di velocità $\vec{v}$ e il versore normale n a Σ. Consideriamo il contributo di ogni coppia di facce parallele del cubo. In tal caso Σ è una faccia del cubo e la sua area è h^2.

Partiamo da quelle ortogonali all'asse x. La variazione di flusso (uscente - entrante) è

$$h^2\Big[\vec{v}(x+h,y,z) - \vec{v}(x,y,z)\Big]\cdot\vec{i} \underset{\substack{\uparrow \\ v=(v_1,v_2,v_3)}}{=} h^2\Big[v_1(x+h,y,z) - v_1(x,y,z)\Big].$$

Dividendo per il volume h^3 del cubo, in modo da ricondurci al cubo unitario, otteniamo

$$\frac{v_1(x+h,y,z) - v_1(x,y,z)}{h}$$

e passando al limite per $h \to 0$ otteniamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{v_1(x+h,y,z) - v_1(x,y,z)}{h} = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,z).$$

Analogamente la variazione di flusso (uscente - entrante) relativa alle altre coppie di facce parallele agli assi y e z è rispettivamente $\frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,z)$ e $\frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z)$. Sommando questi tre contributi si ottiene che la variazione totale di flusso è

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z) = \operatorname{div} \vec{v}(x,y,z).$$

Quindi la divergenza del campo di velocità tiene conto della variazione del flusso del fluido. In particolare $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ significa che il fluido si muove senza dilatarsi e senza comprimersi. In generale, quando la divergenza è nulla, si dice che il campo è **solenoidale**.