Approfondimenti

Ascissa curvilinea

Introduciamo una nozione più generale di *curve equivalenti* rispetto a quella introdotta a pag. 54 del testo *S. Lancelotti, Lezioni di Analisi Matematica II, Celid.*

Nel seguito considereremo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

(1.1) Definizione Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\eta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ due curve parametriche. Diciamo che **γ e η sono equivalenti** se esiste una funzione $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ biiettiva, continua su $[c,d]$ e di classe C^1 su (c,d) con $\alpha'(\tau) > 0$ per ogni $\tau \in (c,d)$ tale che

$$\eta = \gamma \circ \alpha.$$

Rispetto alla Definizione (1.6) di pag. 54 la funzione α del cambiamento di parametro non è di classe C^1 su tutto l'intervallo $[c,d]$. Quindi può non essere derivabile negli estremi. Si noti che nelle ipotesi indicate risulta comunque che α è strettamente crescente su $[c,d]$ e quindi è invertibile. Inoltre per le proprietà della funzione inversa, anche $\alpha^{-1} : [a,b] \to [c,d]$ è continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b) con

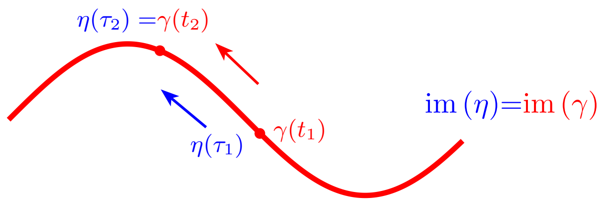
$$\forall t \in (a,b) : \qquad \left(\alpha^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{\alpha'(\alpha^{-1}(t))}$$

ed è strettamente crescente su $[a,b]$.

(1.2) Proposizione *Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\eta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ due curve parametriche semplici, regolari ed equivalenti nel senso della Definizione (1.1).*
Allora γ e η hanno lo stesso sostegno e inducono su di esso lo stesso verso di percorrenza.

Dimostrazione. Sia $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ biiettiva, continua su $[c,d]$ e di classe C^1 su (c,d) con $\alpha'(\tau) > 0$ per ogni $\tau \in (c,d)$ tale che $\eta = \gamma \circ \alpha$. Quindi $\eta([c,d]) = \gamma([a,b])$ da cui segue che γ e η hanno lo stesso sostegno. Dimostriamo che inducono su di esso lo stesso verso di percorrenza.

Consideriamo $t_1, t_2 \in [a, b]$ con $t_1 < t_2$. Allora il punto $\gamma(t)$ percorre il sostegno di γ fra i punti $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ nel verso da $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$.



Poiché α è biiettiva esistono e sono unici $\tau_1, \tau_2 \in [c, d]$ tali che $t_1 = \alpha(\tau_1)$ e $t_2 = \alpha(\tau_2)$. Essendo α strettamente crescente su $[c, d]$ si ha che

$$\alpha(\tau_1) = t_1 < t_2 = \alpha(\tau_2) \quad \Longrightarrow \quad \tau_1 < \tau_2.$$

Ne segue che il punto $\eta(\tau)$ percorre il sostegno di η fra i punti $\eta(\tau_1) = \gamma(\alpha(\tau_1)) = \gamma(t_1)$ e $\eta(\tau_2) = \gamma(\alpha(\tau_2)) = \gamma(t_2)$ nel verso da $\eta(\tau_1)$ a $\eta(\tau_2)$, come γ. Quindi γ e η inducono lo stesso verso di percorrenza sul loro comune sostegno.

■

(1.3) Proposizione *Siano $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\eta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ due curve parametriche semplici e regolari e sia $\alpha : [c, d] \to [a, b]$ biiettiva, continua su $[c, d]$ e di classe C^1 su (c, d) con $\alpha'(\tau) < 0$ per ogni $\tau \in (c, d)$ tale che $\eta = \gamma \circ \alpha$.*
Allora γ e η hanno lo stesso sostegno e inducono su di esso versi di percorrenza opposti.

Dimostrazione. È analoga alla dimostrazione della proposizione precedente. ■

Osserviamo che in questa proposizione la funzione α ha tutte le proprietà elencate nella Definizione (1.1) tranne che per il segno della sua derivata.

(1.4) Definizione Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica regolare. Si chiama **ascissa curvilinea** la funzione $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\forall t \in [a, b] : \quad s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau.$$

(1.5) Osservazione Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva parametrica semplice e regolare, allora $s(b) = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau = l_\gamma$ è la lunghezza della curva γ, che come abbiamo visto non dipende dalla parametrizzazione (vedi Teorema (2.4) del Capitolo 3). Quindi in tal caso l'ascissa curvilinea è una funzione $s : [a,b] \to [0, l_\gamma]$. Inoltre, per ogni $t \in [a,b]$ il numero reale $s(t)$ è la lunghezza del tratto del sostegno di γ compreso fra $\gamma(a)$ e $\gamma(t)$.

