Applicazioni Avanzate di Fisica Tecnica

Cenni alla Termomeccanica dei Continui ed alla Trasmissione del Calore

Pietro Asinari Romano Borchiellini

Dipartimento di Energetica
Politecnico di Torino

Versione 1.0

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica

Sommario

1. Cenni alla Termomeccanica dei Continui
   - Dai sistemi discreti ai sistemi continui: equilibrio locale
   - Deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale
   - Irreversibilità
   - Equazioni integrali di bilancio
2. Cenni alla Trasmissione del Calore
   - Convezione
   - Conduzione
   - Irraggiamento

Sommario

1. Cenni alla Termomeccanica dei Continui
   - Dai sistemi discreti ai sistemi continui: equilibrio locale
   - Deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale
   - Irreversibilità
   - Equazioni integrali di bilancio
2. Cenni alla Trasmissione del Calore
   - Convezione
   - Conduzione
   - Irraggiamento

In questa lezione...

Dai sistemi discreti ai sistemi continui. Cenni di teoria cinetica dei gas ideali. Condizioni di equilibrio locale. Concetto di mezzo continuo. Equazioni di conservazione. Deduzione delle equazioni macroscopiche di Eulero (massa, quantità di moto, energia totale) nel caso di equilibrio locale. Richiami sulla notazione tensoriale.

Dai sistemi discreti ai sistemi continui

- Nei corsi di base dell'Ingegneria Meccanica, buona parte dello studio è rivolto ai sistemi discreti: ingranaggi, manovellismi, aste, rotismi, molle, masse puntiformi, dischi,...
- Benchè un notevole grado di complessità possa scaturire dall'interazione mutua di queste parti tra di loro, le quantità oggetto di analisi (es. posizione, velocità, ed accelerazione) e le equazioni che governano il fenomeno hanno un immediato il significato fisico
- Nella meccanica dei sistemi continui, vengono studiate delle grandezze di uso altrettanto comune (es. densità, pressione, sforzo viscoso, temperatura), ma che hanno una interpretazione molto più sfuggente in termini di concetti elementari

Concetto di corpo continuo

- Vogliamo generalizzare la nozione di corpo rigido al caso di corpo continuo, in cui la massa, anziché essere concentrata in un numero finito di punti, è distribuita in modo continuo in un volume
- Chiamiamo massa una misura assolutamente continua rispetto all'ordinaria misura di di volume, dove assolutamente continua significa che esiste il seguente limite

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m(\Delta V)}{\Delta V} \tag{1}$$

- Ma cosa succede realmente quando $\Delta V \to 0$? E' ancora possibile prescindere dalla natura microscopica del corpo, ossia scrivere delle equazioni generali ?

Cenni alla teoria cinetica dei gas ideali monoatomici

- Lo scopo di queste note, è quello di cercare di dedurre (per quanto in forma semplificata) le grandezze significative nella termomeccanica dei continui e le relative equazioni fondamentali piuttosto che semplicemente enunciarle, considerando una applicazione molto particolare, ossia i gas ideali monoatomici
- Questa scelta molto particolare è stata fatta per ragioni di semplicità e non ha la pretesa di esaurire tutto il ben più ampio spettro di applicazioni della termomeccanica
- Benché un gas nelle condizioni ambientali normali, sia caratterizzato da un numero enorme di particelle (numero di Avogadro), in linea di principio le loro interazioni elementari sono perfettamente ($\sim$) descrivibili mediante gli strumenti usati per i sistemi discreti

Urto elastico di due particelle

- Consideriamo un urto elastico di due particelle, caratterizzate dalle velocità iniziali $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ e da velocità finali $\boldsymbol{v}_1^*$ e $\boldsymbol{v}_2^*$. L'urto traforma $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \rightarrow (\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*)$
- Abbiamo conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia cinetica (non ci sono deformazioni permanenti $\rightarrow$ urti perfettamente reversibili)

$$m_1 + m_2 = m_1^* + m_2^* \tag{2}$$

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1^* \boldsymbol{v}_1^* + m_2^* \boldsymbol{v}_2^* \tag{3}$$

$$m_1 \boldsymbol{v}_1^2 + m_2 \boldsymbol{v}_2^2 = m_1^* (\boldsymbol{v}_1^*)^2 + m_2^* (\boldsymbol{v}_2^*)^2 \tag{4}$$

- Assumendo $m_1 = m_2 = m_1^* = m_2^* = m$, mancano due condizioni per risolvere il problema (6 incognite e 4 equazioni): dobbiamo ancora specificare il "raggio" (o meglio potenziale) di interazione delle due particelle

Meccanica statistica

- E' sufficiente risolvere questo calcolo per 10^{23} volte ed abbiamo finito ! $\rightarrow$ Su di un numero più ragionevole di particelle, questo è lo scopo dei calcoli di dinamica molecolare ("molecular dynamics" - MD)
- E' chiaro che abbiamo bisogno di uno strumento di indagine statistico, per avere delle informazioni medie relative all'effetto degli innumerevoli urti microscopici
- La funzione di distribuzione $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ è tale che la quantità $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v}$ individua la probabilità di trovare all'istante t una particella del fluido nel volume elementare $d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v}$ di centro $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^6$ ($\sim$ spazio delle fasi)

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v} = \delta^2 P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) = \delta^2 N|_{\boldsymbol{x} \in \delta\Omega_{\boldsymbol{x}}}^{\boldsymbol{v} \in \delta\Omega_{\boldsymbol{v}}} / N \qquad (5)$$

tale che $\int \int f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v} = 1$

Grandezze macroscopiche

- $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, t)$ è uno strumento potentissimo !
- Mediante questa funzione, posso calcolare alcune grandezze macroscopiche (variabili conservate)

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} m\, f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{v} \tag{6}$$

$$\rho\, \boldsymbol{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} m\, \boldsymbol{v}\, f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{v} \tag{7}$$

$$\rho\, E_0 = \rho\, \left(e + \boldsymbol{u}^2/2\right) = 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} m\, \boldsymbol{v}^2\, f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{v} \tag{8}$$

dove ρ è la densità, $\boldsymbol{u}$ è la velocità macroscopica ed e è l'energia interna (E_0 è detta energia interna di stagnazione e coincide con l'energia interna totale in assenza di campi conservativi)

Equazione evolutiva microscopica

- Nel caso di un gas ideale sufficientemente rarefatto e monoatomico, è possibile applicare l'equazione di Boltzmann (1872)

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f = Q(f, f) \tag{9}$$

  dove $Q(f, f)$ è l'operatore di collisione, che determina il tasso di variazione nel tempo della funzione di distribuzione per effetto delle collisioni microscopiche, descritte mediante un certo potenziale di interazione
- A questo punto la domanda fondamentale è la seguente: quale particolare funzione di distribuzione cerca di instaurare l'operatore di collisione, controllando il tasso di variazione nel tempo ?

