Sommario

1 Cenni alla Termomeccanica dei Continui
- Dai sistemi discreti ai sistemi continui: equilibrio locale
- Deviazioni dalle condizioni di equilibrio locale
- Irreversibilità
- Equazioni integrali di bilancio

2 Cenni alla Trasmissione del Calore
- Convezione
- Conduzione
- Irraggiamento

In questa lezione...

Fenomeno della conduzione termica. Equazione fondamentale. Numeri adimensionali significativi: numero di Fourier e numero di Biot. Discussione dei regimi fisici. Soluzioni analitiche per corpi omogenei e corpi non-omogenei di forma semplice. Formule pratiche ed applicazioni.

Fenomeno della conduzione termica

- Valgono le seguenti premesse:
  - e' molto difficile realizzare le condizioni affinché la conduzione termica sia il fenomeno di scambio termico prevalente all'interno di un fluido, che presenta una naturale tendenza a spostarsi, anche in virtù delle sole differenze di densità, come succede nella convezione naturale $\rightarrow$ consideriamo pertanto un solido;
  - anche in un solido, la pressione interna potrebbe non essere costante, a causa degli sforzi applicati, e le velocità delle sue parti potrebbero non essere nulle, a causa delle conseguenti deformazioni.
- Partendo dall'Eq. (59), supponendo di trascurare la dinamica degli sforzi, ossia $Dp/Dt = 0$ e $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, risulta

$$\frac{\partial(\rho_s\, h)}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{q}_\alpha = 0 \tag{126}$$

Equazione dell'entalpia in un solido

Generalizzazione

- Generalizziamo l'espressione del flusso termico in modo da tenere conto delle anisotropie del materiale, ossia

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_s(T)\, h(T)\right] = \nabla \cdot \left[\Lambda_s(T)\, \nabla T\right] + S_h(T) \tag{127}$$

  dove Λ_s è il tensore della conducibilità termica, che è diagonale nel caso di isotropia $\Lambda_s = \lambda_s\, \boldsymbol{I}$, e S_h è il termine di sorgente dovuto alle reazioni chimiche e/o nucleari
- Se e solo se la densità è costante, l'entalpia è una funzione lineare della temperatura (calore specifico c_s costante), il materiale è isotropo e la diffusività termica $\alpha_s = \lambda_s/(\rho_s\, c_s)$ non dipende dalla temperatura, vale

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_s\, \nabla^2 T + S_h(T) \tag{128}$$

Aletta termica

- Consideriamo un'aletta orientata secondo l'asse x mentre l'asse y definisce la dimensione trasversale
- Nel caso in cui $S_h(T) = 0$, si ottiene

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_s \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \tag{129}$$

- Definita la temperatura media $\bar{T}(t,x) = 1/s \int_0^s T(t,x,y)dy$, integrando rispetto alla dimensione y si ottiene

$$s \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = s\, \alpha_s \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_s\, c_s} \left(q_s - q_0 \right) \tag{130}$$

- Ricordando che $q_s = -q_0 = k\left(\bar{T} - T_f\right)$

$$s \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = s\, \alpha_s \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - \frac{2\, k}{\rho_s\, c_s} \left(\bar{T} - T_f \right) \tag{131}$$

Aletta termica

- In forma adimensionale risulta

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \hat{x}^2} - 2\,\mathrm{Bi}\,\left(\bar{T} - T_f\right) \tag{132}$$

  dove Fo $= \alpha_s\, t/s^2$ è il numero di Fourier e Bi $= k\, s/\lambda_s$ è il numero di Biot (nota: k dipende dall'interazione tra il fluido e la parete mentre λ_s dipende solo dal materiale metallico)
- In questo caso, la resistenza termica complessiva scaturisce dal parallelo di una resistenza conduttiva $R_\lambda \propto s/\lambda$ (secondo l'asse x) e di una resistenza convettiva $R_k \propto 1/k$ (secondo l'asse y), il cui rapporto definisce il numero di Biot, ossia Bi $= R_\lambda/R_k$
- Nel caso di corpi tozzi (nessuna direzione prevalente), le due resistenze termiche possono essere in serie, ossia i due fenomeni possono interessare la medesima direzione

Resistenza termica equivalente

- Vale in generale il seguente prospetto
  - parallelo di resistenze: alti numeri di Biot identificano fenomeni prevalentemente convettivi, ossia in cui la convezione prevale sulla conduzione (e viceversa);
  - serie di resistenze: bassi numeri di Biot identificano fenomeni prevalentemente convettivi, ossia in cui la convezione prevale sulla conduzione (e viceversa)
- Nel caso dell'aletta (resistenze in parallelo), per alti numeri di Biot vale

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathrm{Fo}} = -2\,\mathrm{Bi}\,\left(\bar{T} - T_f\right) \tag{133}$$

che ammette la seguente soluzione

$$\frac{\bar{T}(\mathrm{Fo}, \hat{x}) - T_f}{\bar{T}(0, \hat{x}) - T_f} = \exp\left(-2\,\mathrm{Bi}\,\mathrm{Fo}\right) \tag{134}$$

Formule pratiche

- Chiaramente il numero Fo_* tale per cui la temperatura in un certo punto $\hat{x} = \hat{x}_*$ sia pari ad un valore dato, ossia $\bar{T}(\text{Fo}_*, \hat{x}_*) = \bar{T}_*$, soddisfa una relazione del tipo $\text{Fo}_* = p/\text{Bi}$, dove p è un'opportuna costante
- Per bassi numeri di Biot vale

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \hat{x}^2} \tag{135}$$

che ammette una generica soluzione del tipo $\bar{T}(\text{Fo}, \hat{x}) = A(\text{Fo})\, B(\hat{x})$: in questo caso $\bar{T}(\text{Fo}_*, \hat{x}_*) = \bar{T}_*$ corrisponde a $\text{Fo}_* = q$, dove q è un'ulteriore costante
- Pertanto, per qualsiasi numero di Biot, la durata adimensionale di un transitorio termico è esprimibile come

$$\text{Fo}_* = p/\text{Bi} + q \tag{136}$$

Equazione della conduzione in un solido

Classificazione

- L'equazione della conduzione in un solido (128) include i seguenti casi particolari, al variare delle condizioni considerate:
  - equazione di Poisson, ossia $\nabla^2 T = -S_h(T)/\alpha_s$, nel caso di fenomeni stazionari;
  - equazione di Fourier, ossia $\partial T/\partial t = \alpha_s \nabla^2 T$, nel caso di assenza di termini di sorgente;
  - equazione di Laplace, ossia $\nabla^2 T = 0$, nel caso di fenomeni stazionari ed in assenza di termini di sorgente.
- Come visto per lo scambio termico dell'aletta, nell'equazione della conduzione possono scaturire ulteriori termini di sorgente, per effetto dell'integrazione lungo dimensioni considerate irrilevanti ai fini della conduzione

Trasmissione del calore per conduzione nei solidi

Conclusioni

- Nella maggior parte dei casi, si tratta di un fenomeno descrivibile mediante una semplice applicazione della conservazione dell'energia (ossia del Primo Principio della Termodinamica) ad una porzione infinitesima del solido considerato
- Dal momento che il numero di equazioni è estremamente ridotto e che esse risultato piuttosto semplici, è possibile trovare soluzioni analitiche in alcuni casi particolari
- Dal punto di vista della teoria del trasporto e delle tecniche numeriche necessarie alla risoluzione delle equazioni della conduzione, è utile ricordarsi che si tratta di un fenomeno puramente diffusivo, descritto mediante equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico