Sommario

1 Cenni alla Termomeccanica dei Continui
- Dai sistemi discreti ai sistemi continui: equilibrio locale
- Deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale
- Irreversibilità
- Equazioni integrali di bilancio

2 Cenni alla Trasmissione del Calore
- Convezione
- Conduzione
- Irraggiamento

In questa lezione...

Meccanismi fondamentali di scambio termico (convezione, conduzione ed irraggiamento). Scambio termico convettivo. Concetto di strato limite ed analogia di Reynolds per il trasporto termico. Cenni al fenomeno della turbolenza. Scale caratteristiche del fenomeno, deduzione delle equazioni per le quantità medie e problema della chiusura. Ipotesi della viscosità addizionale indotta dalla turbolenza e relativa modellazione.

Trasmissione del calore per convezione

Trasporto di energia nei fluidi in movimento

- Il trasporto di energia nei fluidi in movimento può essere distinto in due categorie
  - convezione naturale, in cui il movimento del fluido è indotto da differenze di densità tra masse di fluido a temperatura diversa che si trovano alla stessa quota idrostatica, per effetto delle forze di galleggiamento
  - convezione forzata, in cui il movimento del fluido è indotto da apparecchiature, come pompe e ventilatori, od è riconducibile indirettamente ad agenti esterni come ad esempio il vento (la cui origine è però riconducibile alla prima categoria)
- Le equazioni della termomeccanica dei continui consentono di descrivere compiutamente entrambe le precedenti fenomenologie

Trasmissione del calore per convezione

Ulteriori concetti chiave

- Rispetto alla trattazione fin qui considerata, esistono due ulteriori concetti chiave che occorre considerare per la caratterizzazione del trasporto di energia nei fluidi in movimento:
  - il concetto di strato limite, ossia come, sotto opportune condizioni, si possono semplificare le equazioni della termomeccanica in prossimità dei corpi solidi, in modo da poter dedurre correlazioni analitiche in merito allo scambio termico ed allo sforzo viscoso;
  - il concetto di turbolenza, ossia come, sotto opportune condizioni, le soluzioni stazionarie della termomeccanica diventano instabili e, mediante biforcazioni successive, il campo di moto diventa ricorsivamente sempre più complesso.

Sistema di equazioni di Navier-Stokes-Fourier

Semplificazione del limite incomprimibile

- Possiamo ulteriormente semplificare le equazioni (36, 37) tenendo conto che $\hat{\nabla} \cdot (\hat{\boldsymbol{u}} \otimes \hat{\boldsymbol{u}}) = (\hat{\nabla}\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}} + \hat{\boldsymbol{u}}\,(\hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{u}})$ e che $\hat{\nabla} \cdot (\hat{\nabla}\hat{\boldsymbol{u}}^T) = \hat{\nabla}(\hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{u}})$, da cui segue

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = 0 \tag{95}$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial \hat{t}} + \left(\hat{\nabla}\hat{\boldsymbol{u}}\right)\hat{\boldsymbol{u}} + \hat{\nabla}\hat{p}' = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\hat{\nabla}^2\hat{\boldsymbol{u}}, \tag{96}$$

- Anche l'equazione (38) può essere semplificata assumendo che l'energia meccanica sia trascurabile rispetto a quella interna, ossia $\hat{e}_m \ll \hat{e}$, da cui segue

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\nabla}\hat{T} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\,\hat{\nabla}^2\hat{T} \tag{97}$$

dove $\gamma = c_v/c_p$ è il rapporto dei calori specifici

Concetto di strato limite

Introduzione

- Il concetto di strato limite consente di semplificare la risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes-Fourier suddividendo il deflusso in due regioni di distinte: una prima regione in cui il trasporto diffusivo è trascurabile ed una seconda in prossimità dei corpi solidi (detta appunto strato limite) in cui esso risulta prevalente
- La deduzione delle equazioni dello strato limite costituisce uno dei risultati più importanti della termomeccanica dei continui, perché consente di dedurre delle correlazioni analitiche per descrivere la soluzione
- Questa idea fu proposta da Prandtl nel 1904, all'età di 29 anni, durante una presentazione di circa 10 minuti nell'ambito di un congresso di matematici