Condizioni di equilibrio locale

- L'operatore di collisione cerca di instaurare nel sistema la particolare funzione di distribuzione, a cui non è associata nessuna dinamica ulteriore ! (ossia $Q(f_e, f_e) = 0$)
- Funzione di distribuzione di equilibrio (locale)

$$f_e(\boldsymbol{v}, \rho, \boldsymbol{u}, e) = \frac{\rho}{m(2\pi\, e)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2}{2e}\right] \tag{10}$$

- Il termine $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2/2 = e_{\boldsymbol{v}}$ corrisponde all'energia cinetica associata alla differenza della velocità della particella rispetto al valore macroscopico $\rightarrow$ si tratta di una energia "ribelle", apparentemente "invisibile" all'osservatore macroscopico
- Il sistema tende ad un ben preciso spettro energetico del tipo $\exp(-e_{\boldsymbol{v}}/e) \rightarrow$ comportamento reazionario !

Concetto di mezzo continuo

- Introduciamo il concetto di libero cammino medio l, definito come lo spazio medio percorso da una particella tra due collisioni successive: per un gas ideale nelle condizioni atmosferiche normali $l \approx 8 \times 10^{-8} m = 8 \times 10^{-2} \mu m = 80\, nm$
- Possiamo definire un numero adimensionale, detto numero di Knudsen Kn $= l/D$, dove D è una dimensione caratteristica del deflusso macroscopico
- Se il numero di Knudsen è piccolo Kn $\sim O(\epsilon)$ significa che, in un volume dell'ordine di D^3, avviene un numero grande di collisioni tra le particelle, che tendono ad avvicinare la funzione di distribuzione alle condizioni di equilibrio locale

$$f = f_e + \epsilon\, f^{(1)} + \epsilon^2\, f^{(2)} + \epsilon^3\, f^{(3)} + \ldots \tag{11}$$

Sistema di equazioni di Eulero

Derivazione a partire dalle equazioni cinetiche

- Consideriamo il caso in cui $f \approx f_e$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi\, f_e\, d\boldsymbol{v} + \nabla \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\, \boldsymbol{v}\, f_e\, d\boldsymbol{v} = 0 \qquad (12)$$

dove $\psi = m,\, mv_i,\, 1/2m\boldsymbol{v}^2$ è una qualsiasi quantità scalare conservata durante una collisione binaria

- Nel caso della conservazione della massa

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} m\, f_e\, d\boldsymbol{v} + \nabla \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} m\, \boldsymbol{v}\, f_e\, d\boldsymbol{v} = 0 \qquad (13)$$

ossia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{u}) = 0 \qquad (14)$$

Sistema di equazioni di Eulero

Derivazione a partire dalle equazioni cinetiche

- Nel caso della conservazione della quantità di moto e della conservazione della energia totale

$$\frac{\partial(\rho\,\boldsymbol{u})}{\partial t} + \nabla\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} m\,\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}\,f_e\,d\boldsymbol{v} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial(\rho\,E_0)}{\partial t} + \nabla\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{v}^2/2\,\boldsymbol{v}\,f_e\,d\boldsymbol{v} = 0 \tag{16}$$

- Compaiono i seguenti flussi addizionali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m\,\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}\,f_e\,d\boldsymbol{v} \;=\; \rho\,\left(2/3\,e\boldsymbol{I} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}\right) \tag{17}$$

$$1/2\int_{-\infty}^{+\infty} m\,\boldsymbol{v}^2\,\boldsymbol{v}\,f_e\,d\boldsymbol{v} \;=\; \rho\,\left(5/3\,e + \boldsymbol{u}^2/2\right)\boldsymbol{u} \tag{18}$$

Sistema di equazioni di Eulero

Formulazione canonica

- Introdotta una nuova variabile p, detta pressione, tale che $p = 2/3\,\rho\,e$, segue immediatamente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\,\boldsymbol{u}) = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial (\rho\,\boldsymbol{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\,\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla p = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial (\rho\,E_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\,E_0\,\boldsymbol{u} + p\,\boldsymbol{u}) = 0 \tag{21}$$

- Si definisce una nuova variabile T, detta temperatura, tale che $T = M\,e/R_0$, dove $R_0\ [JK^{-1}mol^{-1}]$ è la costante universale dei gas ed $M\ [kg\,mol^{-1}]$ è la massa molare
- Nel caso di gas poliatomici, vale la generalizzazione $p = (\gamma - 1)\,\rho\,e$ e $T = (\gamma - 1)\,M\,e/R_0$

Sistema di equazioni di Eulero

Commenti conclusivi

- Il sistema di equazioni di Eulero prescinde dalla natura specifica del fluido e si configura come uno scheletro universale
- I dettagli dell'approccio non sono rilevanti, perché comunque si assume che le collisioni siano così numerose da instaurare l'equilibrio locale
- Nelle regioni dove il numero di Mach locale Ma $= |\boldsymbol{u}|/c_S > 1$, sono presenti degli strati sottili in cui la soluzione presenta delle brusche variazioni (onde di shock) $\rightarrow$ Dal momento che in questi strati Kn $\nsim O(\epsilon)$, le equazioni di Eulero non sono valide e si preferisce descrivere questi strati come delle discontinuità (formulazione debole)

Sommario

1. Cenni alla Termomeccanica dei Continui
   - Dai sistemi discreti ai sistemi continui: equilibrio locale
   - Deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale
   - Irreversibilità
   - Equazioni integrali di bilancio
2. Cenni alla Trasmissione del Calore
   - Convezione
   - Conduzione
   - Irraggiamento

In questa lezione...

Modeste deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale. Relazioni fenomenologiche di Navier-Stokes e di Fourier, relative al tensore degli sforzi ed al flusso termico rispettivamente. Generalizzazione dei risultati ottenuti per i gas ideali ad altri tipi di fluidi. Adimensionalizzazione delle equazioni. Numeri adimensionali significativi e regimi fisici. Limite incomprimibile.

