

Capitolo 1

Tutto il corso, o quasi, in un capitolo



1.1 I modelli dello spazio

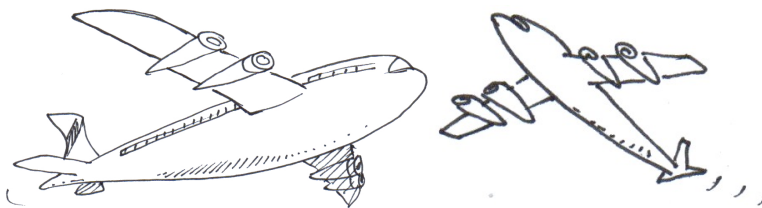
1.1.1 Familiarizzare gli studenti con il primo elementare *know-how* di geometria analitica dello spazio tridimensionale è certamente tra gli obiettivi imprescindibili dell'insegnamento della Matematica in un primo anno di corso di laurea in discipline tecnico-scientifiche. L'esperienza così acquisita tornerà utile in corsi successivi, come quelli di Fisica e di Meccanica, per non citare che i più ovvi, dove, per esempio, lo studio della cinematica e della dinamica del corpo rigido presuppone una sicura conoscenza delle nozioni di *curva*, di *vettore applicato*, di *traslazione* e di *rotazione* nello spazio.

Neppure al lettore più svegliato e distratto sfuggirà la palpabile inutilità della dichiarazione d'intenti di cui sopra: essa è troppo vaga per poter essere chiamata a fondamento di una seria motivazione per lo studio della Geometria. Il primo nodo da sciogliere, infatti, non è tanto il *cosa fare dove* ma, soprattutto, spiegare *cos'è il dove in cui facciamo cosa*. E' giunta l'ora di rispondere a domande delicate, per non dire imbarazzanti, quali "cos'è lo spazio?", o "uno spazio"?, o la "dimensione di uno spazio"?, che si è resa improcrastinabile.

Invocare il soccorso dell'intuizione, un'amica sorridente ma falsa, che difficilmente si lascia sfuggire occasioni per esibire la propria fallacia, non senza una punta di sfacciato quanto riprovevole orgoglio, non è certo la migliore delle soluzioni. Essa, invece

d'aiutarci a rispondere alla domanda "cos'è", preferisce indurci a percorrere la facile scorciatoia degli esempi fabbricati con metodi caserecci. Il *punto*, quante volte l'avremo sentito dire?, è ciò che non ha dimensioni o ha dimensione zero. La *retta*, invece, è uno *spazio a una dimensione*; il *piano*, quello dove solitamente crediamo d'aver imparato i primi rudimenti di geometria analitica, indizio primordiale del felice connubio tra Algebra e Geometria, è uno spazio a due dimensioni e lo *spazio fisico*, invece, ha tre dimensioni.

Ed ecco, il rimedio già s'è rivelato peggiore del male perché, a questo punto, qualcuno ce lo dovrà pur spiegare, e per davvero, che cosa sia questo *spazio fisico* di cui tanto si blatera, spesso a vanvera. E' forse l'angusto teatrino delle nostre più immediate esperienze sensoriali, quello solcato da oggetti mobili come autobus, navi, aerei e popolato da oggetti immobili, o semi-immobili, come edifici, alberi e montagne? Oppure con esso si vuole più presuntuosamente alludere al palcoscenico di tutto il dramma cosmico, quello delle galassie, dei pianeti, dei sistemi solari, dove però la geometria insegnataci da Euclide finisce col dissolversi inesorabilmente nel mare dei casi particolari



di più generali modelli geometrici, che euclidei non sono e che, come se non bastasse, posseggono più dimensioni di quelle solite tre di cui ci pare avere esperienza diretta?

Volendo proprio concedere licenza all'Autore di continuare ad infilzare una banalità dietro l'altra, si potrebbe affermare che lo spazio fisico, inteso come proscenio di tutto ciò che è accaduto, accade o accadrà, è inconoscibile e può essere investigato solo in minima parte elaborando dei modelli ideali perfetti, dei paradisi matematici che non siano essi stessi approssimazione della realtà ma che, al contrario, benignamente permettano a quest'ultima di poterli approssimare quanto meglio possibile.

Strettamente parlando, la geometria di Euclide, persino quella piana, non è necessariamente una geometria fisica, così come sapientemente suggerito nel romanzo pedagogico *Flatlandia* [1] del Reverendo Abbott¹ o dalla celebre, ancorché più onnicomprensiva, frase pronunciata da Albert Einstein² nella prolusione del 27 Gennaio 1921 all'Accademia Prussiana delle Scienze:

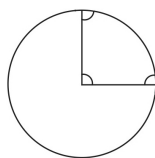
Le proposizioni della matematica nella misura in cui si riferiscono alla realtà non sono sicure e nella misura in cui sono sicure non si riferiscono alla realtà.

¹ Edwin Abbott Abbott, (Londra, 1838–1926), teologo e pedagogo in cui si integrarono mirabilmente la passione per la tradizione umanistica classica con l'amore per la scienza: nel collegio di cui era Rettore introdusse lo studio obbligatorio della chimica. Si veda la prefazione di Masolino D'Amico a [1].

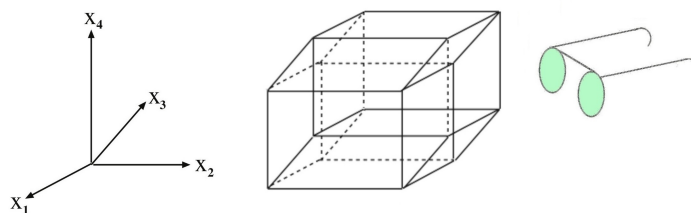
² Albert Einstein, (Ulm, 14 marzo 1879 – Princeton, 18 aprile 1955), il grande fisico matematico autore della teoria della relatività nella sua forma *ristretta* nel 1905 [8] e nella sua forma *generale* nel 1916 [9]. Quest'ultima riguarda una formulazione della teoria della gravitazione che si basa su una interpretazione puramente geometrico-differenziale dello spazio-tempo.