Concetto di strato limite

Gradienti spaziali normali ad una superficie

- Consideriamo il deflusso di un fluido parallelamente ad una superficie piana (normale secondo l'asse y). Nel caso di alti numeri di Reynolds, l'analisi che ha portato alle Eq. (95, 96, 97), non è corretta perché queste tenderebbero al sistema di equazioni di Eulero, che non è compatibile con la condizione di velocità nulla a parte
- Si introduce una correzione relativa ai gradienti spaziali secondo l'asse normale

$$\partial\phi/\partial y \sim O(\phi/\delta) \sim O(\phi/L)/\epsilon \gg O(\phi/L) \tag{98}$$

dove δ è una dimensione caratteristica del deflusso normale alla superficie, tale che $\delta \ll L$ ossia $\delta/L \sim O(\epsilon)$, e conseguentemente $\partial\phi/\partial\hat{y} \sim (\partial\phi/\partial\check{y})/\epsilon \sim O(\phi)/\epsilon$

Concetto di strato limite

Conseguenza: ordine di grandezza di tutti i gradienti spaziali

- Introducendo la precedente correzione nella condizione di campo solenoidale si ottiene

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \check{y}} = 0 \tag{99}$$

da cui segue che, al fine di avere soluzioni non banali, la componente normale della velocità $\hat{v}$ deve essere piccola, ossia $\hat{v} = \epsilon\,\check{v}$ dove $\check{v} = v/V$ e $V/U \sim O(\epsilon)$

- Pertanto si ottengono le seguenti proprietà

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \sim O(1/\epsilon),\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \sim O(1),\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \sim O(1),\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \sim O(\epsilon) \tag{100}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \sim O(1/\epsilon^2),\ \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} \sim O(1/\epsilon),\ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} \sim O(1),\ \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} \sim O(\epsilon)$$

Semplificazioni nello strato limite

- Considerando le precedenti stime si ottiene

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\,\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \check{v}\,\frac{\partial \hat{u}}{\partial \check{y}} + \frac{\partial \hat{p}'}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{\epsilon^2}\,\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \check{y}^2}\right) \tag{101}$$

$$\epsilon\,\frac{\partial \check{v}}{\partial \hat{t}} + \epsilon\,\hat{u}\,\frac{\partial \check{v}}{\partial \hat{x}} + \epsilon\,\check{v}\,\frac{\partial \check{v}}{\partial \check{y}} + \frac{1}{\epsilon}\,\frac{\partial \hat{p}'}{\partial \check{y}} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\epsilon\,\frac{\partial^2 \check{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{\epsilon}\,\frac{\partial^2 \check{v}}{\partial \check{y}^2}\right) \tag{102}$$

$$\frac{1}{\gamma}\,\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\,\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \check{v}\,\frac{\partial \hat{T}}{\partial \check{y}} = \frac{1}{\mathrm{PrRe}}\left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{\epsilon^2}\,\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \check{y}^2}\right) \tag{103}$$

- Si vede che questa correzione ha senso solo per alti numeri di Reynolds, tali per cui Re $\sim O(1/\epsilon^2)$: altrimenti l'Eq. (101) implicherebbe profili lineari della velocità $\hat{u}$
- Conseguentemente l'Eq. (102) implica $\partial \hat{p}'/\partial \check{y} = 0$, ossia il campo di pressione è indipendente dalla normale y

Equazioni dello strato limite

- La pressione $\hat{p}'(\hat{x})$ è governata dal campo di moto al di fuori dello strato limite: nel caso di superfici piane interessate da un campo di moto del fluido parallelo e costante in modulo e verso, allora la pressione al di fuori dello strato limite è costante $\rightarrow \partial\hat{p}'(\hat{x})/\partial\hat{x} = 0$
- Pertanto le equazioni dello strato limite in condizioni stazionarie diventano

$$\hat{u}\,\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}} + \check{v}\,\frac{\partial\hat{u}}{\partial\check{y}} = \frac{1}{\hat{\mathrm{Re}}}\,\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\check{y}^2} \tag{104}$$

$$\hat{u}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\hat{x}} + \check{v}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\check{y}} = \frac{1}{\hat{\mathrm{Pr}}\,\hat{\mathrm{Re}}}\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\check{y}^2} \tag{105}$$

dove $\hat{\mathrm{Re}} = \epsilon^2\,\mathrm{Re}$, $\hat{\mathrm{Pr}} = \mathrm{Pr}$ e $\vartheta = (T - T_w)/(T_\infty - T_w)$ (T_∞ è la temperatura imperturbata, al di fuori dello strato limite)

Equazioni dello strato limite

Commenti

- Ritornando alle grandezze adimensionali usuali, ossia $\hat{\cdot}$ (dal momento che tutti i termini sono omogenei dal punto di vista dell'ordine di grandezza) si ottiene

$$\hat{u}\,\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\,\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \tag{106}$$

$$\hat{u}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \hat{y}^2} \tag{107}$$