Modeste deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale

Equazione modello

- Nell'ipotesi di mezzo continuo Kn $\sim O(\epsilon)$, le modeste deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale possono essere calcolate mediante l'applicazione di tecniche perturbative all'equazione di Boltzmann
- Al fine di illustrare i rudimenti di queste tecniche, consideriamo la seguente equazione modello semplificata

$$\partial_t f + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f = L(f, \omega) = \omega(f_e - f) \tag{22}$$

  dove ω è un parametro libero del modello semplificato, avente le dimensioni di una frequenza
- Il termine $L(f, \omega)$ presenta alcune analogie con il termine $Q(f, f)$ dell'equazione di Boltzmann: in particolare $L(f_e, \omega) = Q(f_e, f_e) = 0$

Modeste deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale

Dipendenza funzionale delle deviazioni

- Consideriamo le seguenti variabili indipendenti adimensionali: $\hat{t} = t/\tau$, $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/L$ e $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}/c$ (dove c è il modulo medio della velocità microscopica)

$$\text{St}\, \partial_{\hat{t}} f + \hat{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\nabla} f = \hat{\omega}\, (f_e - f)/\text{Kn} \tag{23}$$

dove $\text{St} = L/(c\,\tau)$ è il numero di Strouhal ed $\hat{\omega} = \omega/(c/l)$ è il parametro libero adimensionale

- Assumendo la seguente espansione $f \approx f_e + \epsilon\, \delta$ nella precedente equazione e ricordando che $\text{Kn} \sim O(\epsilon)$ si ricava la dipendenza funzionale delle deviazioni

$$\delta = \delta\,(\nabla f_e) = -\frac{1}{\hat{\omega}} \left(St\, \frac{\partial f_e}{\partial \hat{t}} + \hat{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\nabla} f_e \right) \tag{24}$$

Modeste deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale

Descrizione macroscopica delle deviazioni

- Le deviazioni dipendono dai gradienti spaziali delle variabili macroscopiche ! (anche le variazioni temporali possono essere ricondotte ad essi mediante le equazioni di Eulero)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m\,\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}\,\delta\,d\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\Pi}_\nu \tag{25}$$

$$1/2\int_{-\infty}^{+\infty} m\,\boldsymbol{v}^2\,\boldsymbol{v}\,\delta\,d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}_\alpha - \boldsymbol{\Pi}_\nu\boldsymbol{u} \tag{26}$$

  dove $\boldsymbol{\Pi}_\nu$ è detto parte viscosa del tensore degli sforzi e $\boldsymbol{q}_\alpha$ è detto vettore del flusso termico
- La deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale dipendono dalla natura specifica del fluido, ossia dal potenziale di interazione delle particelle

Modeste deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale

Formule operative macroscopiche

- Si ottengono le seguenti formule operative macroscopiche

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}_\nu &= \rho\nu\,\left(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^T-2/3\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{I}\right)+\rho\nu_B\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{I}\\ &= \rho\nu\,\left(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^T\right)+\rho\,\left(\nu_B-2/3\,\nu\right)\nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{27}$$

dove ν è la viscosità cinematica e ν_B è la viscosità cinematica di volume (“ bulk cinematic viscosity”)

$$\boldsymbol{q}_\alpha = -\lambda\,\nabla T = -\rho\,\alpha\,\gamma\,\nabla e \tag{28}$$

dove λ è la conducibilità termica ed $\alpha = \lambda\,(\gamma-1)/(\rho\,R\,\gamma)$ è la diffusività termica ($R = R_0/M$ è la costante specifica)

Sistema di equazioni di Navier-Stokes-Fourier

Formulazione canonica

- Il sistema di equazioni complessivo risulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \, \boldsymbol{u}) = 0 \tag{29}$$

$$\frac{\partial (\rho \, \boldsymbol{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + p \, \boldsymbol{I}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}_\nu \tag{30}$$

$$\frac{\partial (\rho \, E_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \, E_0 \, \boldsymbol{u} + p \, \boldsymbol{u}) = \nabla \cdot (-\boldsymbol{q}_\alpha + \boldsymbol{\Pi}_\nu \boldsymbol{u}) \tag{31}$$

- $\nu, \ \nu_B, \ \alpha \ [m^2 s^{-1}]$ sono i coefficienti macroscopici di trasporto e dipendono dall'interazione microscopica
- Nell'equazione dell'energia interna di stagnazione, esiste un termine di generazione di potenza termica $\boldsymbol{\Pi}_\nu \boldsymbol{u}$

Sistema di equazioni di Navier-Stokes-Fourier

Formulazione compatta

- Al fine di evidenziare le caratteristiche del precedente sistema di equazioni, possiamo introdurre due distinzioni:
  - la prima, tra le variabili conservate $\boldsymbol{h} = \rho\,(1, u_i, E_0)^T$, che costituiscono gli argomenti delle derivate parziali rispetto al tempo, e quelle primitive $\tilde{\boldsymbol{h}} = (\rho, u_i, T)^T$, i cui gradienti compaiono nelle definizioni del tensore degli sforzi e del vettore del flusso termico;
  - la seconda, tra i flussi convettivi $\boldsymbol{F}_C$, che sono gli stessi presenti nel sistema di equazioni di Eulero, e quelli diffusivi $\boldsymbol{F}_D$, che descrivono a livello macroscopico le deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale
- Tenendo conto di queste distinzioni, vale la scrittura compatta

$$\partial_t\, \boldsymbol{h} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}_C = \nabla \cdot \boldsymbol{F}_D(\tilde{\boldsymbol{h}}, \nu, \alpha) \tag{32}$$

Numeri adimensionali significativi

Gradienti spaziali e derivate temporali

- Si definisce la lunghezza caratteristica L in modo tale che

$$\partial\phi/\partial x_i \sim O(\phi/L) \tag{33}$$

oppure equivalentemente

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\left|\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x})/\partial x_i}{\phi(\boldsymbol{x})/L}\right| \leq k \sim O(1) \tag{34}$$

dove ϕ è una generica variabile caratteristica del deflusso

- La lunghezza caratteristica L serve a quantificare l'ordine di grandezza dei gradienti spaziali di una qualsiasi variabile (dipendente) del deflusso $\rightarrow$ Introducendo $\hat{x}_i = x_i/L$, risulta $\partial\phi/\partial\hat{x}_i \sim O(\phi)$
- In modo analogo si può procedere a definire il tempo caratteristico τ per le derivate temporali

Numeri adimensionali significativi

Variabili indipendenti

- Introduciamo la densità ρ_0 e la velocità U, in modo tale che $\hat{\rho} = \rho/\rho_0 \sim O(1)$ e $\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}/U \sim O(\mathbf{1})$ in tutto il dominio del deflusso
- Per quanto riguarda l'energia interna, vale la seguente relazione

$$c_S = \sqrt{\gamma\, R\, T} = \sqrt{\gamma\,(\gamma - 1)\, e} \sim \sqrt{e} \tag{35}$$

  che dimostra come la velocità del suono c_S sia la grandezza più idonea per rendere adimensionale l'energia interna, dal momento che $\hat{e} = e/c_S^2 \sim O(1)$
- Infine per quanto riguarda la pressione risulta $\hat{p} = p/(\rho_0\, c_S^2) \sim O(1)$, mentre per l'energia interna di stagnazione $\hat{E}_0 = E_0/c_S^2 = \hat{e} + (U/c_S)^2\, \hat{\boldsymbol{u}}^2/2 \sim O(1)$