Se degli esseri bidimensionali vivessero per esempio sulla superficie di una sfera di raggio così grande da farla percepire localmente come quella di un piano, si potrebbero facilmente scoprire triangoli rettangoli con tre angoli retti, in aperta dissonanza con la proposizione euclidea secondo la quale la somma degli angoli interni di ogni triangolo uguaglia un angolo piatto.

1.1.2 La riconciliazione della geometria fisica di una flatlandia sferica con la geometria matematica di Euclide richiede necessariamente l'intuizione di una terza dimensione, una sensibilità fisicamente inimmaginabile per degli esseri bidimensionali,



al pari dell'inimmaginabilità di una quarta dimensione per l'uomo tridimensionale, che però possiede la facoltà di costruire universi pluridimensionali e investigarli, con la stessa sensibilità di chi potesse vederli coi propri occhi, grazie agli occhiali nD della Matematica.



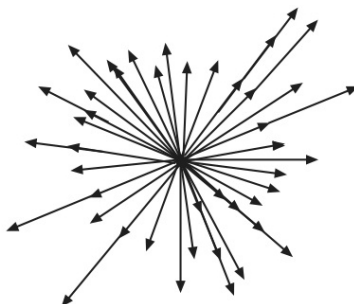
- Cosa si vede, per $n = 4$, con gli occhiali nD della Matematica? -

Lo spazio di cui si tratterà negli appunti, quindi, e in cui si studierà la geometria euclidea, sarà non tanto lo spazio fisico quanto piuttosto uno dei suoi possibili modelli, nel testo designato come *spazio affine reale euclideo*, che è comunque sufficiente per la maggior parte delle applicazioni ingegneristiche. Il modello costruito sarà così flessibile che, pur senza il bisogno di esplicite allusioni, il lettore potrà scorgere di lontano, all'orizzonte, la possibilità di esplorare la geometria euclidea di spazi affini a dimensioni maggiori di tre, universi fantastici dove una retta può passare per il centro di una sfera senza intersecarne la superficie o, come qualcuno pittorescamente ama dire, universi nei quali un chirurgo potrebbe agevolmente effettuare una *appendicectomia* senza incidere la pancia del paziente (Cf. Esempio 6.10.12).

1.1.3 Lo spazio affine. La storia somiglia un po' a quella che viene raccontata nelle esposizioni divulgative riguardanti la teoria del Big-Bang, il modello di *Universo* in espansione a seguito di un'esplosione primordiale di un piccolo nucleo di materia. Anche uno spazio affine, infatti, si costruisce a partire da un insieme formato da un solo elemento, chiamiamolo

•,

e spostandolo in tutte le direzioni per mezzo di *vettori* ad esso applicati.



La cesta che contiene i vettori da applicare a $\bullet$ è uno *spazio vettoriale* e ogni vettore applicato a $\bullet$ è un *punto* dello spazio (che può pensarsi come il punto ottenuto per *traslazione* di $\bullet$ per mezzo del vettore dato). Se lo spazio vettoriale è euclideo, ossia è dotato di un metro-rapportatore per misurare angoli e distanze, quel che si dice un prodotto scalare, lo spazio affine generato per espansione di $\bullet$ in tutte le direzioni si dirà *spazio affine euclideo*. Cosa deve intendersi, però, per *vettore* e per *vettore applicato*? Cos'è uno spazio vettoriale? E' a questo punto che entra in scena *l'algebra lineare*, uno dei principali attori del Corso: i vettori altro non sono che elementi di certi insiemi dotati di *struttura algebrica*, alcuni dei quali già incontrati e utilizzati nei corsi di scuola superiore: gli spazi vettoriali, appunto.

1.2 Una parentesi sulle strutture algebriche

Uno dei termini che più frequentemente ricorre nel corso del testo (o nel testo del corso?) è quello di *gruppo*, spesso accompagnato dell'aggettivo *commutativo* o *abeliano*³, col rischio calcolato di esporre l'Autore a critiche, si spera ingiustificate, di eccessiva astrazione.

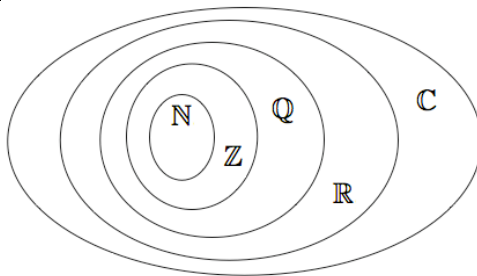
1.2.1 Un *gruppo* è un insieme dotato di una particolare struttura algebrica. Il più semplice esempio di gruppo abeliano, in realtà il *padre* di tutti i gruppi abeliani, è l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi rispetto alla *somma* “+”. La somma è *associativa*, *possiede un elemento neutro*, lo 0, e ogni numero intero *possiede un opposto*: per esempio, quello di 3 è -3 , quello di -5 è 5 e così via. Lo 0 è l'unico numero intero che coincide col proprio opposto. La somma tra numeri interi è inoltre *commutativa*, vale a dire il risultato di un'addizione non dipende dall'ordine degli addendi. L'elenco delle predette proprietà si riassume dicendo che $(\mathbb{Z}, +)$ è un *gruppo commutativo*. L'insieme $\mathbb{Z}$, però, lungi dal rinunciare troppo facilmente a stupirci, è dotato di una seconda operazione, un *prodotto* associativo e commutativo, che elegge il numero 1 quale proprio *elemento neutro* (si

³ Aggettivo coniato in onore del grande matematico norvegese Niels Henrik Abel, nato a Finnøy, 5 agosto 1802 e morto a Froland, 6 aprile 1829, pochissimo dopo aver finalmente ottenuto una cattedra universitaria. Ad Abel è oggi intitolato un famoso premio alla carriera per i migliori matematici (si veda <http://www.abelprisen.no/en/>)

provi a moltiplicare un qualsiasi numero intero per 1. Quanto fa?). La lieta novella è che il prodotto e la somma di interi si sposano secondo il tradizionale rito prescritto da ben note leggi distributive, imparate e usate già fin dagli anni della scuola secondaria nei cosiddetti esercizi di *calcolo letterale*. E poiché non c'è connubio senza anello, quello della somma col prodotto di elementi di $\mathbb{Z}$ è suggellato dall'*anello commutativo degli interi*, l'espressione utilizzata per designare non già l'insieme $\mathbb{Z}$ nudo e crudo, bensì il medesimo considerato insieme a quelle operazioni di addizione e moltiplicazione, le cui proprietà, appunto, lo rendono un anello (Capitolo 2).