(1.6) Proposizione *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica semplice e regolare.*

Allora valgono i seguenti fatti:

a) la funzione ascissa curvilinea $s : [a,b] \to [0, l_\gamma]$ è di classe C^1 con $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ per ogni $t \in [a,b]$. Inoltre s è invertibile;

b) se α è la funzione inversa di s, allora la curva parametrica $\eta : [0, l_\gamma] \to \mathbb{R}^n$ definita da $\eta = \gamma \circ \alpha$ è equivalente a γ nel senso della Definizione (1.1) e per ogni $\tau \in (0, l_\gamma)$ si ha $\|\eta'(\tau)\| = 1$.

Dimostrazione.

a) Poiché γ' è continua su $[a,b]$, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che s è derivabile su $[a,b]$ con $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ per ogni $t \in [a,b]$. Inoltre essendo γ' continua su $[a,b]$ con $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a,b)$, si ha che s è di classe C^1 su $[a,b]$ con $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ per ogni $t \in (a,b)$. Ne segue che s è strettamente crescente su $[a,b]$ e quindi $s : [a,b] \to [0, l_\gamma]$ è invertibile.

b) La funzione $\alpha : [0, l_\gamma] \to [a,b]$ è continua in quanto inversa di una funzione continua su un intervallo. Poiché $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ per ogni $t \in (a,b)$, per il Teorema della derivata della funzione inversa, la funzione α è derivabile su $(0, l_\gamma)$ con

$$\forall \tau \in (0, l_\gamma) : \quad \alpha'(\tau) = \frac{1}{s'(\alpha(\tau))} = \frac{1}{\|\gamma'(\alpha(\tau))\|} > 0.$$

In particolare α è di classe C^1 su $(0, l_\gamma)$. Ne segue che η e γ sono equivalenti, nel senso della Definizione (1.1). Infine per ogni $\tau \in (0, l_\gamma)$ si ha che

$$\|\eta'(\tau)\| = \|\gamma'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)\| = \|\gamma'(\alpha(\tau))\|\, |\alpha'(\tau)| = \frac{\|\gamma'(\alpha(\tau))\|}{\|\gamma'(\alpha(\tau))\|} = 1.$$

■

Il prossimo risultato costituisce il viceversa delle Proposizioni (1.2) e (1.3).

(1.7) Proposizione *Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\eta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ due curve semplici e regolari aventi lo stesso sostegno.*
Allora esiste $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ biiettiva, continua su $[c,d]$ e di classe C^1 su (c,d) tale che $\alpha'(\tau) \neq 0$ per ogni $\tau \in (c,d)$ tale che $\eta = \gamma \circ \alpha$.
Più precisamente, se γ e η inducono lo stesso verso di percorrenza, allora $\alpha'(\tau) > 0$ per ogni $\tau \in (c,d)$ (e quindi γ e η sono equivalenti nel senso della Definizione (1.1)), mentre se γ e η inducono versi di percorrenza opposti, allora $\alpha'(\tau) < 0$ per ogni $\tau \in (c,d)$.

Dimostrazione. Poiché γ e η sono semplici e hanno lo stesso sostegno, si ha che

$$\forall t \in [a,b]\ \exists! \tau \in [c,d] : \ \gamma(t) = \eta(\tau), \qquad \forall \tau \in [c,d]\ \exists! t \in [a,b] : \ \gamma(t) = \eta(\tau).$$

Consideriamo le ascisse curvilinee associate alle curve γ e η, cioè le funzioni $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\sigma : [c,d] \to \mathbb{R}$ definite da

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\, du, \qquad \sigma(\tau) = \int_c^\tau \|\eta'(v)\|\, dv.$$

Poiché le curve hanno lo stesso sostegno, in virtù dell'Osservazione (1.5) si ha che $s([a,b]) = \sigma([c,d])$ e $s(b) = \sigma(d) = l_\gamma = l_\eta$. Inoltre per la proposizione precedente le funzioni ascissa curvilinea sono invertibili.

Consideriamo inizialmente il caso in cui γ e η inducono lo stesso verso di percorrenza sul loro comune sostegno. In tal caso si ha che per ogni $\tau \in [c,d]$ esiste un unico $t \in [a,b]$ tale che $s(t) = \sigma(\tau)$, cioè $t = s^{-1}(\sigma(\tau))$.

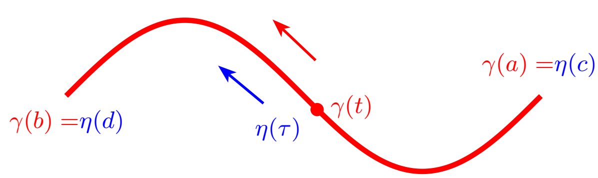


Fig. 1.1: Curve che inducono lo stesso verso di percorrenza sul sostegno.

Osserviamo che $\gamma(t) = \eta(\tau)$. Infatti, poiché $s(t) = \sigma(\tau)$, $s(a) = \sigma(c) = 0$ e $s(b) = \sigma(d) = l_\gamma = l_\eta$, si ha che il tratto di curva compreso fra $\eta(c)$ e $\eta(\tau)$ misura $\sigma(\tau) - \sigma(c) =$

$s(t) - s(a)$ come quello compreso fra $\gamma(t)$ e $\gamma(a)$. Poiché $\gamma(a) = \eta(c)$, ne segue che $\gamma(t) = \eta(\tau)$.

Consideriamo la funzione $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ definita da

$$\alpha(\tau) = s^{-1}(\sigma(\tau)).$$

La funzione α è biiettiva, continua su $[c,d]$ e di classe C^1 su (c,d) con

$$\forall \tau \in (c,d) : \qquad \alpha'(\tau) = (s^{-1})'(\sigma(\tau))\, \sigma'(\tau) = \frac{\sigma'(\tau)}{s'(s^{-1}(\sigma(\tau)))} > 0.$$

Inoltre per ogni $\tau \in [c,d]$

$$(\gamma \circ \alpha)(\tau) = \gamma\left(s^{-1}(\sigma(\tau))\right) = \gamma(t) = \eta(\tau).$$

Ne segue la tesi e in particolare γ e η sono equivalenti nel senso della Definizione (1.1).

Consideriamo ora il caso in cui γ e η inducono versi di percorrenza opposti sul loro comune sostegno. In tal caso si ha che per ogni $\tau \in [c,d]$ esiste un unico $t \in [a,b]$ tale che $s(t) = \sigma(\tau)$, cioè $t = s^{-1}(\sigma(\tau))$.

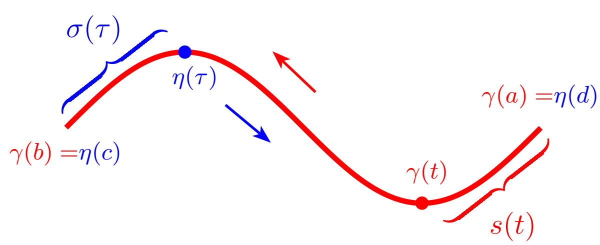


Fig. 1.2: Curve che inducono versi di percorrenza opposti sul sostegno.

Osserviamo che $\gamma\left(s^{-1}(\sigma(d) - \sigma(\tau))\right) = \eta(\tau)$. Infatti, essendo $s(t) = \sigma(\tau)$ e $s(b) = \sigma(d) = l_\gamma = l_\eta$, si ha che il tratto di curva compreso fra $\eta(\tau)$ e $\eta(d)$ misura $\sigma(d) - \sigma(\tau) = s(b) - s(t)$ come quello compreso fra $\gamma(t)$ e $\gamma(b)$. Quindi

$$s^{-1}(\sigma(d) - \sigma(\tau)) = s^{-1}(s(b) - s(t)) = s^{-1}(s(b) - \sigma(\tau)).$$

Ma $s^{-1}(s(b) - \sigma(\tau)) = u \in [a,b]$ tale che

$$s(u) = s(b) - \sigma(\tau) = l_\gamma - \sigma(\tau) = l_\eta - \sigma(\tau).$$

Come si evince da Fig. 1.2 u è il punto a cui corrisponde $\gamma(u) = \eta(\tau)$. Quindi

$$\eta(\tau) = \gamma\left(s^{-1}(s(b) - \sigma(\tau))\right) = \gamma\left(s^{-1}(\sigma(d) - \sigma(\tau))\right).$$

Consideriamo la funzione $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ definita da

$$\alpha(\tau) = s^{-1}(\sigma(d) - \sigma(\tau)).$$

La funzione α è biiettiva, continua su $[c,d]$ e di classe C^1 su (c,d) con

$$\forall \tau \in (c,d): \qquad \alpha'(\tau) = -(s^{-1})'(\sigma(d) - \sigma(\tau))\sigma'(\tau) = -\frac{\sigma'(\tau)}{s'(s^{-1}(\sigma(d) - \sigma(\tau)))} < 0.$$

Inoltre per ogni $\tau \in [c,d]$

$$(\gamma \circ \alpha)(\tau) = \gamma\left(s^{-1}(\sigma(d) - \sigma(\tau))\right) = \eta(\tau).$$

Ne segue la tesi. ■