Numeri adimensionali significativi

Equazioni adimensionali

Introducendo le precedenti definizioni nelle Eq. (29, 30, 31) si ottiene

$$\frac{\mathrm{St}}{\mathrm{Ma}}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\hat{t}} + \hat{\nabla}\cdot(\hat{\rho}\,\hat{\boldsymbol{u}}) = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\mathrm{St}}{\mathrm{Ma}}\frac{\partial(\hat{\rho}\,\hat{\boldsymbol{u}})}{\partial\hat{t}} + \hat{\nabla}\cdot(\hat{\rho}\,\hat{\boldsymbol{u}}\otimes\hat{\boldsymbol{u}}) + \frac{1}{\mathrm{Ma}^2}\hat{\nabla}\hat{p} = \hat{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\hat{\boldsymbol{\Pi}}_\nu\right) \tag{37}$$

$$\frac{\mathrm{St}}{\mathrm{Ma}}\frac{\partial(\hat{\rho}\,\hat{E}_0)}{\partial\hat{t}} + \hat{\nabla}\cdot\left(\hat{\rho}\,\hat{E}_0\,\hat{\boldsymbol{u}} + \hat{p}\,\hat{\boldsymbol{u}}\right) = = \hat{\nabla}\cdot\left(-\frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\hat{\boldsymbol{q}}_\alpha + \frac{\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\hat{\boldsymbol{\Pi}}_\nu\hat{\boldsymbol{u}}\right) \tag{38}$$

dove $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_\nu = \hat{\rho}\left(\hat{\nabla}\hat{\boldsymbol{u}} + \hat{\nabla}\hat{\boldsymbol{u}}^T - 2/3\,\hat{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{I}\right) + \hat{\rho}\,(\nu_B/\nu)\,\hat{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{I}$

mentre $\hat{\boldsymbol{q}}_\alpha = -\gamma\,\hat{\rho}\,\hat{\nabla}\hat{e}$

Numeri adimensionali significativi

Significato fisico dei numeri adimensionali

- Nelle relazioni precedenti compaiono **4** numeri adimensionali: 2 sono presenti anche nel sistema di equazioni adimensionali di Eulero (in particolare, il numero di Strouhal St $= L/(\tau\, c_s)$ descrive la dinamica temporale ed il numero di Mach Ma $= U/c_s$ rappresenta la grandezza relativa della velocità di deflusso), mentre 2 sono legati ai coefficienti di trasporto diffusivo (in particolare, il numero di Reynolds Re $= (L\,U)/\nu$ dipende dalla viscosità cinematica ed il numero di Prandtl Pr $= \nu/\alpha$ dal rapporto della precedente rispetto alla diffusività termica)
- Tutti i regimi fisici di deflusso descritti dalle precedenti equazioni possono essere classificati in relazione all'ordine di grandezza di questi **4** numeri adimensionali

Sistema di equazioni di Navier-Stokes-Fourier

Regimi di deflusso

1. Numero Strouhal St
   - Propagazione di onde sonore: $\tau \sim L/c_s \rightarrow$ St $\sim O(1)$
   - Fenomeno diffusivo: $\tau \sim L^2/\nu \rightarrow$ St $\sim$ Kn $\sim O(\epsilon)$
   - Fenomeno convettivo: $\tau \sim L/U \rightarrow$ St $\sim$ Ma
2. Numero di Mach Ma
   - Regime comprimibile: Ma $\sim O(1)$
   - Regime incomprimibile: Ma $\sim O(\epsilon)$
   - Regime di Stokes (fenomeno lineare): Ma $\sim O(\epsilon^2)$
3. In virtù della relazione di von Karman, ossia Ma $\sim$ Re Kn sussiste Re $\sim$ Ma/Kn dove Kn $\sim O(\epsilon)$
4. Per la maggior parte dei gas, sussiste Pr $\sim O(1)$

- Escludendo i fenomeni legati alla presenza dello strato limite, sembrano apparire naturalmente **9** regimi possibili di deflusso

Sistema di equazioni di Navier-Stokes-Fourier

Derivazione del limite incomprimibile

- Nel caso di bassi numeri di Mach $\mathrm{Ma} \sim \epsilon\, \hat{\mathrm{Ma}}$ e per fenomeni prevalentemente diffusivi $\mathrm{St}/\mathrm{Ma} \sim O(1)$, segue $\mathrm{Re} \sim \hat{\mathrm{Re}}$ e conseguentemente

$$\frac{\hat{\mathrm{St}}}{\hat{\mathrm{Ma}}}\,\frac{\partial(\hat{\rho}\,\hat{\boldsymbol{u}})}{\partial \hat{t}} + \hat{\nabla}\cdot(\hat{\rho}\,\hat{\boldsymbol{u}}\otimes\hat{\boldsymbol{u}}) + \frac{1}{\epsilon^2\,\hat{\mathrm{Ma}}^2}\,\hat{\nabla}\hat{p} = \hat{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\hat{\mathrm{Re}}}\,\hat{\boldsymbol{\Pi}}_\nu\right) \quad (39)$$

- Supponiamo di esprimere il campo di pressione come $\hat{p} = \hat{p}^{(0)} + \epsilon\,\hat{p}^{(1)} + \epsilon^2\,\hat{p}^{(2)} + \ldots$
- Dall'Eq. (39) segue immediatamente che $p^{(0)}$ e $p^{(1)}$ devono essere delle costanti in modo che sussista $\hat{\nabla}\hat{p} \sim \epsilon^2\,\hat{\nabla}\hat{p}^{(2)}$
- Poiché $\hat{p} = (\gamma - 1)\,\hat{\rho}\,\hat{e}$, anche $\hat{\rho}^{(0)}$, $\hat{\rho}^{(1)}$, $\hat{e}^{(0)}$ ed $\hat{e}^{(1)}$ dovranno essere delle costanti

Sistema di equazioni di Navier-Stokes-Fourier

Limite incomprimibile

- Introducendo le precedenti assunzioni nelle Eq. (36, 37, 38) si ottiene

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial \hat{t}} + \hat{\nabla} \cdot (\hat{\boldsymbol{u}} \otimes \hat{\boldsymbol{u}}) + \hat{\nabla} \hat{p}' = \hat{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{Re}} \hat{\boldsymbol{\Pi}}'_{\nu} \right) \tag{41}$$

$$\frac{\partial \hat{E}_0}{\partial \hat{t}} + \hat{\nabla} \cdot \left(\hat{E}_0 \, \hat{\boldsymbol{u}} + \hat{p}' \, \hat{\boldsymbol{u}} \right) = \hat{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}} \hat{\boldsymbol{q}}'_{\alpha} \right) \tag{42}$$

dove $\hat{p}' = \hat{p}/\hat{\rho}$, $\hat{\boldsymbol{\Pi}}'_{\nu} = \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\nu}/\hat{\rho}$ ed infine $\hat{\boldsymbol{q}}'_{\alpha} = \hat{\boldsymbol{q}}_{\alpha}/\hat{\rho}$