Vi sono altri anelli oltre a $\mathbb{Z}$? Certamente. E' sufficiente ricordare che la somma e prodotto di numeri interi si generalizza all'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali (quozienti di numeri interi) o all'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (classi di equivalenza di successioni di Cauchy⁴ di numeri razionali) e, come se ancora non bastasse, all'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

1.2.2 Un attimo di riflessione convincerà anche i lettori più scettici, coloro ai quali vanno, tutto sommato, le speciali simpatie dell'Autore, che $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono anelli commutativi rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto. Con una differenza, rispetto a $\mathbb{Z}$, non da poco. Essi godono infatti di una peculiarità che ne rende l'algebra drammaticamente più semplice e, pertanto, radicalmente più interessante, soprattutto ai fini della pratica di vita ingegneristica. Si sta qui alludendo alla cruciale proprietà secondo cui ogni elemento non nullo ammette un *inverso*. Per esempio, l'inverso di $2/3$ è $3/2$, l'inverso di $\sqrt{2}$ è $\sqrt{2}/2$, l'inverso di $3 + 4i$ è $3/25 - 4i/25$. Lo 0 non ha inverso, perché è annullatore del prodotto: qualsiasi numero moltiplicato per 0 fa zero! Infatti $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, da cui, semplificando, l'uguaglianza $a \cdot 0 = 0$. Per segnalare questa ulteriore proprietà, quella di possedere un inverso per ogni elemento non nullo, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ vengono detti *campi*.



- $\mathbb{N}$, l'insieme degli interi non negativi, e $\mathbb{Z}$, l'insieme degli interi, non sono campi⁵...-

Un campo è un tipo speciale di anello, un insieme con due operazioni che verificano le stesse proprietà verificate dalla somma e dal prodotto di numeri razionali. Gli elementi di un *campo* si dicono *scalari*. Un sottinsieme $\mathbb{L}$ di un campo $\mathbb{K}$, che sia a sua volta un campo rispetto alle operazioni indotte da $\mathbb{K}$, si dice *sottocampo* di $\mathbb{K}$. Per esempio

⁴ Louis Augustin Cauchy, grande matematico francese nato a Parigi, 21 agosto 1789 e morto a Sceaux, il 23 maggio 1857. Ebbe il merito di aver rifondato il calcolo infinitesimale su base rigorosa e il torto di non riconoscere o ignorare il genio di Evariste Galois.

⁵ Rispetto alla somma e al prodotto usualmente definite.

$\mathbb{R}$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Q}$ è un sottocampo di $\mathbb{R}$. Il lettore volenteroso verificherà che $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ è un sottocampo di $\mathbb{R}$ che contiene $\mathbb{Q}$. La teoria dei campi è una delle più belle e intriganti discipline dell'algebra, la cui origine risale indubbiamente agli studi di *Evariste Galois*,⁶ il matematico romantico che perse la vita battendosi in duello, la leggenda dice a causa di una donna, all'età di ventun'anni non ancora compiuti. Per tesi alternative sulla morte di Galois si veda per esempio [31].

In questo libro il simbolo $\mathbb{K}$ denoterà sempre, a meno di esplicito avviso contrario, un sottocampo del campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi (quindi o $\mathbb{C}$ stesso, o $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}, \dots$).

1.3 Gli spazi vettoriali: perché?

1.3.1 Veniamo ora, più specificamente, agli spazi vettoriali. Non v'è dubbio che, storicamente, essi nascano dalla fisica. Già ai tempi di Newton⁷ si era formata la coscienza del fatto che molte grandezze fisiche non potessero esprimersi solo attraverso un numero (quello che chiamiamo uno scalare) ma anche per mezzo di una propria relazione con lo spazio fisico (ahi, ci risiamo...), specificandone una *direzione* e un *verso*.

A guardare bene, però, gli spazi vettoriali sono disseminati ovunque. Farne a meno è difficile persino nella vita di tutti i giorni, anche senza sapere, spesso, cosa essi siano. Per esempio, si supponga di voler effettuare in due città, A(ncona) e B(ologna), quattro misurazioni di temperatura $T_1(A)$, $T_2(A)$, $T_3(A)$, $T_4(A)$ e $T_1(B)$, $T_2(B)$, $T_3(B)$, $T_4(B)$. Si chieda quindi ad un ragazzino di dieci anni⁸ (o l'Autore lo chiede al lettore, ancorché ignaro di algebra lineare) di calcolare la *temperatura media* delle misurazioni effettuate. Non è certamente necessario sapere cosa sia uno spazio vettoriale per dire che:

$$\begin{pmatrix} T_M(A) \\ T_M(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_1(A) + T_2(A) + T_3(A) + T_4(A)}{4} \\ \frac{T_1(B) + T_2(B) + T_3(B) + T_4(B)}{4} \end{pmatrix},$$

dove $\begin{pmatrix} T_M(A) \\ T_M(B) \end{pmatrix}$ è il “dato” delle temperature medie: il primo calcolato per la città A e il secondo calcolato per la città B. Così facendo, tuttavia, il ragazzino sta implicitamente assumendo che l'insieme delle coppie di valori delle temperature rilevate nelle due città siano elementi di uno spazio vettoriale. Non che egli sappia cosa esso sia, è chiaro, però sa che le temperature possono essere sommate ordinatamente e moltiplicate per scalari (nell'esempio per $1/4$, l'inverso del numero di misurazioni) e dove vi sono *combinazioni lineari* a coefficienti in un campo (per la fisica di solito, ma non sempre, bastano il campo reale o il campo complesso) c'è anche uno *spazio vettoriale*.

1.3.2 Ulteriori realizzazioni concrete ed estremamente interessanti di spazi vettoriali non mancano. L'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee,

⁶ Evariste Galois, 1811–1832.