- Nel caso di condizioni al contorno costanti, ossia $\hat{u}(\hat{x},0) = \vartheta(\hat{x},0) = 0$ e $\hat{u}(\hat{x},\infty) = \vartheta(\hat{x},\infty) = 1$ per qualsiasi punto della superficie e nel caso in cui $\mathrm{Pr} = 1$, allora esiste una analogia perfetta tra le due soluzioni, ossia $\hat{u}$ e ϑ ammettono la stessa soluzione nello strato limite

Turbolenza

Introduzione euristica

- Il moto di un fluido molto viscoso e/o quasi a riposo tende ad essere ordinato e regolare (deflusso laminare), viceversa fluidi con piccola viscosità e/o interessati da velocità molto elevate danno origine ad un moto non completamente stazionario, irregolare, apparentemente caotico (deflusso turbolento)
- Appare chiaro che la transizione da moti laminari a moti turbolenti è determinata dal numero di Reynolds $\mathrm{Re} = UL/\nu$, che riveste il ruolo di parametro di controllo
- Dal punto di vista ingegneristico, il deflusso turbolento si presenta come particolarmente adatto ad intensificare il trasporto di energia (quindi lo scambio termico convettivo) e la miscelazione dei fluidi

Turbolenza

Regimi di deflusso

Possibile classificazione dei tipi di flussi:

- flussi lenti o molto viscosi $\rightarrow$ manifestano un comportamento prevalentemente stazionario, dal momento che il parametro di controllo è molto piccolo (Re minore di qualche decina);
- flussi con parametro di controllo moderatamente grande (Re dell'ordine di qualche centinaia o migliaia) $\rightarrow$ in questo regime le soluzioni stazionarie diventano instabili e si assiste alla transizione al caos, caratterizzata da biforcazioni successive in cui il campo di moto diventa sempre più complesso;
- flussi con parametro di controllo decisamente grande $\rightarrow$ regime di turbolenza sviluppata (comportamento universale).

Turbolenza

Fluttuazioni aleatorie nel tempo e nello spazio

- La turbolenza è caratterizzata da moti disordinati che si traducono in fluttuazioni aleatorie nel tempo e nello spazio (ampio spettro di frequenze temporali e spaziali)

$$\hat{u} = \langle \hat{u} \rangle + \hat{u}', \quad \hat{v} = \langle \hat{v} \rangle + \hat{v}' \tag{108}$$

$$\vartheta = \langle \vartheta \rangle + \vartheta' \tag{109}$$

- E' possibile scomporre l'energia cinetica media in

$$\langle e_c \rangle = 1/2 \, \langle \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \rangle = 1/2 \, \langle \hat{\boldsymbol{u}} \rangle \cdot \langle \hat{\boldsymbol{u}} \rangle + \hat{k}_t \tag{110}$$

dove k_t è l'energia cinetica della turbolenza definita come

$$\hat{k}_t = \frac{1}{2} \, \langle \hat{\boldsymbol{u}}' \cdot \hat{\boldsymbol{u}}' \rangle = \frac{1}{2} \, \langle \hat{u}'_k \hat{u}'_k \rangle \tag{111}$$

Turbolenza

Spettro energetico della turbolenza

- Nel deflusso turbolento, esiste una moltitudine di vortici, che possono essere analizzati mediante la scomposizione in armoniche elementari, ciascuna delle quali è identificata dal numero d'onda $\hat{\kappa}$, ossia dal numero di oscillazioni che essa compie nell'unità di spazio
- L'energia cinetica della turbolenza $\hat{k}_t$ può essere scomposta nei vari contributi apportati dalle onde elementari, mediante $\hat{E}_t(\hat{\kappa})$, detta funzione distribuzione dello spettro energetico della turbolenza e definita in modo tale che

$$\hat{k}_t = \int_0^\infty \hat{E}_t(\hat{\kappa}) d\hat{\kappa} \tag{112}$$

Turbolenza
Analisi energetica

- I vortici più grandi non sono in grado di dissipare direttamente l'energia perché sono instabili
- Si possono distinguere tre tipologie di vortici:
  - i vortici energetici che ricevono l'energia dal deflusso principale e sono caratterizzati da piccoli numeri d'onda (ossia una dimensione caratteristica grande, comparabile a quella del sistema);
  - i vortici dissipativi che dissipano l'energia mediante le interazioni molecolari, descritte dalla viscosità molecolare, e sono caratterizzati da grandi numeri d'onda (ossia piccole e/o piccolissime dimensioni);
  - infine i vortici inerziali, che non creano energia né la dissipano ma si trasformano progressivamente in vortici sempre più piccoli (fino a ricadere nel caso precedente).