- Nel dedurre le precedenti equazioni in funzione delle variabili originarie, si è fatto uso della seguente proprietà

$$\epsilon^2 \, \hat{\nabla} \cdot \left[\hat{p}^{(2)} \hat{\boldsymbol{u}} \right] = \hat{\nabla} \cdot (\hat{p} \hat{\boldsymbol{u}}) - \hat{p}^{(0)} \hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\nabla} \cdot (\hat{p} \hat{\boldsymbol{u}}) \tag{43}$$

Sistema di equazioni di Navier-Stokes-Fourier

Commenti conclusivi

- Il sistema di equazioni di Navier-Stokes-Fourier dipende dalla natura specifica del fluido, in quanto i coefficienti di trasporto sono le manifestazioni macroscopiche delle interazioni microscopiche
- Benché la deduzione presentata in queste note faccia riferimento soltanto al caso di gas monoatomici, la struttura delle equazioni di Navier-Stokes-Fourier è sufficientemente generale da includere una vastissima classe di fluidi (sia gassosi che liquidi)
- Questo dimostra come la struttura delle equazioni dipende solo dalle interazioni di tipo più semplice, mentre le restanti concorrono a determinare il valore dei coefficienti di trasporto

Sommario

1. Cenni alla Termomeccanica dei Continui
   - Dai sistemi discreti ai sistemi continui: equilibrio locale
   - Deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale
   - Irreversibilità
   - Equazioni integrali di bilancio
2. Cenni alla Trasmissione del Calore
   - Convezione
   - Conduzione
   - Irraggiamento

In questa lezione...

Equazione dell'energia meccanica e dell'entalpia per corpo continuo. Primo principio della termodinamica per un corpo continuo. Generalizzazione del concetto di entropia per corpo continuo. Generalizzazione della relazione di Gibbs. Secondo principio della termodinamica per un corpo continuo. Cenni alla termodinamica dei processi irreversibili.

Grandezze conservate

- Fino ad ora abbiamo visto delle equazioni del tipo

$$\partial_t \boldsymbol{h} + \nabla \cdot (\boldsymbol{F}_C - \boldsymbol{F}_D) = 0 \tag{44}$$

- La precedente equazione significa che la variazione temporale della generica grandezza contenuta nel vettore $\boldsymbol{h}$ è dovuta esclusivamente ai flussi (convettivi F_C oppure diffusivi F_D) che avvengono attraverso il generico infinitesimo elemento di volume $d\boldsymbol{x} \equiv dV \in \mathbb{R}$
- Questo significa che l'integrale esteso a tutto il dominio Ω

$$\partial_t \int_\Omega \boldsymbol{h} dV + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{F}_C - \boldsymbol{F}_D)\, \boldsymbol{n}\, dA = 0 \tag{45}$$

non è influenzato dai fenomeni che avvengono all'interno del dominio stesso $\rightarrow$ Si dice che le grandezze $\boldsymbol{h}$ sono conservate

Equazione dell'energia meccanica

- Riprendiamo l'equazione della quantità di moto ed aggiungiamo una forzante conservativa $\boldsymbol{a} = -\nabla\phi(\boldsymbol{x})$

$$\frac{\partial(\rho\,\boldsymbol{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\,\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} + p\,\boldsymbol{I}) = \nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_\nu + \rho\,\boldsymbol{a} \tag{46}$$

- Richiamando l'equazione di continuità

$$\rho\,\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho\,(\nabla\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u} + \nabla p = \nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_\nu + \rho\,\boldsymbol{a} \tag{47}$$

- Moltiplicando Eq. (47) per $\boldsymbol{u}$ e tendo conto che $\boldsymbol{u}\cdot[(\nabla\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{u}\cdot[\nabla(\boldsymbol{u}^2/2)]$ si ottiene

$$\rho\,\frac{De_m}{Dt} = \rho\,\frac{\partial e_m}{\partial t} + \rho\,\boldsymbol{u}\cdot\nabla e_m = [\nabla\cdot(-p\,\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Pi}_\nu)]\cdot\boldsymbol{u} \tag{48}$$

dove $e_m = \boldsymbol{u}^2/2 + \phi(\boldsymbol{x})$ è detta energia meccanica

Equazione dell'energia meccanica

Significato fisico

- La precedente Eq. (48) può essere semplificata

$$\rho \frac{De_m}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (\mathbf{\Pi}\, \boldsymbol{u}) - \mathbf{\Pi} : \nabla \boldsymbol{u} \qquad (49)$$

  dove $\mathbf{\Pi} = -p\, \boldsymbol{I} + \mathbf{\Pi}_\nu$ è il tensore (totale) degli sforzi (si è fatto uso della proprietà di simmetria $\mathbf{\Pi}^T = \mathbf{\Pi}$)
- Introducendo i risultati precedenti nelle equazioni originarie si ottiene

$$\frac{\partial(\rho\, e_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{u}\, e_m - \mathbf{\Pi}\, \boldsymbol{u}) = -\mathbf{\Pi} : \nabla \boldsymbol{u} \qquad (50)$$

- Chiaramente l'energia meccanica non è una grandezza conservata, ma dipende dai fenomeni interni del sistema

Equazione dell'energia interna

- Riprendiamo l'equazione della energia generalizzata

$$\frac{\partial(\rho\, E_0)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\, E_0\, \boldsymbol{u} + p\, \boldsymbol{u}) = \nabla\cdot(-\boldsymbol{q}_\alpha + \boldsymbol{\Pi}_\nu \boldsymbol{u}) + \rho\, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u} \quad (51)$$

- Utilizzando l'equazione di continuità si ottiene

$$\rho\, \frac{DE}{Dt} = \nabla\cdot(-\boldsymbol{q}_\alpha + \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{u}) \quad (52)$$

dove $E = E_0 + \phi(\boldsymbol{x}) = e + \boldsymbol{u}^2/2 + \phi(\boldsymbol{x}) = e + e_m$

- Mediante le Eq. (50, 52) è possibile dedurre l'equazione per l'energia interna

$$\frac{\partial(\rho\, e)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\, \boldsymbol{u}\, e + \boldsymbol{q}_\alpha) = +\boldsymbol{\Pi} : \nabla\boldsymbol{u} \quad (53)$$

- Chiaramente l'energia interna non è una grandezza conservata, ma dipende dai fenomeni interni del sistema