⁷ Isaac Newton, 1642–1727, il grande fisico-matematico inglese che raccolse l'eredità di Galileo, scrivendo la più famosa equazione differenziale della storia: $m \vec{a} = \vec{F}$.

⁸ O anche di otto o nove...

per esempio, è uno spazio vettoriale. E a coloro i quali credono di preferire la sfacciata concretezza dell'analisi all'altera astrattezza dell'algebra lineare, come se la Matematica fosse una cassettera con tanti comparti non comunicanti, si può ricordare che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti è uno spazio vettoriale e che la costruzione stessa del calcolo differenziale in più variabili si basa in modo cruciale su tale nozione.

Insomma, la morale è che spazi vettoriali ve ne sono tanti, tantissimi: spazi vettoriali di funzioni, spazi vettoriali di funzioni continue, spazi vettoriali di polinomi, spazi vettoriali di temperature, spazi vettoriali di funzioni differenziabili, spazi vettoriali di stati fisici in meccanica quantistica, spazi vettoriali di soluzioni di equazioni differenziali, spazi vettoriali di... Quand'anche non atterrisse, quanto meno scoraggerebbe l'idea di studiarli tutti, uno per uno. E' perciò che conviene studiarli tutti insieme, in una volta sola. Di qui l'esigenza di studiare le proprietà di uno *spazio vettoriale astratto* (Capitolo 7), quelle, cioè, comuni a tutti i gli spazi vettoriali nei quali ci sarà dato d'imbatterci con tutta probabilità nella nostra vita professionale, per non parlare di quella di studenti.

1.3.3 Spazi vettoriali e vettori. Non c'è spazio vettoriale senza campo. E, pertanto, sia $\mathbb{K}$ un campo. Come già detto, ripetuto qui solo per maggiori enfasi, $\mathbb{K}$ denoterà un sottocampo qualsiasi dei numeri complessi (si vuol pensare a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? e sia). Uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ o, come spesso si dice per amor di brevità, un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale, è un gruppo abeliano V , (ossia un insieme dotato di un'operazione, detta *somma*, che verifica le stesse proprietà della somma tra numeri interi) sul quale si possa definire una nozione di combinazione lineare dei propri elementi a coefficienti in $\mathbb{K}$. Ciò significa che per ogni coppia di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (leggasi: elementi del gruppo V) e per ogni coppia di scalari $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ si può dare un senso all'espressione $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$, detta

combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ a coefficienti $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

in modo tale che $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, per ogni $\mathbf{v} \in V$, e valgano delle proprietà simil distributive:

$$(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2,$$

per ogni scelta di $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. Si richiede inoltre che moltiplicare un vettore $\mathbf{v} \in V$ per il prodotto $\lambda\mu$ degli scalari λ e μ , sia la stessa cosa che moltiplicare per λ il vettore $\mu \cdot \mathbf{v}$. Non è che il lettore debba, a questo punto, sforzarsi di ricordare a memoria le suddette proprietà, poiché esse sono così naturali da essere spesso utilizzate in forma inconscia in praticamente tutti gli esempi di interesse pratico. Eccone uno, il più semplice: si consideri

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y, \in \mathbb{R} \right\}$$

l'insieme delle *coppie ordinate*, scritte per colonna, di numeri reali (si pensi all'esempio delle temperature rilevate nelle città A e B). Su $\mathbb{R}^2$ si può definire una somma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix},$$

e il prodotto per un numero reale (uno scalare):

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Per esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ oppure $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Orbene, uno spazio vettoriale reale è un gruppo abeliano V dotato di una moltiplicazione per numeri reali che verifica tutte le proprietà verificate dalle colonne di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla somma e prodotto per uno scalare sopra definite. Si tratta della stessa fenomenologia nella quale già ci si è imbattuti in una situazione ben più generale e interessante nei corsi di analisi, dove si insegna, per esempio, che se f, g sono due funzioni reali di variabili reale, $f + g$ è la funzione definita dall'uguaglianza $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ per ogni x del dominio, e che se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora λf è la funzione che assume in x il valore della funzione f moltiplicata per λ . Quindi anche le funzioni sono dei vettori... Riusciremmo a rappresentarle con delle frecce?

1.3.4 La facoltà di moltiplicare vettori per scalari dà inoltre origine alla nozione di *direzione*, spesso confusa con quella di *verso*, di un vettore. Dato un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale V , la *direzione* di un suo vettore non nullo $\mathbf{v}$ è l'insieme

$$[\mathbf{v}] := \{\lambda \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

di tutti i vettori multipli di $\mathbf{v}$, che si dice anche *retta vettoriale* generata da $\mathbf{v}$ o anche *direzione*. Si dice che due vettori non nulli hanno la stessa direzione se e solo se ciascuno è multiplo dell'altro. L'insieme di tutte le direzioni si dice *spazio proiettivo* associato a V e si indica con $\mathbb{P}V$. Il lettore può immaginare una direzione come un punto osservato all'orizzonte, sulla spiaggia, durante una bella giornata di sole e il mare in bonaccia, al quale convergono tutte le rette parallele idealmente tracciate sulla superficie marina. La nozione di direzione si generalizza attraverso l'insieme delle combinazioni lineari di un h -upla di vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h$ (con $h \geq 1$):

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h] := \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_h \mathbf{v}_h \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\}. \quad (1.1)$$

Si tratta del più semplice modo di costruire un *sottospazio vettoriale*. L'insieme (1.1) lo è nel senso che se $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h]$ allora $[\mathbf{u}, \mathbf{w}] \subseteq [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h]$. Esempi di sottospazi vettoriali? L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = 0$ ⁹ è un sottospazio vettoriale di quello di tutte le funzioni di classe C^∞ : dall'analisi si è infatti imparato¹⁰ che per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la funzione $\lambda e^x + \mu e^{2x}$ è una soluzione per qualsiasi scelta di λ, μ (λ, μ sarebbero le cosiddette *costanti arbitrarie*). La generalizzazione ovvia dello spazio $\mathbb{R}^2$ è offerta dagli spazi $\mathbb{K}^n$ delle n -uple ordinate (per colonna) di elementi di $\mathbb{K}$. La prima generalizzazione consiste nell'usare un campo qualsiasi $\mathbb{K}$ invece che il campo reale, la seconda è che, invece di usare coppie ordinate, si passa ad usare n -uple ordinate qualsiasi.