Turbolenza

Teoria di Kolmogorov

- Un contributo fondamentale alla teoria della turbolenza è stato dato da Kolmogorov nel 1941
- Egli ha cercato una descrizione statistica della turbolenza omogenea ed isotropa basandosi su poche semplici ipotesi di similarità
- Una di queste ipotesi fondamentali asserisce che la dimensione caratteristica dei vortici dissipativi l_t dipende esclusivamente dalla viscosità molecolare e dal tasso di dissipazione dell'energia cinetica della turbolenza, ossia

$$l_t/L = \mathrm{Re}^{-3/4} \tag{113}$$

- Questo significa che per alti numeri di Reynolds la dimensione dei vortici dissipativi può essere piccolissima, ossia $l_t/L \ll 1$

Strato limite in condizioni di deflusso turbolento

RANS - *Reynolds Averaged Navier Stokes*

- Non possiamo sempre pensare di risolvere direttamente le equazioni di Navier-Stokes-Fourier con la risoluzione numerica necessaria, ossia $\Delta x \sim l_t$
- Facciamo una media spaziale (media di Reynolds) delle equazioni dello strato limite in condizioni di deflusso turbolento, su di una griglia computazione più lasca, ossia tali per cui $\Delta x \gg l_t$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_k} \left\langle \left(\langle \hat{u} \rangle + \hat{u}' \right) \left(\langle \hat{u}_k \rangle + \hat{u}'_k \right) \right\rangle = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 \langle \hat{u} \rangle}{\partial \hat{y}^2} \tag{114}$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_k} \left\langle \left(\langle \vartheta \rangle + \vartheta' \right) \left(\langle \hat{u}_k \rangle + \hat{u}'_k \right) \right\rangle = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 \langle \vartheta \rangle}{\partial \hat{y}^2} \tag{115}$$

Strato limite in condizioni di deflusso turbolento

Termini addizionali

$$\langle \hat{u}_k \rangle \frac{\partial}{\partial \hat{x}_k} \langle \hat{u} \rangle = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 \langle \hat{u} \rangle}{\partial \hat{y}^2} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_k} \langle \hat{u}' \hat{u}'_k \rangle \tag{116}$$

$$\langle \hat{u}_k \rangle \frac{\partial}{\partial \hat{x}_k} \langle \vartheta \rangle = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 \langle \vartheta \rangle}{\partial \hat{y}^2} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_k} \langle \vartheta' \hat{u}'_k \rangle \tag{117}$$

- Nelle equazioni precedenti sono comparsi alcuni termini derivati dalla media di prodotti di quantità fluttuanti $\rightarrow$ nasce il problema di come calcolare questi termini
- Proprio a causa della non-linearità delle equazioni di Navier-Stokes-Fourier, scrivere le equazioni per momenti di ordine superiore, ossia $\langle \hat{u}'_i \hat{u}'_j \rangle$, introduce sempre nuove incognite, come per esempio $\langle \hat{u}'_i \hat{u}'_j \hat{u}'_k \rangle$

Problema della chiusura

Assunzione di Boussinesq

- Per risolvere il problema della chiusura, Boussinesq nel 1877 per primo propose un modello per gli sforzi turbolenti
- Boussinesq assunse che sia possibile studiare il moto delle strutture turbolente in modo analogo a quanto fatto per il moto molecolare, ossia

$$\left\langle \hat{u}_i' \hat{u}_k' \right\rangle = -\frac{1}{\mathrm{Re}_t} \left(\frac{\partial \left\langle \hat{u}_i \right\rangle}{\partial \hat{x}_k} + \frac{\partial \left\langle \hat{u}_k \right\rangle}{\partial \hat{x}_i} \right) \tag{118}$$

$$\left\langle \vartheta' \hat{u}_k' \right\rangle = -\frac{1}{\mathrm{Pr}_t \mathrm{Re}_t} \frac{\partial \left\langle \vartheta \right\rangle}{\partial \hat{x}_k} \tag{119}$$

- Dalla precedente assunzione si deduce anche una stima dei termini, ossia $\langle \hat{u}' \hat{v}' \rangle \gg \langle \hat{u}' \hat{u}' \rangle$ e $\langle \vartheta' \hat{v}' \rangle \gg \langle \vartheta' \hat{u}' \rangle$