Trasferimento di potenza

- Prese singolarmente, l'energia meccanica e l'energia interna non sono grandezze conservate, mentre invece la loro somma, ossia l'energia totale $E = e_m + e$, presenta questa caratteristica
- Questo significa che esiste un trasferimento di energia nell'unità di tempo, ossia un trasferimento di potenza, uguale in modulo ma contrario in segno, tra la riserva di energia meccanica e quella di energia interna ("termica"), pari a $|\mathbf{\Pi} : \nabla \boldsymbol{u}|\, dV$
- Il problema è capire se il trasferimento di potenza avviene
  1. sempre irreversibilmente dalla riserva di energia meccanica alla riserva di energia interna del sistema ($\mathbf{\Pi} : \nabla \boldsymbol{u}\, dV > 0$),
  2. sempre irreversibilmente viceversa ($\mathbf{\Pi} : \nabla \boldsymbol{u}\, dV < 0$),
  3. oppure reversibilmente in ambo i casi precedenti

Trasferimento di potenza

Termine baroclinico e termine funzione della viscosità di volume

- Possiamo discriminare tre contributi distinti

$$\mathbf{\Pi} : \nabla \boldsymbol{u} = \Sigma_p + \Sigma_{II} + \Sigma_\nu \tag{54}$$

dove

$$\Sigma_p = \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \tag{55}$$

$$\Sigma_{II} = \rho\,(\nu_B - 2/3\,\nu)\,(\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2 \tag{56}$$

$$\Sigma_\nu = \rho\,\nu\,(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) : \nabla \boldsymbol{u} \tag{57}$$

- Σ_p è reversibile e dipende dal termine $D\rho/Dt$
- Σ_{II} è irreversibile, ma il segno dipende dal valore del secondo coefficiente di viscosità, ossia $\nu_{II} = \nu_B - 2/3\,\nu$ (per i gas monoatomici $\nu_B = 0$ e $\nu_{II} = -2/3\,\nu < 0$)

Trasferimento di potenza

Termine funzione della viscosità principale

- Il tensore di velocità $\mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{u}} = \nabla \boldsymbol{u}$ può essere scisso in due tensori distinti $\mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{u}} = \mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{u}}^D + \mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{u}}^V$: il primo simmetrico $\mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{u}}^D = (\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T)/2$ è detto tensore di deformazione, mentre il secondo antisimmetrico $\mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{u}}^V = (\nabla \boldsymbol{u} - \nabla \boldsymbol{u}^T)/2$ è detto tensore di vorticità.
- Tenendo conto che $\mathbf{\Pi}_\nu = 2\,\rho\,\nu\,\mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{u}}^D$ e che per definizione $\mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{u}}^D : \mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{u}}^V = 0$ segue necessariamente

$$\Sigma_\nu = 2\,\rho\,\nu\,\mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{u}}^D : \mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{u}}^D \geq 0 \tag{58}$$

- Quindi Σ_ν rappresenta un trasferimento di potenza irreversibile dalla riserva di energia meccanica alla riserva di energia interna del sistema

Formulazione entalpica

- Nell'analisi dei sistemi ingegneristici (in particolare quelli con deflusso) può risultare utile definire la seguente quantità detta entalpia $h = e + p/\rho$
- Si tratta di ragioni di convenienza computazionale nei calcoli tecnici, ma il contenuto di informazioni di questa grandezza è identico a quello dell'energia interna
- Alla luce della definizione, risulta

$$\frac{\partial(\rho\, h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{u}\, h + \boldsymbol{q}_\alpha) = \frac{Dp}{Dt} + \Sigma_{II} + \Sigma_\nu \qquad (59)$$

- Quindi l'equazione dell'entalpia è molto simile a quella dell'energia interna Eq. (53), ma se ne differenzia per il termine relativo al trasferimento baroclinico di potenza

Irreversibilità

- L'individuazione di termini monotoni, ossia eventi un segno univocamente determinato, nelle equazioni della termomeccanica dei continui ha una fondamentale rilevanza pratica, perché consente di enunciare delle proprietà generali, valide per ogni deflusso
- Visto il loro comportamento univoco, questi termini vengono detti irreversibilità del deflusso
- Il termine $\Sigma_\nu \geq 0$ è uno di questi termini, ma è limitato a descrivere gli effetti dovuti all'azione degli sforzi viscosi
- E' possibile identificare un analogo termine in grado di descrivere gli effetti dovuti al flusso termino, ossia, in analogia, un termine $\Sigma_\alpha \geq 0$?

Equazione dell'entropia

Relazione di Gibbs nella Termodinamica di Equilibrio

- La nozione di entropia è definibile in modo rigoroso solamente nel contesto della Termodinamica di Equilibrio, ossia in assenza di deviazioni microscopiche dalle condizioni di equilibrio globale, ossia nel caso in cui qualsiasi gradiente spaziale e temporale risulti trascurabile rispetto alle scale di descrizione (notare che "equilibrio globale" $\subset$ "equilibrio locale")
- In questo caso, sussiste la relazione di Gibbs

$$T\,ds = de + p\,d(1/\rho) \tag{60}$$

dove i differenziali esatti, vanno intesi come differenze infinitesime tra i valori delle rispettive funzioni di stato, calcolate in condizioni di equilibrio prossime tra loro

Equazione dell'entropia

Generalizzazione nel contesto della Termodinamica dei Processi Irreversibili

- Viceversa, nel contesto delle Termodinamica dei Processi Irreversibili, si assume (arbitrariamente) una relazione "simile" (in senso molto lato) alla precedente, quale definizione di entropia generalizzata, ossia

$$T\,\frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p\,\frac{D(1/\rho)}{Dt} \tag{61}$$

dove il membro di destra è una funzione esclusiva dell'energia interna e della densità, in virtù anche della legge costitutiva $p = p(e, \rho)$

- Ricordando l'Eq. (53) e la definizione (54) si ottiene

$$\rho\,T\,\frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q}_\alpha + \Sigma_{II} + \Sigma_\nu \tag{62}$$

Equazione dell'entropia

Irreversibilità dovuta allo scambio termico

- Nel caso di deflussi caratterizzati da bassi numeri di Mach, allora $(\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2 \approx 0$ e conseguentemente, in base alla Eq. (56), il termine funzione della viscosità di volume può essere trascurato, ossia $\Sigma_{II} \approx 0$
- E' possibile riscrivere l'Eq. (62) come

$$\frac{\partial(\rho\, s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{u}\, s + \boldsymbol{q}_\alpha/T) = (\Sigma_\alpha + \Sigma_\nu)\,/T \geq 0 \qquad (63)$$

dove

$$\Sigma_\alpha = T\, \boldsymbol{q}_\alpha \cdot \nabla(1/T) = \lambda/T\, \nabla T \cdot \nabla T \geq 0 \qquad (64)$$

- Dalla precedente equazione, emerge naturalmente la definizione di un flusso entropico $\boldsymbol{q}_\alpha/T$, associato al trasferimento di entropia