1.3.5 Gli spazi vettoriali così definiti, per mezzo di proprietà algebriche naturali, risultano essere oggetti estremamente versatili ed interpretano un ruolo di primo piano

⁹ In realtà di ogni equazione differenziale lineare.

¹⁰ Ma per un'alternativa algebrica si veda anche [15].

per le applicazioni alla fisica, e non solo a quella classica. Nella teoria della Relatività Speciale, gli spazi affini lorentziani¹¹ (Cf. 16.4) sono il linguaggio naturale per descrivere gli inaspettati fenomeni che vedono il tempo miscelarsi con lo spazio in un tutt'uno dal quale non si riesce a distinguere l'uno dall'altro. Per quanto riguarda invece la Meccanica Quantistica, uno dei suoi principi fondamentali è il *principio di sovrapposizione*. Per spiegarlo brevemente basterà qui dire che lo stato di un sistema fisico (quantistico) ammette una descrizione in termini di una funzione d'onda, che verifica una certa equazione differenziale alle derivate parziali, detta di *Schrödinger*.¹² Il principio di sovrapposizione dice che se un sistema fisico può stare sia in uno stato descritto da una funzione d'onda ψ_1 che in uno stato descritto da una funzione d'onda ψ_2 , allora può stare anche in qualsiasi stato descritto dalla combinazione lineare $\lambda\psi_1 + \mu\psi_2$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Quindi, diremmo noi, l'insieme Ψ delle funzioni d'onda corrispondenti a stati fisici possibili è un $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale. Inoltre, l'insieme degli stati fisici che non corrispondono al “vuoto” sono parametrizzati dai punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}\Psi$ associato a Ψ , vale a dire dall'insieme di tutte le rette vettoriali, o direzioni, corrispondenti a funzioni d'onda non nulle. Detta in termini pratici, due funzioni d'onda sono l'una multipla dell'altra se e solo se esse descrivono lo stesso stato. Si veda per esempio [29, p. 35].

1.4 La dimensione di uno spazio vettoriale

1.4.1 Cos'è la *dimensione* di uno spazio vettoriale? In un certo senso è una misura della nostra libertà di scelta. Spieghiamoci. Scegliere un vettore di $\mathbb{K}^4$ equivale a scegliere quattro scalari, mentre per selezionare un vettore di $\mathbb{K}^3$ di scelte ne bastano 3. Sia $\mathbb{K}^4$ che $\mathbb{K}^3$ posseggono un numero infinito di elementi, però $\mathbb{K}^4$ ha più *gradi di libertà*, che è l'idea intuitiva che si cela dietro la definizione rigorosa di *dimensione*. Il lettore può facilmente verificare che l'insieme di tutte le colonne $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^4$ tali che $\mathbf{u}(1) + \mathbf{u}(2) = 0$ e $\mathbf{u}(1) - \mathbf{u}(3) + \mathbf{u}(4) = 0$ è uno spazio vettoriale (un sottospazio di $\mathbb{K}^4$). La notazione $\mathbf{u}(i)$, appena usata, significa l' i -esima componente del vettore $\mathbf{u}$. La dimensione in questo caso è due, essendo uguale al numero di gradi di libertà nella scelta di un vettore di $\mathbb{K}^4$ meno il numero dei *vincoli* (due equazioni = due vincoli).

In pratica, uno spazio vettoriale di *dimensione finita*, pur essendo un insieme di infiniti vettori,¹³ può essere *generato* a partire da un numero finito di essi nel senso seguente. Gli elementi di un sottinsieme finito $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V si dicono *generatori* di V se ogni altro vettore di V si può esprimere per mezzo di una combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h$, ossia se e solo se per ogni $\mathbf{v} \in V$ esistono scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{K}$ tali che $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_h\mathbf{v}_h$. Se per ogni vettore $\mathbf{v}$ tale scelta di scalari è unica, allora si dice che la h -upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$ è una *base* dello spazio vettoriale V . Si dimostrerà che tutte le basi posseggono lo stesso numero di elementi e, quindi, uno spazio vettoriale si dirà avere *dimensione n* se e solo se V possiede una base formata da n elementi. Per esempio $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4, perché

¹¹ Così detti in onore del fisico olandese Hendrik Antoon Lorentz, Arnhem, 18 Luglio 1853 – Haarlem, 4 Febbraio 1928, autore delle celebri trasformazioni di coordinate, che generalizzano quelle di Galileo, in cui si dà conto della fusione tra spazio e tempo in una inscindibile unità spazio temporale.

¹² Erwin Schrödinger, Vienna, 12 agosto 1887 – 4 gennaio 1961, fisico matematico austriaco, uno dei padri con Werner Heisenberg (1901-1976), della meccanica quantistica.

¹³ È sicuramente vero se $\mathbb{K}$ è un campo infinito: ma si possono costruire controesempi con campi finiti!

ogni vettore

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori coordinati $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ definiti dalla seguente uguaglianza:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 + x_4 \mathbf{e}_4 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.2 Se V è un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale, la libertà di combinare linearmente i vettori non è sufficiente ai fini della geometria poiché, come dice la parola, si vuole imparare a misurare i vettori, o compararli per mezzo di un angolo. A tal fine si introduce una funzione che misura l'interazione di due vettori, quasi un modo per osservare un vettore dal punto di vista di un altro. Questo è il prodotto scalare. Un prodotto scalare, come si vedrà, è una forma bilineare simmetrica definita positiva. Sugli spazi $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare di due vettori è definito classicamente alla maniera che segue:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}(1)\mathbf{v}(1) + \dots + \mathbf{u}(n)\mathbf{v}(n), \quad (1.2)$$

dove con $\mathbf{u}(i)$, rispettivamente $\mathbf{v}(i)$, si è indicata la i -esima componente del vettore $\mathbf{u}$ (rispettivamente del vettore $\mathbf{v}$). Il prodotto scalare definito su $\mathbb{R}^n$ mediante la (1.2) non è che uno dei possibili prodotti scalari che possono istituirsi su $\mathbb{R}^n$, che sono tanti quante le possibili scelte di una matrice simmetrica *definita positiva*: si veda il Capitolo 12. In generale, dato un prodotto scalare su V si dichiara che due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Grazie al prodotto scalare si può definire il *modulo* di un vettore (spesso detto *intensità* o, più impropriamente, *lunghezza*), attraverso la formula

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle},$$

ossia la radice quadrata del prodotto scalare di un vettore con se stesso. Una base di uno spazio vettoriale si dice ortonormale se tutti i vettori della base hanno modulo unitario e sono ortogonali due a due.