Strato limite in condizioni di deflusso turbolento

- Da cui segue immediatamente

$$\langle \hat{u} \rangle \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \langle \hat{u} \rangle + \langle \hat{v} \rangle \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \langle \hat{u} \rangle = \frac{1}{\mathrm{Re}_T} \frac{\partial^2 \langle \hat{u} \rangle}{\partial \hat{y}^2} \quad (120)$$

$$\langle \hat{u} \rangle \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \langle \vartheta \rangle + \langle \hat{v} \rangle \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \langle \vartheta \rangle = \frac{1}{\mathrm{Pr}_T \, \mathrm{Re}_T} \frac{\partial^2 \langle \vartheta \rangle}{\partial \hat{y}^2} \quad (121)$$

  dove $\mathrm{Re}_T = UL/(\nu + \nu_t)$ e $\mathrm{Pr}_T = (\nu + \nu_t)/(\alpha + \alpha_t)$
- Nel caso di strati limite sufficientemente sviluppati (ossia tali per cui sia stata superata la soglia di stabilità), esistono contemporaneamente due regioni distinte:
  - il sotto-strato limite laminare, prossimo alla parete e descrivibile mediante le Eq. (106, 107)
  - lo strato limite turbolento, prossimo al fluido imperturbato e descrivibile mediante le Eq. (120, 121)

Analogia di Reynolds

Equazioni compatte dello strato limite

- L'applicazione dell'operatore $\langle \cdot \rangle$ alle Eq. (106, 107) del sotto-strato laminare non comporta alcun cambiamento, dal momento che non ci sono fluttuazioni
- Ritornando alle unità fisiche

$$\langle u \rangle \frac{\partial}{\partial x} \langle u \rangle + \langle v \rangle \frac{\partial}{\partial y} \langle u \rangle = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{122}$$

$$\langle u \rangle \frac{\partial}{\partial x} \langle T \rangle + \langle v \rangle \frac{\partial}{\partial y} \langle T \rangle = -\frac{1}{\rho\, c_p} \frac{\partial q}{\partial y} \tag{123}$$

dove $\tau = \rho\, \nu_x\, \partial \langle u \rangle / \partial y$ e $q = -\rho\, c_p\, \alpha_x\, \partial \langle T \rangle / \partial y$ mentre, per quanto riguarda i coefficienti di trasporto, essi dipendono dalla regione considerata (sotto-strato laminare oppure strato turbolento), ossia $\nu_x \in \{\nu, \nu_t\}$ e $\alpha_x \in \{\alpha, \alpha_t\}$

Analogia di Reynolds

- Si definisce analogia di Reynolds, l'assunzione $\mathrm{Pr}_T = \mathrm{Pr} = 1$: in questo caso, vale la seguente relazione

$$\frac{q/c_p}{\tau} = -\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \langle u \rangle} = \frac{q_w/c_p}{\tau_w} \tag{124}$$

dove τ_w e q_w sono lo sforzo viscoso ed il flusso termico a parete rispettivamente

- Ricordando che $\tau_w = C_D \, \rho \, U^2/2$, dove C_D è il coefficiente di attrito superficiale (o meglio il coefficiente di *drag*), e $q_w = k \, (T_w - T_\infty)$, dove k è detto coefficiente di scambio termico convettivo, risulta

$$\mathrm{Nu} = C_D/2 \, \mathrm{Re} \tag{125}$$

dove $\mathrm{Nu} = k \, L/\lambda$ è il numero di Nusselt (λ è la conducibilità termica molecolare)

Trasmissione del calore per convezione

Conclusioni

- La precedente trattazione dimostra che
  - è possibile analizzare lo scambio termico, ossia il trasporto di energia, all'interfaccia tra un solido ed un fluido in movimento mediante la risoluzione delle equazioni dello strato limite, che sono più semplici di quelle complete di Navier-Stokes-Fourier
  - Qualora si superi la soglia di stabilità, la crescente complessità nel campo di moto indotta dal fenomeno della turbolenza, costringe a considerare opportuni modelli di chiusura per il calcolo dei termini addizionali che appaiono nelle equazioni mediate
  - Il metodo dell'analogia consente di stimare l'efficacia dello scambio termico convettivo (ossia il coefficiente k) mediante le informazioni relative allo sforzo viscoso esercitato dal fluido sul solido, nelle medesime condizioni