Equazione dell'entropia

Minimizzazione vincolata

- Dal momento che la generazione di entropia è un indice della diminuzione di capacità di generare lavoro utile, possiamo utilizzare la precedente equazione per localizzare nel deflusso che avviene all'interno di un determinato dispositivo (es. valvola, compressore,...), quali sono le regioni che contribuiscono maggiormente all'inefficienza complessiva
- Questo ci consente di utilizzare un criterio quantitativo per procedere ad una ottimizzazione del dispositivo: si tratta di una ottimizzazione vincolata (minimizzazione vincolata di $\Sigma = \Sigma_\alpha + \Sigma_\nu$, dovuto agli sforzi viscosi ed al flusso termico) in modo da soddisfare le specifiche del dispositivo

Equazione dell'exergia

- Ai fini dell'ottimizzazione vincolata, è possibile utilizzare equivalentemente l'equazione differenziale dell'exergia
- Moltiplicando l'Eq. (63) per la temperatura T_0 del termostato ambiente e sottraendo il risultato all'Eq. (51) si ottiene

$$\frac{\partial(\rho\, A)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, b\, \boldsymbol{u} + \Theta\, \boldsymbol{q}_\alpha - \boldsymbol{\Pi}_\nu \boldsymbol{u}) = -\frac{T_0}{T}\, \Sigma \leq 0 \qquad (65)$$

dove $A = E - s\, T_0$ è exergia interna totale, $b = A + pv$ è exergia totale e $\Theta = 1 - T_0/T$ è il fattore di Carnot locale

- In questo caso, si tratta di minimizzare le perdite di exergia dovute alle irreversibilità del deflusso, dal momento che $-T_0/T\, \Sigma \leq 0$

Sommario

1 Cenni alla Termomeccanica dei Continui
- Dai sistemi discreti ai sistemi continui: equilibrio locale
- Deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale
- Irreversibilità
- Equazioni integrali di bilancio

2 Cenni alla Trasmissione del Calore
- Convezione
- Conduzione
- Irraggiamento

In questa lezione...

Deduzione delle equazioni integrali di bilancio per sistemi chiusi e per sistemi aperti. Formulazione tecnica delle equazioni integrali. Significato fisico delle irreversibilità. Calcolo esatto delle irreversibilità e loro stima mediante formule pratiche.

Equazioni integrali di bilancio

Introduzione

- Dal punto di vista tecnico, il grado di dettaglio delle equazioni differenziali della termomeccanica del continuo può risultare qualche volta eccessivo, oppure l'estensione del dominio fisico, che si intende analizzare, può richiedere un onere computazionale insostenibile
- Pertanto risulta utile considerare delle equazioni integrali di bilancio per avere una stima complessiva del fenomeno
- Questa stima è piuttosto semplice per quanto riguarda le grandezze conservate, mentre risulta di difficile conduzione nel caso di grandezze non conservante, che dipendono da quanto succede localmente nel dominio e dovranno essere calcolate mediante opportune relazioni fenomenologiche di chiusura

Integrazione dell'equazione dell'energia

Termini di scambio

- Riprendiamo l'equazione della energia (52)

$$\nabla \cdot (-\boldsymbol{q}_\alpha + \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{u}) = \frac{\partial(\rho\, E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, E\, \boldsymbol{u}) \tag{66}$$

dove $\boldsymbol{\Pi} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Pi}_\nu$ e $E = e + e_m$

- Calcolando l'integrale di volume esteso a tutto il dominio V del dispositivo, i termini che competono al flusso termico ed al tensore degli sforzi possono essere semplificate mediante il teorema di Gauss

$$\Phi(t) = -\int_{\partial V} \nabla \cdot \boldsymbol{q}_\alpha dV = -\int_{\partial V} \boldsymbol{q}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}\, dA \tag{67}$$

$$W(t) = -\int_{\partial V} \nabla \cdot (\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{u}) dV = -\int_{\partial V} (\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n}\, dA \tag{68}$$

Integrazione dell'equazione dell'energia

Termini inerziali

- Per quanto riguarda la variazione temporale nel secondo membro dell'Eq. (66), compaiono le seguenti grandezze

$$U(t) = \int_V \rho\, e(t, \boldsymbol{x})\, dV \tag{69}$$

$$E_m(t) = \int_V \rho\, e_m(t, \boldsymbol{x})\, dV \tag{70}$$

- Come si vede chiaramente dalle precedenti definizioni, il punto chiave delle equazioni integrali consiste nel prescindere dall'analisi puntuale del fenomeno, e di soffermarsi invece sull'andamento nel tempo di opportune grandezze medie volumetriche, i.e. $e(t, \boldsymbol{x}) \rightarrow U(t)$

Integrazione dell'equazione dell'energia

Termini di flusso

- E' possibile identificare nel bordo del dispositivo ∂V un numero finito N di aperture A_i, in modo tale che

$$\int_V \nabla \cdot (\rho\, E\, \boldsymbol{u})\, dV = \int_{\partial V} \rho\, E\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, dA =$$
$$\sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} \rho\, E\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, dA = \sum_{i=1}^{N} G_i\, (e + e_m)_i \qquad (71)$$

dove

$$E_i(t) = (e + e_m)_i = 1/G_i \int_{A_i} \rho\, E\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, dA \qquad (72)$$

e $G_i = \int_{A_i} \rho\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, dA$ è la portata attraverso la generica apertura A_i di ingresso ($G_i \leq 0$) oppure di uscita ($G_i \geq 0$) del dispositivo

Primo Principio della Termodinamica

Formulazione in funzione della potenza meccanica totale

- Tenendo conto delle definizioni precedenti

$$\Phi - W = \frac{d}{dt}(U + E_m) + \sum_{i=1}^{N} G_i \left(e + e_m\right)_i \tag{73}$$

- Il problema della precedente equazione è che la potenza meccanica totale W contiene un contributo dovuto al tensore di deformazione ed uno dovuto all'azione delle forze superficiali in corrispondenza delle aperture
- Nel caso in cui non esistano delle aperture, ossia il sistema in esame sia chiuso, allora l'equazione precedente si riduce a

$$\Phi - W = \frac{d}{dt}(U + E_m) \tag{74}$$

Primo Principio della Termodinamica

Formulazione in funzione della potenza meccanica tecnica

- La potenza meccanica totale può essere scomposta in

$$W = -\int_{\partial V} (\mathbf{\Pi} \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} \, dA = W_{sp} + W_t \tag{75}$$

$$W_{sp} = \int_{\partial V} p \, v \, \rho \, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \, dA = \sum_{i=1}^{N} G_i \, (pv)_i \tag{76}$$

$$W_t = -\int_{\partial V} (\mathbf{\Pi}_\nu \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} \, dA \tag{77}$$

- Il calcolo delle forze superficiali in corrispondenza delle aperture è incluso nel calcolo dell'entalpia

$$\Phi - W_t = \frac{d}{dt}(U + E_m) + \sum_{i=1}^{N} G_i \, (h + e_m)_i \tag{78}$$