1.4.3 La costruzione di un modello per lo spazio fisico euclideo tridimensionale procede allora in maniera limpida come segue (Capitolo 5). Si parte da un insieme $\{\bullet\}$ formato da un solo punto e si costruisce l'insieme

$$\mathcal{E}^3 := \bullet + \mathbb{R}^3 := \{\bullet + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3\},$$

detto spazio affine euclideo tridimensionale. I suoi elementi si dicono punti. Se $A \in \mathcal{E}^3$ è un punto, allora A è della forma $\bullet + \mathbf{u}_A$ per qualche $\mathbf{u}_A \in \mathbb{R}^3$. Inoltre tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ spostano i punti di $\mathcal{E}^3$ trasladoli, definendo:

$$A + \mathbf{v} = (\bullet + \mathbf{u}_A) + \mathbf{v} = \bullet + (\mathbf{u}_A + \mathbf{v}).$$

Un sistema di riferimento cartesiano standard di $\mathcal{E}^3$ si ottiene scegliendo un'origine O (ossia un qualsiasi punto di $\mathcal{E}^3$) e dichiarando che le *coordinate* di ogni altro punto P sono le *componenti* dell'unico vettore $\mathbf{u}$ che sposta l'origine nel punto P . Più precisamente, si dice che le coordinate di P rispetto al sistema di riferimento di origine O sono (x, y, z) se e solamente se

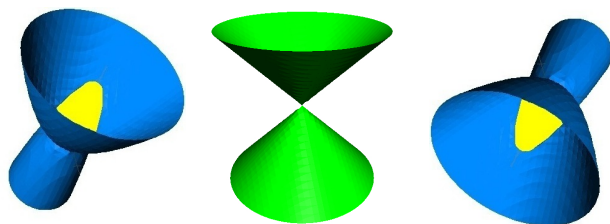
$$P = O + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Naturalmente in $\mathcal{E}^3$ possono istituirsi moltissimi altri sistemi di riferimento. Tutto dipende dalla scelta di una base di $\mathbb{R}^3$ e i dettagli verranno dati nel Capitolo 5 a ciò dedicato. E' chiaro però che ora si dispone di uno spazio in cui poter fare della geometria, uno spazio i cui elementi sono dei punti, rigorosamente e chiaramente definiti, che si portano con sé delle coordinate in modo naturale, e per i quali è possibile definire una nozione di distanza. Se $A, B \in \mathcal{E}^3$, la distanza $d(A, B)$ tra il punto A e il punto B coincide col modulo dell'unico vettore $\mathbf{u}$, indicato con $\overrightarrow{AB}$, che trasla A in B . Tale nozione di distanza coincide proprio con la distanza fisica di stendere il metro tra due punti e permette di provare agevolmente i teoremi classici della geometria euclidea. A titolo di esempio in questo libro ci si è limitati al più famoso *teorema di Pitagora* (Teorema 5.2.4).

1.4.4 Si consiglia il lettore di riflettere sulla circostanza che la costruzione precedente non ha usato in alcun modo essenziale il fatto che i vettori venissero presi in prestito da $\mathbb{R}^3$. Se si volesse costruire uno *spazio affine euclideo* a n dimensioni sarebbe sufficiente considerare l'insieme $\{\bullet + \mathbf{u}\}$, facendo ora variare $\mathbf{u}$ in $\mathbb{R}^n$ invece che in $\mathbb{R}^3$. Ancora, è possibile costruire spazi affini di dimensione infinita considerando insiemi della forma $\{\bullet + \mathbf{u}\}$ dove ora $\mathbf{u}$ è preso a prestito in uno spazio vettoriale V di dimensione infinita, per esempio quello dei polinomi, o quello delle funzioni reali continue definite su un intervallo della retta reale (chiuso, aperto, limitato o illimitato). La morale è che la costruzione rigorosa di un modello dello spazio fisico tridimensionale indica la via per ampliare in infiniti modi possibili l'orizzonte delle geometrie, cambiando o le dimensioni o la faretra di vettori dai quali si raccolgono le frecce da applicare al nucleo $\{\bullet\}$ del nostro big bang geometrico.

1.4.5 La costruzione dello spazio affine euclideo indica essenzialmente due nuovi itinerari, entrambi abbozzati nel testo. Da un lato si può proseguire con la generalizzazione delle elementari nozioni di geometria analitica piana al caso dello spazio affine tridimensionale, studiando luoghi di punti (sottinsiemi di punti) di notevole rilevanza geometrica, quali rette e piani (Capitolo 6), curve differenziabili, superficie in generale (Capitolo 15) e superficie notevoli, come le quadriche (tra le quali le sfere) (Capitolo 18). Le strutture metriche (cioè, in sostanza, il prodotto scalare dello spazio $\mathbb{R}^3$ sul quale lo spazio affine è modellato) intervengono solo nelle questioni di ortogonalità oppure nel computo di distanze (per esempio distanza punto-piano, punto-retta, retta-retta, Cf. Capitolo 6). La struttura metrica può tuttavia essere utilizzata per interpretare il significato della definizione della superficie sferica, come luogo di punti equidistanti da un punto fisso. Il menù della geometria analitica nello spazio prevede ancora un rapido studio di superficie coniche o cilindriche. Un'attenzione particolare sarà riservata alle superficie *quadriche* definite come luogo di zeri di polinomi di secondo grado in tre indeterminate. Queste ultime, sia pur semplicemente definite, posseggono dei grafici di

inusitata bellezza, armonia e eleganza, ai quali lo studente appassionato di design può attingere per i suoi futuri esperimenti, con l’augurio di strepitosi successi professionali.



1.5 Topologia e Calcolo Differenziale

1.5.1 L'altra direzione di marcia indicata nel testo è quella di studiare la *topologia* e il *calcolo differenziale* negli spazi affini n -dimensionali (Capitoli 13 e 14). Dare una *topologia* ad un insieme significa selezionare una classe privilegiata di sottinsiemi detti *aperti*. La struttura metrica di $\mathbb{E}^n$, lo spazio affine euclideo n -dimensionale, consente di definire la nozione di *palla aperta*, ossia l'insieme dei punti che distano da un punto fissato per meno di una distanza prefissata. Un cerchio del piano senza bordo è un esempio di palla aperta. Grazie alla nozione di *palla aperta* si definisce quella di *intorno*. Esplorare un intorno di un punto è come fare uno *zoom* nelle vicinanze del punto per osservare il comportamento locale della geometria. La nozione veramente cruciale è comunque quella di differenziale di una funzione tra due spazi affini o di un campo vettoriale su uno spazio affine. Si tratta della nozione che generalizza quella di derivata di una funzione reale di variabile reale. E qui non si può andare avanti più di tanto. Occorrerebbe tornare nuovamente all'algebra lineare, perché la geometria si nutre di nettare algebrico e viceversa. Il discorso si farebbe troppo lungo, col rischio di perdere il lettore per strada già in queste poche pagine iniziali. E' forse più conveniente, allora, dire cosa prevede il menu: se vi fossero piatti, forse ve ne sono, che il lettore non avesse ancora assaggiato, il consiglio è di attendere che questi gli vengano serviti nei capitoli giusti, prima di decidere se sono di suo gradimento. Alle volte il cibo non è cattivo, ma potrebbe essere stato cucinato non nel migliore dei modi possibili. Un rischio anche di questo testo. Speriamo bene.

1.6 Il programma

1.6.1 Dopo aver introdotto la nozione di spazio vettoriale (Capitolo 7) che è un insieme sul quale sono definite le combinazioni lineari dei propri elementi a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$, e lo studio dei suoi sottospazi e le operazioni con e tra i sottospazi (somma, somma diretta) si procede allo studio delle funzioni tra spazi vettoriali che preservano le combinazioni lineari, le cosiddette *applicazioni lineari* (Capitolo 9). Più precisamente, una funzione $f : U \rightarrow V$ tra due spazi vettoriali U e V si dice lineare se l'immagine di una combinazione lineare di vettori in U è combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, delle immagini dei vettori in V :

$$f(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}) + \mu f(\mathbf{v}).$$

Per esempio, la funzione $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ il prodotto di $\mathbf{u}$ con uno scalare $\mathbf{a}$ è lineare. Infatti

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) + \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}).$$

Le funzioni lineari tra due spazi vettoriali formano esse stesse uno spazio vettoriale, potendosi esse sommare e moltiplicare per scalari, come si è imparato per le funzioni di variabile reale nel corso di analisi 1. Esse possono inoltre comporsi e la composizione di due applicazioni lineari è lineare, nella miglior tradizione delle teorie matematiche in cui proprietà di funzioni (continuità, differenziabilità) si preservano per combinazioni lineari. Di importanza cruciale per le applicazioni, per esempio alla soluzione dei sistemi di m equazioni di primo grado a n -incognite, è la nozione di nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Il *nucleo* è la controfigura astratta che descrive le soluzioni di un sistema di equazioni omogeneo (cioè con “termini noti” nulli), mentre l'*immagine* permette di capire a priori se un sistema di equazioni non omogeneo ammette soluzioni e quante. Si tratta dello schema teorico che sta alla base della risoluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

1.6.2 Un'applicazione lineare $f : U \rightarrow V$ invertibile si dice *isomorfismo* e due spazi vettoriali si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo tra essi. Uno dei teoremi più importanti di tutto il testo è quello che assicura che tutti i $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali di dimensione finita uguale a n sono isomorfi tra loro, in particolare tutti isomorfi a $\mathbb{K}^n$ (Teorema 9.4.15). Ciò dice che fare algebra lineare su spazi vettoriali astratti di dimensione finita è lo stesso che farla sui più concreti spazi di colonne di scalari, sicché tutta l'astrazione precipita drammaticamente nel mare della naturalità. In particolare lo spazio delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali può essere identificato con uno spazio di matrici, che sono delle tabelle rettangolari di scalari per le quali si definiscono delle naturalissime operazioni di somma e prodotto per uno scalare, in modo del tutto analogo a quanto si fa con le colonne di elementi di un campo, che sono esse stesse un tipo particolare di matrici. Il prodotto di matrici, anch'esso un'operazione di natura piuttosto meccanica e facilmente implementabile su computer utilizzando un qualsiasi software di manipolazione algebrica (si veda per esempio [5]), corrisponde alla composizione di applicazioni lineari. Le matrici quadrate invertibili, cioè quelle che posseggono una inversa rispetto al prodotto di matrici, corrispondono agli isomorfismi. Studiare le proprietà delle applicazioni lineari equivale pertanto a studiare proprietà di matrici e familiarizzarsi con delle naturali operazioni su di esse, quali riduzione per righe e/o per colonne.

1.6.3 Ad ogni applicazione lineare da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ può dunque associarsi una tabella di scalari a m righe ed n colonne, detta *matrice* $m \times n$, che identifica di fatto l'applicazione lineare stessa. L'immagine di un determinato vettore può calcolarsi per mezzo del prodotto, al quale si è alluso poco sopra, della matrice per le componenti del vettore. Così se $\mathbf{v} \in V$ e f è lineare, il problema di trovare tutte le controimmagini del vettore $\mathbf{v}$:

$$f^{-1}(\mathbf{v}) = \{\mathbf{u} \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\},$$

equivale a risolvere un sistema di equazioni lineari. Per esempio, se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è data da:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ 4x + 3y \end{pmatrix}$$

trovare

$$f^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

equivale a risolvere il sistema di due equazioni a due incognite

$$\begin{cases} 2x - 3y = -5, \\ 4x + 3y = 17, \end{cases}$$

che si usa riscrivere ponendo in evidenza la *matrice dei coefficienti*, la quale a sua volta coincide con una delle possibili matrici associabili all'applicazione lineare f :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