Integrazione dell'equazione dell'entropia

Termini di scambio

- Integrando l'equazione della entropia si ottiene

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{q}_\alpha/T)+(\Sigma_\alpha+\Sigma_\nu)/T=\frac{\partial(\rho\,s)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\,\boldsymbol{u}\,s) \quad (79)$$

- E' possibile identificare nel bordo del dispositivo ∂V un numero finito M di superfici di scambio termico A_j, tali che

$$\int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{q}_\alpha/T)\,dV=\sum_{j=1}^{M}\int_{A_j}(\boldsymbol{q}_\alpha/T)\cdot\boldsymbol{n}dA=\sum_{j=1}^{M}A_j\,(q_\alpha/T)_j \quad (80)$$

dove

$$(q_\alpha/T)_j=1/A_j\int_{A_j}(\boldsymbol{q}_\alpha/T)\cdot\boldsymbol{n}\,dA \quad (81)$$

Secondo Principio della Termodinamica

- Integriamo l'equazione della entropia si ottiene

$$-\sum_{j=1}^{M} A_j \left(q_\alpha/T\right)_j + \Psi = \frac{dS}{dt} + \sum_{i=1}^{N} G_i \, s_i \tag{82}$$

dove $\Psi = \int_V 1/T \left(\Sigma_\alpha + \Sigma_\nu\right) dV \geq 0$ e $S = \int_V \rho \, s \, dV$

- Se per qualsiasi T appartenente ad A_j vale una certa omogeneità, i.e. $T \approx T_j = 1/A_j \int_{A_j} T dA$, allora

$$A_j \left(q_\alpha/T\right)_j \approx -\Phi_j/T_j \tag{83}$$

e conseguentemente

$$\sum_{j=1}^{M} \frac{\Phi_j}{T_j} + \Psi = \frac{dS}{dt} + \sum_{i=1}^{N} G_i \, s_i \tag{84}$$

Integrazione dell'equazione dell'energia meccanica

- Nel caso di deflussi caratterizzati da bassi numeri di Mach, allora $(\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2 \approx 0$ e conseguentemente, l'equazione dell'energia meccanica (49) può essere semplificata

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\Pi}\, \boldsymbol{u}) - \Sigma_p - \Sigma_\nu = \frac{\partial(\rho\, e_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{u}\, e_m) \tag{85}$$

- Integrando sul volume V l'equazione precedente si ottiene

$$-W - \int_V \Sigma_p\, dV - W_a = \frac{dE_m}{dt} + \sum_{i=1}^{N} G_i\, (e_m)_i \tag{86}$$

dove

$$W_a = \int_V \Sigma_\nu\, dV \geq 0 \tag{87}$$

è la potenza meccanica dissipata per attrito

Integrazione dell'equazione dell'energia meccanica

Potenza meccanica di spostamento

- La potenza meccanica di spostamento W_{sp} può essere semplificata

$$W_{sp} = \int_{\partial V} p\, v\, \rho\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, dA = \frac{d\left[p_v(t) V(t)\right]}{dt} = \frac{d\left(p_v\, V\right)}{dt} \tag{88}$$

dove $p_v(t) = 1/V \int_V p(t, \boldsymbol{x}) dV \approx p_i$ per qualsiasi superficie A_i del bordo ∂V

- Procedendo allo stesso modo per il termine residuo

$$\int_V \Sigma_p\, dV \approx -p_v \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{u}\, dV = -p_v\, \frac{d\, V}{dt} \tag{89}$$

Equazione integrale dell'energia meccanica

- L'equazione integrale dell'energia meccanica risulta

$$-W_t - W_a - V\frac{dp_v}{dt} = \frac{dE_m}{dt} + \sum_{i=1}^{N} G_i\,(e_m)_i \qquad (90)$$

- Sottraendo la precedente equazione alla Eq. (78) che esprime il Primo Principio della Termodinamica, si ottiene

$$\Phi + W_a + V\frac{dp_v}{dt} = \frac{dU}{dt} + \sum_{i=1}^{N} G_i\,h_i \qquad (91)$$

La sommatoria dei flussi termici entranti, maggiorata dalla potenza dissipata per attrito e dal termine di riscaldamento dovuto alla compressione, può indurre un incremento dell'energia interna del corpo e/o una variazione dei flussi di entalpia

Relazione tra irreversibilità ed attrito

Teorema di Guy-Stodola

- Nel caso in cui $T \approx T_v = 1/V \int_V T(t, \boldsymbol{x})\, dV$, allora è possibile stabilire una relazione tra le irreversibilità che compaiono nell'equazione integrale del Secondo Principio della Termodinamica e la potenza meccanica dissipata per attrito
- Se vale $T \approx T_v$ allora

$$\Psi = \int_V 1/T\,(\Sigma_\alpha + \Sigma_\nu)\, dV \approx 1/T_v \int_V \Sigma_\nu\, dV = W_a/T_v \tag{92}$$

- Il precedente risultato si chiama anche teorema di Guy-Stodola, ovviamente nel caso in cui $T(t, \boldsymbol{x}) = T_v(t)$, ed è utile per il calcolo semplificato delle irreversibilità

Relazione tra irreversibilità ed attrito

Esempio

- Consideriamo il seguente esempio: deflusso di olio per trascinamento, all'interno di un'intercapedine piana (normale all'asse y), per effetto del moto relativo delle due superfici (secondo l'asse x)
- In questo caso, l'Eq. (58) si riduce a

$$\Sigma_\nu = \frac{1}{2}\,\rho\,\nu\,\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 \tag{93}$$

e, conseguentemente, dal momento che $\tau_u = \rho\,\nu\,(\partial u_x/\partial y)$ è costante, segue

$$\Psi = \frac{W_a}{T_v} = \frac{1}{T_v}\int_V \Sigma_\nu\,dV = \frac{\tau_u^2\,V}{2\,T_v\,\rho\,\nu} \tag{94}$$

dove V è il volume dell'intercapedine

Equazioni integrali di bilancio

Commenti conclusivi

- E' possibile dedurre le equazioni integrali di bilancio a partire dal sistema di equazioni di Navier-Stokes-Fourier, se e solo se si considerano deflussi con bassi numeri di Mach, ossia tali per cui $(\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2 \approx 0$
- Dal punto di vista cinetico, il numero di Mach descrive quanto il sistema si discosta localmente dalle condizioni di equilibrio globale ed, in particolare, un valore piccolo del numero di Mach corrisponde al limite incomprimibile
- Pertanto le equazioni integrali presuppongono che il sistema si discosti poco dalle condizioni di equilibrio globale (trasformazioni infinitamente lente ossia gradienti spaziali spaziali infinitamente piccoli)