L'insieme delle controimmagini del vettore $\begin{pmatrix} -5 \\ 17 \end{pmatrix}$ contiene in questo caso il solo elemen-

to $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, che è la soluzione del sistema. Per trattare sistemi più generali, per esempio con più incognite che equazioni o più equazioni che incognite, si possono facilmente mettere a punto dei metodi (teorema di Rouché¹⁴ e Capelli¹⁵) che garantiscano l'esistenza eventuale di soluzioni e dei metodi di risoluzione che si basano nel trasformare il sistema dato in un sistema più facile, equivalente al primo. Di qui il capitolo dedicato alla manipolazione delle matrici. Sommarle significa sommare applicazioni lineari. Moltiplicarle significa comporre applicazioni lineari. Ridurle, significa trasformare un sistema di equazioni in uno equivalente di più facile soluzione. Parole chiave per questi argomenti sono *nucleo* di una applicazione lineare $f : U \rightarrow V$ (il sottospazio dei vettori $u \in U$ che hanno immagine nulla) e *immagine di una applicazione lineare*, che è l'insieme dei vettori di V che sono immagine di almeno un vettore di U . Il sistema

$$f(u) = v \quad \Longleftrightarrow \quad AX = v$$

dove A è una matrice associata a f , è risolubile se e solo se v è un vettore dell'immagine di f . Inoltre, u_1 e u_2 sono controimmagini di v se e solo se $u_1 - u_2$ è un vettore del nucleo. Questo è in sostanza il teorema di Rouché-Capelli, del quale si avrà modo di parlare ampiamente (Capitolo 9).

1.6.4 Le applicazioni lineari di uno spazio vettoriale V in se stesso si dicono endomorfismi. Per esempio, una rotazione del piano vettoriale è un endomorfismo, così come lo è una dilatazione. Se V è uno spazio vettoriale sui complessi, ogni endomorfismo $f : V \rightarrow V$ possiede delle *autodirezioni*, ossia delle direzioni di V che sono invarianti per f . Più precisamente $[v]$ è una autodirezione se $f(u) \in [v]$ per ogni $u \in [v]$. Le autodirezioni sono importantissime, perché a) esse sono legate all'endomorfismo e non a un particolare modo di rappresentarlo, b) perché permettono di scrivere la matrice di un endomorfismo nel modo più economico possibile, spesso in forma diagonale. Non tutti

¹⁴ Eugé ne Rouché, insigne matematico francese (Sommieres 1832–Lunel, 1910)

¹⁵ Alfredo Capelli, Milano, 5 agosto 1855 – Napoli, 28 gennaio 1910), matematico italiano.

gli endomorfismi si possono rappresentare con matrici diagonalizzabili, perché questi potrebbero non avere abbastanza autodirezioni indipendenti. Però, per esempio, tutti gli endomorfismi che possono rappresentarsi per mezzo di una matrice simmetrica ammettono una diagonalizzazione: infatti, a norma del teorema spettrale, esse posseggono tante autodirezioni indipendenti quanto la dimensione dello spazio su cui agiscono.

1.6.5 L'importanza delle applicazioni lineari e delle matrici si manifesterà in tutto il suo splendore nello studio del calcolo differenziale in più variabili (Capitolo 14). Il differenziale di una funzione definita tra due spazi affini, infatti, è un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali o, se si vuole, una matrice. Le proprietà della matrice differenziale darà informazioni molto precise sulla natura della funzione nell'intorno di un punto. Inoltre, le matrici quadrate simmetriche e i loro autovalori (Capitolo 12) saranno di fondamentale importanza per generalizzare lo studio dei massimi e minimi di funzioni reali di variabili reali a quello di funzioni reali di più variabili reali (Cf. 14.6). Si hanno già così tutti gli strumenti per rientrare irruentemente nel nostro universo euclideo tridimensionale o multidimensionale per ampliare la gamma delle nostre esperienze. Non solo più piani o rette. O sfere o quadriche. Ma anche superficie parametrizzate, coni non quadrici, superficie di rotazione, curve nello spazio quale modello del movimento di un punto. Quasi riuscendo finalmente ad intuire l'inafferrabile natura dello spazio fisico, per lavorare nel quale si è dovuto cominciare questo lungo viaggio alla ricerca del bandolo della matassa. Per scoprire che alla fine lo spazio fisico è questo, niente più che una buona approssimazione del perfetto Universo Matematico del quale allo studente dei corsi di geometria non vengono offerti che pochi, ma illuminanti, scorci.

1.6.6 In questa breve anteprima dei contenuti del testo, altri ne sono stati ignorati, non meno importanti. E' che, di chiacchiera in chiacchiera, ci si è un po' attardati ed è forse giunto il momento di passare dagli annunci ai fatti. L'ora è giunta di cominciare a lavorare seriamente e duramente, rimboccandosi le maniche per iniziare questa prima faticosa ma avventurosa esplorazione nella landa sconosciuta della Geometria, un importante lembo dell'universo matematico, che non mancherà di premiare i più audaci con delle gran belle sorprese. O delle brutte, all'esame di profitto, per lo studente pavido che non vorrà studiare con tutto l'impegno necessario, per tema degli ostacoli o, forse, dell'ignoto.

1.7 Esercizi

1.7.1 In un sistema di riferimento cartesiano bidimensionale, si consideri il punto P di coordinate $(1,3)$. Trovare le coordinate del punto che si ottiene traslando il punto P

con il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Soluzione: [16, 3.5.6]

1.7.2 Si consideri la funzione $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $q(x) = x^2$. E' lineare? Ossia: è vero che $q(a \cdot x + y) = a \cdot q(x) + q(y)$. *Soluzione:* [16, 6.5.7]

1.7.3 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = 2x - 3y$. E' lineare? Descrivere il sottinsieme $f^{-1}(0)$ di $\mathbb{R}^2$, possibilmente rappresentandolo graficamente.

Soluzione: [16, 6.5.8]

1.7.4 Cos'è esattamente una soluzione di un sistema di equazioni lineari (cioè di primo grado) omogenee (cioè senza termini costanti non nulli)?